SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 390-410

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__390_0>

SUR LA CONSTRUCTION DES INTEGRALES STOCHASTIQUES ET LES SOUS-ESPACES STABLES DE MARTINGALES

Jean JACOD

Nous proposons ici une méthode de construction de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale ou une semi-martingale. Cette méthode s'appuie sur un théorème caractérisant les "sauts" d'une martingale locale, théorème dû à Chou et Lépingle, et ne suppose connue que l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale continue, ce qui est bien classique.

Après un paragraphe consacré aux préliminaires, ce texte présente deux parties assez disparates, et qui sont indépendantes entre elles. Dans la première partie, on s'intéresse aux intégrales par rapport à une martingale locale: on retrouve d'abord l'intégrale prévisible de Meyer [6], puis on construit une intégrale optionnelle un peu plus générale que dans [6], ce qui permet d'étudier les sous-espaces stables et "fortement stables" de martingales; on retrouve notamment un certain nombre de résultats bien connus dans des cas particuliers (voir par exemple Pratelli [8], Yen et Yoeurp [9]). On compare également l'intégrale optionnelle à l'intégrale par rapport à une mesure aléatoire [3]. Dans la seconde partie, on construit les intégrales par rapport à une semi-martingale: d'abord l'intégrale prévisible, pour ce qui nous semble être la classe la plus vaste de processus "raisonnables", puis pour certains processus optionnels, de façon à ce que l'intégrale stochastique coïncide avec l'intégrale par trajectoires lorsque cette dernière existe.

1 - PRELIMINAIRES

On part d'un espace $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},P)$ vérifiant les "conditions habituelles" [2], et on note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{O}$ les tribus prévisible et optionnelle sur $\Omega\times[0,\infty[$. On identifie toujours deux processus indistinguables, et martingales et processus à variation finie sont toujours supposés <u>continus à droite et nuls en</u> 0 . A cette nuance près, on suit les notations de Meyer [6], avec les espaces $\underline{\underline{L}}$ (martingales locales), $\underline{\underline{L}}^c$ (martingales locales continues), $\underline{\underline{M}}$ (martingales de carré intégrable), $\underline{\underline{A}}$ (processus adaptés à variation intégrable), $\underline{\underline{V}}$ (processus adaptés à variation finie)... A toute classe $\underline{\underline{C}}$ de processus on associe la classe $\underline{\underline{C}}_{loc}$ "localisée" de $\underline{\underline{C}}$ par les temps d'arrêt, i.e. l'ensemble des X pour lesquels il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant P-ps vers $+\infty$ et telle que les processus arrêtés $X_t^{T_n} = X_{T_n \wedge t}$ soient dans $\underline{\underline{C}}$.

Si $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ on note A^p sa projection prévisible duale, tandis que ${}^pX$ désigne la projection prévisible du processus X (définie par ${}^pX = {}^p(X^+) - {}^p(X^-)$ lorsque ces deux processus ne sont pas infinis en même temps, ${}^pX = +\infty$ sinon). On rappelle que tout élément prévisible de $\underline{\underline{V}}$ est dans $\underline{\underline{A}}_{loc}$.

Deux éléments de $\underline{\underline{L}}$ sont dits <u>orthogonaux</u> si leur produit appartient à $\underline{\underline{L}}$. Tout $M \in \underline{\underline{L}}$ se décompose de manière unique en $M = M^c + M^d$ où $M^c \in \underline{\underline{L}}^c$ et où M^d est orthogonale à $\underline{\underline{L}}^c$. On note $\underline{\underline{L}}^d$ l'ensemble des $M \in \underline{\underline{L}}$ telles que $M^c = 0$ ("sommes compensées de sauts"). Si $M,N \in \underline{\underline{L}}^c$ on connait le processus $\langle M,N\rangle$; si $M,N \in \underline{\underline{L}}$ on pose classiquement $[M,N] = \langle M^c,N^c\rangle + \sum_{s\leq .} \Delta M_s \Delta N_s$, ce qui définit un élément de $\underline{\underline{V}}$; M et N sont orthogonales si et seulement si $[M,N] \in \underline{\underline{L}}$. On note $\underline{\underline{H}}^1$ l'ensemble des $M \in \underline{\underline{L}}$ tels que $[M,M]^{1/2} \in \underline{\underline{A}}$, et on a $\underline{\underline{H}}^1_{loc} = \underline{\underline{L}}$. Enfin on rappelle qu'un élément de $\underline{\underline{L}}^d$ est entièrement caractérisé par ses sauts.

