MAURICE KOSKAS

Images d'équations différentielles stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 411-414
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__411_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

IMAGES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

par Maurice Koskas

Dans l'article [1], Yamada et Watanabe utilisent l'argument suivant. Considérons sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ continue à droite, un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et un processus adapté continu (X_t) satisfaisant à une équation différentielle stochastique

(1) $\qquad X_0=x \qquad dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt \qquad$ (P-p.s.)

où σ et b sont des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$. Transportons nous maintenant sur un espace canonique, c'est à dire considérons l' espace $W=\underline{\underline{C}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2)$, avec sa tribu borélienne usuelle $\underline{\underline{G}}$, avec ses applications coordonnées d'indice t que nous noterons (β_t,ξ_t). Nous désignons aussi par $(\underline{\underline{G}}_t^\circ)$ la famille de tribus naturelle (non rendue continue à droite) du processus (β_t,ξ_t) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Enfin, désignons par π l'application de Ω dans W qui à $\omega\in\Omega$ associe la trajectoire $(B_\cdot(\omega),X_\cdot(\omega))$ de sorte que $\beta_t\circ\pi = B_t$, $\xi_t\circ\pi = X_t$; nous transportons sur W la loi P en posant $Q=\pi(P)$.

Dans ces conditions, Yamada et Watanabe considèrent comme évident que (ξ_t) est, sur W, solution de l'équation différentielle stochastique

(2) $\qquad \xi_0=x \qquad d\xi_t = \sigma(\xi_t)d\beta_t + b(\xi_t)dt \qquad$ (Q-p.s.)

A la lecture de l'article, ce point nous a un peu arrêtés. Il mérite une démonstration - bien qu'en fait il ne soit pas difficile. Nous allons d'abord nous occuper de ce cas concret, puis passer à une situation plus générale (en suivant une suggestion de P.A. Meyer).

I. Nous désignons par $(\underline{\underline{G}}_t)$ la famille de tribus $(\underline{\underline{G}}_t^\circ)$, rendue continue à droite et complétée. Nous vérifions d'abord que (β_t) est un mouvement brownien par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$. C'est très facile : les processus B_t et B_t^2-t étant des martingales par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, il résulte du théorème des lois images, et du fait que $\pi^{-1}(\underline{\underline{G}}_t)\subset\underline{\underline{F}}_t$, que les processus β_t et β_t^2-t sont des martingales continues par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$ donc que (β_t) est un mouvement brownien pour cette famille de tribus.

Considérons ensuite les processus

$$\eta_t = \xi_t - \xi_0 - \int_0^t b(\xi_s)ds \qquad Y_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)ds$$

$$\zeta_t = \int_0^t \varkappa_s d\beta_s \quad \text{où } \varkappa_s=\sigma(\xi_s) \qquad Z_t = \int_0^t K_s dB_s \quad \text{où } K_s=\sigma(X_s)$$

Nous avons $Y=\eta\circ\pi$, $K=\varkappa\circ\pi$, et (1) nous dit que $Y_t=Z_t$ p.s.. D'après le théorème des lois images, nous en déduirons que $\eta_t=\zeta_t$ p.s. si nous prouvons que $Z=\zeta\circ\pi$, c'est à dire le lemme suivant :

LEMME 1 . <u>Si $(\varkappa_t)$ est un processus prévisible borné par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, et si (K_t) est le processus $(\varkappa_t\circ\pi)$ sur Ω, alors ce processus est prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ et les intégrales stochastiques $\zeta_t=\int_0^t \varkappa_s d\beta_s$ et $Z_t=\int_0^t K_s dB_s$ sont liées par la relation</u> $Z_t=\zeta_t\circ\pi$

Une fois mis sous cette forme générale, le lemme est évident : on commence par l'établir pour les processus prévisibles élémentaires, puis on fait le passage à la limite usuel par classes monotones sur φ, correspondant à une convergence en probabilité (ici, dans L^2) des intégrales stochastiques ζ_t et Z_t .