On suppose connue l'intégrale stochastique (optionnelle ou prévisible: c'est la même chose) par rapport à $M \in \underline{\underline{L}}^c$: si $L^2(M) = \{H$ optionnel: $H^2 \cdot \langle M,M\rangle \in \underline{\underline{A}}\}$ et si $H \in L^2_{loc}(M)$, $H \cdot M$ est l'unique élément de $\underline{\underline{L}}^c$ tel que $\langle H\cdot M,N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle$ pour tout $N \in \underline{\underline{L}}^c$ (comme d'habitude, si $A \in \underline{\underline{V}}$, $H\cdot A$ désigne l'intégrale de Stieltjes $H\cdot A_t = \int_0^t H_s dA_s$ lorsqu'elle existe). On sait que si $H \in L^2_{loc}(M)$, alors ${}^pH \in L^2_{loc}(M)$ et $H\cdot M = ({}^pH)\cdot M$.

Pour tout processus X on pose

$$a(X)_t = \begin{cases} \sum_{s\leq t} X_s & \text{si } \sum_{s\leq t} |X_s| < \infty \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \qquad b(X) = (\sum_{s\leq .} X_s^2)^{1/2} = (a(X^2))^{1/2} .$$

Bien entendu, on n'utilisera $a(X)$ et $b(X)$ que lorsque le support $\delta(X) = \{X \neq 0\}$ est mince, i.e. à coupes dénombrables dans $[0,\infty[$. Si tel est le cas, on sait que $\delta(X) = \delta^i(X) + \delta^a(X)$, où $\delta^i(X)$ (resp.

$\mathcal{S}^a(X)$) est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (resp. accessibles), et on note $\mathcal{S}^p(X)$ le plus petit ensemble prévisible contenant $\mathcal{S}^a(X)$: c'est lui-même une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles (cf. [2]).

LEMME 1: (a) On a $b(X+Y) \leq b(X) + b(Y)$.

(b) $a(X) \in \underline{\underline{V}}$ (resp. $\underline{\underline{A}}_{loc}$) $\Rightarrow b(X) \in \underline{\underline{V}}$ (resp. $\underline{\underline{A}}_{loc}$).

(c) $a(X) \in \underline{\underline{V}}$ et $b(X) \in \underline{\underline{A}}_{loc} \Rightarrow a(X) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$.

(d) $a(X) \in \underline{\underline{A}}_{loc} \Rightarrow a({}^pX) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$.

(e) $b(X) \in \underline{\underline{A}}_{loc} \Rightarrow b({}^pX) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$.

Démonstration: Seules les assertions (d) et (e) ne sont pas tout-à-fait évidentes. Dans les deux cas, $\mathcal{S}(X)$ est mince, donc ${}^pX = 0$ en dehors de $\mathcal{S}^p(X)$. Comme $|{}^pX_T| \leq E(|X_T| | \mathcal{F}_{T-})$ pour tout temps prévisible T et comme $a(|X|) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, on a (d).