II. Nous passons maintenant à une situation beaucoup plus générale. Nous considérons deux espaces probabilisés $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, $(W,\underline{\underline{G}},Q)$, avec une application mesurable $\pi : (\Omega,\underline{\underline{F}}) \mapsto (W,\underline{\underline{G}})$ telle que $Q=\pi(P)$. Nous supposons ces deux espaces complets, et sur chacun d'eux nous nous donnons une famille croissante de tribus, $(\underline{\underline{F}}_t)$ sur Ω , $(\underline{\underline{G}}_t)$ sur W , satisfaisant aux conditions habituelles, et telles que $\pi^{-1}(\underline{\underline{G}}_t)\subset \underline{\underline{F}}_t$ pour tout t.

Donnons nous maintenant des processus càdlàg. (μ_t^i) sur W, adaptés à $(\underline{\underline{G}}_t)$ ($1\leq i\leq n$), et des processus $(\varkappa_t^i)$ prévisibles localement bornés sur W . Introduisons les processus $M_t^i=\mu_t^i\circ\pi$ (manifestement càdlàg. sur Ω et adaptés à $(\underline{\underline{F}}_t)$), et les processus $K_t^i=\varkappa_t^i\circ\pi$ (manifestement prévisibles localement bornés par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Le petit résultat de transport que nous avons vu plus haut se généralise de la manière suivante :

THEOREME . <u>Supposons que sur Ω les M^i soient des semimartingales par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et satisfassent à l'équation de liaison stochastique</u>

(3) $$\Sigma_i \, K_t^i dM_t^i = 0 \qquad P\text{-}\underline{p.s.}$$

<u>Alors les μ^i sont des semimartingales sur W et satisfont à</u>

(4) $$\Sigma_i \, \varkappa_t^i d\mu_t^i = 0 \qquad Q\text{-}\underline{p.s.}$$

Admettons d'abord que les μ^i soient des semimartingales. Alors un argument de classes monotones identique à celui du lemme 1 montre que si $\varkappa^i$ est prévisible borné par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, si $K_t^i = \varkappa_t^i \circ \pi$, $\zeta_t^i = \int_0^t \varkappa_s^i d\mu_s^i$, $Z_t^i = \int_0^t K_s^i dM_s^i$, alors $Z_t^i = \zeta_t^i \circ \pi$. On passe de là aussitôt, par arrêt, au cas où $\varkappa^i$ est prévisible localement borné. Dans ces conditions, la relation (3) s'écrit $\Sigma_i\ Z_t^i = 0$ P-p.s., et elle entraîne $\Sigma_i\ \zeta_t^i = 0$ Q-p.s..

Le seul point à vérifier est donc le fait que les μ^i soient des semimartingales. Nous pouvons nous débarrasser de l'indice i . Introduisons la famille de tribus $\underline{\underline{H}}_t = \pi^{-1}(\underline{\underline{G}}_t)$, qui satisfait elle aussi aux conditions habituelles et qui est contenue dans $(\underline{\underline{F}}_t)$. Par hypothèse le processus $M_t = \mu_t \circ \pi$ est une semimartingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, adaptée à $(\underline{\underline{H}}_t)$. D'après un théorème tout récent de C. Stricker, (M_t) <u>est alors une semimartingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$. Admettons pour un instant le lemme suivant :

LEMME 2 . a) <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt de</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$. <u>Il existe alors un temps d'arrêt</u> τ <u>de</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>tel que</u> $T = \tau \circ \pi$ <u>p.s.</u>.

b) <u>Soit</u> (X_t) <u>un processus adapté à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$ <u>à trajectoires càdlàg.. Il existe un processus</u> (ξ_t) <u>à trajectoires càdlàg., adapté à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>tel que</u> $X_t = \xi_t \circ \pi$ -<u>p.s. pour tout</u> t .