Supposons $b(X) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Soient $X' = X1_{\{|X|>1\}}$, $X'' = X - X'$. On a $b(X')$, $b(X'') \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Comme $\mathcal{S}(X')$ est discret, $a(X') \in \underline{\underline{V}}$ et d'après (c), $a(X') \in \underline{\underline{A}}_{loc}$; mais alors $a({}^pX') \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, donc $b({}^pX') \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Par ailleurs $b(X'')$ est localement borné, donc $b(X'')^2 = a(X''^2) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$; donc $a[{}^p(X''^2)] \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et comme $({}^pX'')^2 \leq {}^p(X''^2)$ on a $b({}^pX'')^2 = a[({}^pX'')^2] \leq a[{}^p(X''^2)] \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, d'où a-fortiori $b({}^pX'') \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. ∎

Terminons cette partie par le théorème qui nous servira de base pour tout ce qui suit.

THEOREME 1: Soit Y un processus optionnel. Pour qu'il existe $X \in \underline{\underline{L}}$ avec $\Delta X = Y$, il faut et il suffit que ${}^pY = 0$ et que $b(Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$.

Ce théorème, dû à Chou, Meyer et Lépingle, n'a pas encore été publié; aussi nous en donnons une esquisse de démonstration, en suivant [5]. D'abord la condition est trivialement nécessaire (on sait que ${}^p(\Delta X) = 0$, $b(\Delta X) \leq [X,X]^{1/2}$ et $\underline{\underline{H}}^1_{loc} = \underline{\underline{L}}$). Passons à la réciproque, qu'il suffit par localisation d'établir lorsque $b(Y) \in \underline{\underline{A}}$. Soient (S_n) (resp. (T_n)) une suite de temps d'arrêt totalement inaccessibles(resp. prévisibles) de graphes disjoints, dont la réunion des graphes égale $\mathcal{S}^i(Y)$ (resp. $\mathcal{S}^p(Y)$); on note $M(n)$ la somme compensée du processus $Y_{S_n} 1_{\{S_n \leq t\}}$ et $N(n) = Y_{T_n} 1_{\{T_n \leq t\}}$: si $X(n) = \sum_{p \leq n} (M(p) + N(p))$ on vérifie que $b(\Delta X(n))$ croit vers $b(Y)$: donc $X(n)$ est une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^1$, qui est complet. Si X désigne la limite de

$X(n)$, on a $E(\sup|X(n)_t - X_t|) \to 0$, donc $\Delta X = Y$. Ce théorème fait donc appel à la[(t)] complétude de $\underline{\underline{H}}^1$, ce qui n'est pas un résultat facile; cependant, ce résultat peut se montrer sans utiliser les intégrales stochastiques (voir par exemple Bernard et Maisonneuve [1]).

2 - MARTINGALES LOCALES ET ESPACES STABLES

a - Intégrales prévisibles.

Soit $X \in \underline{\underline{L}}$. On va construire, dans un ordre croissant de généralité, diverses intégrales stochastiques par rapport à X. Commençons par l'intégrale prévisible. On pose

$$^pL(X) = \{H \text{ prévisible: } (H^2 \bullet [X,X])^{1/2} \in \underline{\underline{A}}\}.$$

Dans [6] il est montré qu'on peut intégrer les éléments de $^pL_{loc}(X)$, et qu'on obtient ainsi la classe "la plus générale" de processus prévisibles intégrables. Voici une autre construction de cette intégrale, un peu plus rapide qu'en [6].

Soit donc $H \in {}^pL_{loc}(X)$. On a $^p(H\Delta X) = H\,{}^p(\Delta X) = 0$ et $H^2 \bullet [X,X] = H^2 \bullet \langle X^c, X^c\rangle + b(H\Delta X)^2$: donc d'une part $H \in L^2_{loc}(X^c)$, d'autre part il existe une $X' \in \underline{\underline{L}}^d$ unique avec $\Delta X' = H\Delta X$, et on pose

$$H \bullet X = H \bullet X^c + X'.$$

Il est immédiat de vérifier que $[H \bullet X, Y] = H \bullet [X,Y]$, $\forall Y \in \underline{\underline{L}}$; on a donc bien construit <u>la même intégrale stochastique qu'en [6]</u>. Soulignons que $H \bullet X$ coïncide avec l'intégrale de Stieltjes lorsque $X \in \underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{A}}_{loc}$. Enfin le résultat suivant est montré dans [10]:

PROPOSITION 1: <u>L'espace</u> $^p\underline{\underline{L}}(X) = \{H \bullet X : H \in {}^pL(X)\}$ <u>est fermé dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

On dit qu'un sous-espace $\underline{\underline{N}}$ de $\underline{\underline{L}}$ est <u>stable</u> si $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{H}}^1$ est fermé dans $\underline{\underline{H}}^1$, et si pour tout $X \in \underline{\underline{N}}$ et tout $H \in {}^pL_{loc}(X)$, on a $H \bullet X \in \underline{\underline{N}}$. Il découle immédiatement de la proposition:

COROLLAIRE: <u>Si</u> $X \in \underline{\underline{L}}$, <u>l'espace stable engendré par</u> X <u>est</u> $^p\underline{\underline{L}}_{loc}(X)$.

Il est classique que si $\underline{\underline{N}}$ est un espace stable et si $Y \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, alors Y s'écrit de manière unique comme un élément de $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$, plus un élément de $\underline{\underline{M}}_{loc}$ orthogonal à $\underline{\underline{N}} \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$. En particulier si $X, Y \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, on a

$$(1) \qquad Y = H \cdot X + Y'$$

où $H \cdot X \in {}^{p}\underline{\underline{L}}_{loc}(X) \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$ et Y' est orthogonale à X.

Dans le cas général, on n'a plus de décomposition (1), comme le montre le contre-exemple suivant: supposons que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, tandis que $\mathcal{F}_t$ est triviale pour tout $t < 1$; soient U et V deux variables $\mathcal{F}$-mesurables, telles que $E(U) = E(V) = 0$, que V soit bornée et que $E(U^2) = \infty$. Considérons les martingales $X_t = U1_{\{1 \le t\}}$ et $Y_t = V1_{\{1 \le t\}}$; si on a une décomposition (1), il existe une constante h $(= H_1)$ telle que $V = hU + V'$ et que $E(V'U) = 0$; or, $V'U = VU - hU^2$, ce qui conduit à une impossibilité si on n'a pas $E(UV) = 0$.

b - Intégrales optionnelles.

Passons maintenant à un premier type d'intégrales optionnelles. On pose

$$L(X) = \{H \text{ optionnel}: \sqrt{H^2 \cdot \langle X^c, X^c \rangle} + b(H\Delta X - {}^{p}(H\Delta X)) \in \underline{\underline{A}}\}$$

$$L'(X) = \{H \text{ optionnel}: \sqrt{H^2 \cdot \langle X^c, X^c \rangle} + b(H\Delta X) \in \underline{\underline{A}}\}$$
$$= \{H \text{ optionnel}: (H^2 \cdot [X,X])^{1/2} \in \underline{\underline{A}}\}.$$

Etant donné le lemme 1-(e), on a les inclusions:

$$\begin{cases} {}^{p}L(X) \subset L'(X), \qquad L'_{loc}(X) \subset L_{loc}(X). \\ X \text{ quasi-continu à gauche} \Rightarrow L'(X) = L(X). \end{cases}$$

Si $H \in L_{loc}(X)$, il existe un $X' \in \underline{\underline{L}}^d$ et un seul tel que $\Delta X' = H\Delta X - {}^{p}(H\Delta X)$. On pose alors

$$H \odot X = H \cdot X^c + X',$$

qui est "l'intégrale stochastique" de H par rapport à X. On utilise la notations "$H \odot X$" pour bien marquer le fait que cette intégrale <u>ne coïncide pas</u> avec l'intégrale de Stieltjes lorsque $X \in \underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{A}}_{loc}$ (même quand X est quasi-continue à gauche). Cependant si $H \in {}^{p}L_{loc}(X)$, on a bien-sûr $H \odot X = H \cdot X$.

Lorsque $H \in L'_{loc}(X)$, $H \odot X$ n'est autre que l'intégrale construite en [6] (et notée $H \cdot X$), mais évidemment il n'y a pas de raisons de se limiter à $L'_{loc}(X)$. Remarquons que

$$[H\odot X, H\odot X] \;=\; H^2\bullet\langle X^c, X^c\rangle \;+\; b(H\Delta X - {}^p(H\Delta X))^2,$$

donc si $H\in L_{loc}(X)$, on a $H\odot X\in \underline{\underline{H}}^1$ si et seulement si $H\in L(X)$.

Nous aurons besoin d'un <u>second type</u> d'intégrales optionnelles. Posons

$$\tilde{L}(X) = \{H \text{ optionnel: } {}^p(H1_{\mathcal{J}^p(\Delta X)\setminus\mathcal{J}(\Delta X)}) = 0,$$
$$\sqrt{H^2\bullet\langle X^c, X^c\rangle + b(H\Delta X - {}^p(H\Delta X) + H1_{\mathcal{J}^p(\Delta X)\setminus\mathcal{J}(\Delta X)})} \in \underline{\underline{A}}\}.$$

Si $H\in L_{loc}(X)$ il existe un $X'\in \underline{\underline{L}}^d$ et un seul tel que $\Delta X' = H\Delta X - {}^p(H\Delta X) + H1_{\mathcal{J}^p(\Delta X)\setminus\mathcal{J}(\Delta X)}$, et on pose

$$H\circledast X \;=\; H\bullet X^c + X'.$$

Remarquons que $L(X)\not\subset\tilde{L}(X)$ en général; cependant si $H\in L(X)$, alors $\tilde{H} = H1_{(\mathcal{J}^p(\Delta X)\setminus\mathcal{J}(\Delta X))^c}$ est dans $\tilde{L}(X)$ et $\tilde{H}\circledast X = H\odot X$: donc l'ensemble $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X) = \{H\circledast X\colon H\in\tilde{L}(X)\}$ contient l'ensemble $\underline{\underline{L}}(X) = \{H\odot X\colon H\in L(X)\}$. En fait on a $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X) = \underline{\underline{L}}(X) + \hat{\underline{\underline{L}}}(\mathcal{J}^p(\Delta X)\setminus\mathcal{J}(\Delta X))$, où $\hat{\underline{\underline{L}}}(D)$ désigne l'ensemble des éléments $Y\in\underline{\underline{H}}^1$ vérifiant $Y^c = 0$ et $\Delta Y = 0$ en dehors de D. Remarquons que si X est quasi-continu à gauche, $\tilde{L}(X) = L(X)$ et $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X) = \underline{\underline{L}}(X)$.

La terminologie "intégrale stochastique" pour désigner $H\circledast X$ est sans doute un peu tirée par les cheveux; malgré tout, nous allons voir que cette intégrale stochastique présente de meilleure propriétés de stabilité que l'intégrale $H\odot X$. Par exemple, on va lui associer une notion "d'orthogonalité" comme suit:

On dit que $X, Y\in\underline{\underline{L}}$ sont <u>fortement orthogonales</u> (Pratelli [8]) si $\langle X^c, Y^c\rangle = 0$, et si les ensembles $\mathcal{J}(\Delta X)\cup\mathcal{J}^p(\Delta X)$ et $\mathcal{J}(\Delta Y)\cup\mathcal{J}^p(\Delta Y)$ sont disjoints (il suffit d'ailleurs pour cela que, par exemple, $\Delta Y = 0$ sur $\mathcal{J}(\Delta X)\cup\mathcal{J}^p(\Delta X)$). La première partie de la proposition suivante est montrée dans [8], du moins lorsque les martingales locales sont dans $\underline{\underline{M}}_{loc}$.