D'après la définition des semimartingales, M peut s'écrire L+A, où L est une martingale locale par rapport à $(\underline{\underline{H}}_t)$, A un processus dont les trajectoires sont p.s. à variation finie sur tout intervalle compact. On peut supposer aussi que $L_0=0$. D'après le lemme 2, il existe des processus càdlàg. (λ_t), (α_t), adaptés à $(\underline{\underline{G}}_t)$, tels que $L_t = \lambda_t \circ \pi$ p.s., $A_t = \alpha_t \circ \pi$ p.s. sur Ω .

i) Nous avons $M_t = L_t + A_t$ P-p.s. ; d'après le théorème des lois images, nous avons $\mu_t = \lambda_t + \alpha_t$ Q-p.s.. Comme les trois processus sont continus à droite, ils sont Q-indistinguables, et il nous suffit de démontrer que les trajectoires de (α_t) sont Q-p.s. à variation finie, et que (λ_t) est une martingale locale.

ii) Comme le processus (α_t) est continu à droite, il nous suffit de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la v.a.

$$\lim_m \Sigma_i\ |\alpha_{s_{i+1}}(w) - \alpha_{s_i}(w)| \quad \text{où } s_i = in2^{-m} \text{ , } 0 \leq i < 2^m$$

est Q-p.s. finie. D'après le théorème des lois images, cela résulte du fait que la v.a.

$$\lim_m \Sigma_i\ |A_{s_{i+1}}(\omega) - A_{s_i}(\omega)\ |$$

est P-p.s. finie sur Ω .

iii) Il existe des temps d'arrêt T_n de la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$, tendant vers $+\infty$ en croissant, tels que les processus arrêtés $L^n_t = L_{t\wedge T_n}$ soient des martingales uniformément intégrables par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. D'après le lemme 2, a), il existe des temps d'arrêt τ_n de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ tels que $T_n = \tau_n \circ \pi$ p.s.. Il résulte du théorème des lois images que τ_n tend Q-p.s. vers l'infini en croissant. Posons alors $\lambda^n_t = \lambda_{t\wedge\tau_n}$; nous avons $L^n_t = \lambda^n_t \circ \pi$ p.s., donc λ^n_t est Q-intégrable pour tout t fini (théorème des lois images). Soient s,t tels que s<t, et $U \in \underline{\underline{G}}_s$. Nous avons d'après le théorème des lois images

$$\int_U (\lambda^n_t - \lambda^n_s) Q = \int_{\pi^{-1}(U)} (L^n_t - L^n_s) P = 0$$

et par conséquent (λ^n_t) est une martingale. Donc (λ_t) est une martingale locale, et la démonstration est achevée - à cela près que nous devons nous occuper du lemme 2 .

<u>Démonstration du lemme 2</u> .

a) Lorsque T est un temps d'arrêt étagé, le résultat est à peu près évident. On en déduit le cas général par passage à la limite.

b) Pour t rationnel, choisissons une v.a. η_t , $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable et telle que $\eta_t \circ \pi = X_t$ (une telle fonction existe, puisque $\underline{\underline{H}}_t = \pi^{-1}(\underline{\underline{G}}_t)$), et soit U l'ensemble des $w \in W$ tels que l'application $t \mapsto \eta_t(w)$ soit restriction aux rationnels d'une fonction càdlàg. sur $\mathbb{R}_+$. D'après C. Dellacherie et P.A. Meyer, Probabilités et potentiel, chap.IV th. 18 (p. 145), U est $\underline{\underline{G}}$-mesurable, donc $Q(U) = P(\pi^{-1}(U))$, et comme (X_t) est un processus càdlàg. sur Ω, cette dernière probabilité est égale à 1. Comme $\underline{\underline{G}}_0$ contient les ensembles Q-négligeables, on a $U \in \underline{\underline{G}}_0$ et si l'on pose

$$\text{pour } w \notin U \text{ , } \xi_t(w) = 0$$

$$\text{pour } w \in U \text{ , } \xi_t(w) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \eta_s(w)$$

on obtient un processus càdlàg. adapté. Il est clair que $\xi_t \circ \pi = X_t$ p.s..

REFERENCES

[1]. T. YAMADA et S. WATANABE. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto Univ. 11, 1971, p. 155-167.

[2]. C. STRICKER. Semimartingales, quasi-martingales, martingales locales et filtrations naturelles. A paraître.