PROPOSITION 2: <u>Pour que</u> X <u>et</u> Y <u>soient fortement orthogonales, il faut et il suffit que</u> $[H\odot X, Y] = 0$ <u>pour tout</u> $H\in L_{loc}(X)$. <u>Dans ce cas,</u> $H\circledast X$ <u>et</u> $K\circledast Y$ <u>sont fortement orthogonales pour tous</u> $H\in\tilde{L}_{loc}(X)$ <u>et</u> $K\in\tilde{L}_{loc}(Y)$, <u>et en particulier</u> $[H\circledast X, K\circledast Y] = 0$.

<u>Démonstration</u>: Soient X et Y fortement orthogonales, et $H\in\tilde{L}_{loc}(X)$, $K\in\tilde{L}_{loc}(Y)$. On a $\langle (H\circledast X)^c, (K\circledast Y)^c\rangle = HK\bullet\langle X^c, Y^c\rangle = 0$; de plus

$\mathcal{S}[\Delta(H\circledast X)] \bigcup \mathcal{S}^p[\Delta(H\circledast X)] \subset \mathcal{S}(\Delta X) \bigcup \mathcal{S}^p(\Delta X)$, et on a une relation analogue pour $K\circledast Y$, d'où on déduit l'orthogonalité forte de $H\circledast X$ et $K\circledast Y$.

Supposons inversement que $[H\odot X, Y] = 0$ pour tout $H \in L_{loc}(X)$. Alors $\langle X^c, Y^c\rangle = 0$ et $\mathcal{S}(\Delta X) \bigcap \mathcal{S}(\Delta Y) = \emptyset$ (car $[X,Y] = 0$). Soit T un temps prévisible tel que $[\![T]\!] \subset \mathcal{S}^p(\Delta X)$, et $H = 1_{[\![T]\!]} 1_{\mathcal{S}(\Delta X)} \frac{1}{\Delta X}$: on a $H\Delta X - {}^p(H\Delta X) = 1_{[\![T]\!]}(1_{\mathcal{S}(\Delta X)} - P(\Delta X_T \neq 0 | \mathcal{F}_{T-}))$, donc $H \in L(X)$ et $N = H\odot X$ vérifie $\Delta N_T = -P(\Delta X_T \neq 0 | \mathcal{F}_{T-}) < 0$ sur $\{T \in \mathcal{S}^p(\Delta X) \setminus \mathcal{S}(\Delta X)\}$. Comme $[N,Y] = 0$, on a $\Delta Y_T = 0$, et finalement $\Delta Y = 0$ sur $\mathcal{S}^p(\Delta X) \setminus \mathcal{S}(\Delta X)$. ∎

On dit qu'un sous-espace $\underline{\underline{N}}$ de $\underline{\underline{L}}$ est <u>fortement stable</u> (resp. <u>très fortement stable</u>) si $\underline{\underline{N}} \bigcap \underline{\underline{H}}^1$ est fermé dans $\underline{\underline{H}}^1$, et si pour tout $X \in \underline{\underline{N}}$ et tout $H \in L_{loc}(X)$ (resp. $\tilde{L}_{loc}(X)$), on a $H\odot X \in \underline{\underline{N}}$ (resp. $H\circledast X \in \underline{\underline{N}}$).

PROPOSITION 3: <u>Tout sous-espace fortement stable est très fortement stable</u>.

<u>Démonstration</u>: Etant donné que $\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(X) = \underline{\underline{L}}_{loc}(X) + \hat{\underline{\underline{L}}}_{loc}(D)$, où $D = \mathcal{S}^p(\Delta X) \setminus \mathcal{S}(\Delta X)$, il suffit de montrer que tout $Z \in \hat{\underline{\underline{L}}}_{loc}(D)$ peut s'écrire $Z = K\odot(H\odot X)$ où $H \in L_{loc}(X)$ et $K \in L_{loc}(H\odot X)$. Posons $a = {}^p(1_{\mathcal{S}(\Delta X)})$, qui vérifie $0 < a < 1$ sur D. Il est facile de trouver un processus prévisible strictement positif F tel que $b(F(1_{\mathcal{S}(\Delta X)} - a)) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. On pose alors $H = 1_{\mathcal{S}(\Delta X)} \frac{F}{\Delta X} \in L_{loc}(X)$ puisque $H\Delta X - {}^p(H\Delta X) = F(1_{\mathcal{S}(\Delta X)} - a)$. Soient $Y = H\odot X$ et $K = -1_D \frac{\Delta Z}{aF}$: on a $K\Delta Y = 1_D \Delta Z = \Delta Z$, ${}^p(K\Delta Y) = 0$, donc $K \in L_{loc}(Y)$ et $K\odot Y = Z$, d'où le résultat. ∎

Nous allons maintenant passer à l'étude d'un autre type d'intégrales stochastiques: les intégrales par rapport à une mesure aléatoire, introduites en [3]. En effet la décomposition obtenue en [3] permet de démontrer sans trop d'efforts certains résultats intéressants sur les intégrales optionnelles précédentes. Mais auparavant, et afin de motiver à la poursuite de la lecture, nous énonçons un théorème (qui sera démontré plus tard):

THEOREME 2: (a) <u>Si</u> $X \in \underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{L}}(X)$ <u>et</u> $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X)$ <u>sont fermés dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$, <u>et</u> $\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(X)$ <u>est l'espace fortement stable engendré par</u> X.

(b) <u>Si</u> $X, Y \in L$, <u>on a la décomposition unique suivante</u>:

(2) $\qquad Y = H\odot X + Y', \quad H \in L_{loc}(X), \quad [Y', X] = 0.$

(c) Si $X, Y \in \underline{\underline{L}}$, on a la décomposition unique suivante:

(3) $Y = H \circledast X + Y'$, $H \in \tilde{L}_{loc}(X)$, X et Y' fortement orthogonales.

c - Intégrales par rapport à une mesure aléatoire.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace lusinien muni de ses boréliens. Soient $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0,\infty[\times E$, et $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$. Une mesure aléatoire est une mesure de transition positive $\mu(\omega;dt,dx)$ de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(]0,\infty[\times E, \mathcal{B}(]0,\infty[) \otimes \mathcal{E})$ et pour toute application $W : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ on définit le processus $W*\mu$ par $W*\mu_t(\omega) = \int_0^t \int_E W(\omega,s,x)\mu(\omega;ds,dx)$ ($=+\infty$ si cette expression n'a pas de sens). On dit que μ est prévisible si $W*\mu$ est prévisible pour tout $W \geq 0$, $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable. La formule $M_\mu(W) = E(W*\mu_\infty)$ définit une mesure positive sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{O}})$. On note $\mathcal{X}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{O}}$-mesurables W telles que la mesure $W.M_\mu$ soit $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finie: si $W \in \mathcal{X}(\mu)$ on peut évidemment prendre "l'espérance conditionnelle" $M_\mu(W|\tilde{\mathcal{P}})$.

On considère alors une mesure μ de la forme

$$\mu(\omega;dt,dx) = \sum_{(s)} 1_D(\omega,s)\,\varepsilon_{(s,\alpha_s(\omega))}(dt,dx),$$

où $D \in \mathcal{O}$, où α est un processus optionnel à valeurs dans E, et telle que M_μ soit $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finie: on dit que μ est une mesure à valeurs entières. De même que pour $\delta(X)$, on définit les parties "accessible" D^a et "totalement inaccessible" D^i de l'ensemble mince D, ainsi que la plus petite partie prévisible D^p contenant D^a.

On sait qu'il existe une mesure prévisible unique ν, dite projection prévisible duale de μ, telle que les mesures M_μ et M_ν coïncident sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{P}})$. Afin d'alléger les notations, on pose

$$\hat{W}_t(\omega) = \int_E W(\omega,t,x)\nu(\omega,\{t\},dx), \qquad a_t(\omega) = \nu(\omega;\{t\}\times E) \quad (=\hat{1}_t(\omega))$$

dès que cette expression a un sens. On sait que $D^p = \{a>0\}$, tandis que $D^p \setminus D = \{0<a<1\}$. Par ailleurs si W est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable, on a

$$\hat{W}_T = E(1_D(T)W(T,\alpha_T)|\mathcal{F}_{T-}) \quad \text{sur} \quad \{T<\infty\}$$

pour tout temps prévisible.

Voici alors comment, en suivant [3], on construit deux types d'intégrales stochastiques par rapport à μ :

(i)- Si W est une fonction $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable, on pose

$$W' = (W-\hat{W})1_{\{|W-\hat{W}|>1\}} + \hat{W}1_{\{|\hat{W}|>1\}}, \qquad W'' = W - W',$$
$$C(W) = (1_{\{a=0\}}(|W'| + W''^2))*\nu$$
$$+ \sum_{s\leq \cdot}((\widehat{W''^2})_s - (\widehat{W''_s})^2 + \widehat{|W'-\hat{W'}|}_s + (1-a_s)|\widehat{W'_s}|),$$

en faisant la convention $C_t(W) = +\infty$ dès que l'un des termes ci-dessus n'est pas défini. Soit $\mathcal{G}_{loc}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurables W telles que $C(W) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Si $W \in \mathcal{G}_{loc}(\mu)$ il existe un élément et un seul de $\underline{\underline{L}}^d$, noté $W*(\mu-\nu)$, tel que

(4) $$\Delta(W*(\mu-\nu))_t = 1_D(t)W(t,\alpha_t) - \hat{W}_t.$$

(ii)- Si $V \in \mathcal{K}(\mu)$ vérifie $M_\mu(V|\tilde{\mathcal{P}}) = 0$, on pose

$$V' = V1_{\{|V|>1\}} - M_\mu(V1_{\{|V|>1\}}|\tilde{\mathcal{P}}), \quad V'' = V - V'.$$

On note $\mathcal{H}_{loc}(\mu)$ l'ensemble des $V \in \mathcal{K}(\mu)$ tels que $M_\mu(V|\tilde{\mathcal{P}}) = 0$ et que $(V''^2 + |V'|)*\mu \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, et si $V \in \mathcal{H}_{loc}(\mu)$ il existe un élément et un seul de $\underline{\underline{L}}^d$, noté $V*\mu$, tel que

(5) $$\Delta(V*\mu)_t = 1_D(t)V(t,\alpha_t).$$

De plus, dans les deux cas (i) et (ii), l'intégrale stochastique coïncide avec "l'intégrale par trajectoire" lorsque cette dernière existe.

<u>Remarque</u>: Là encore, on pourrait définir directement $W*(\mu-\nu)$ et $V*\mu$ à l'aide du théorème 1, en utilisant (4) et (5). Soit donc Y le processus défini par le second membre de (4) (resp. (5)): il faut montrer que ${}^pY = 0$ (ce qui n'est pas difficile), et que $b(Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Dans le cas (ii) il est facile de voir que $\mathcal{H}_{loc}(\mu)$ est exactement l'ensemble des V tels que $M_\mu(V|\tilde{\mathcal{P}}) = 0$ et $b(Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Dans le cas (i) par contre, montrer que $b(Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ revient en gros à recopier la construction de [3]: cependant on verra que, là encore, $\mathcal{G}_{loc}(\mu)$ est l'ensemble des W tels que $b(Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. ■

Le théorème suivant, montré dans [3], joue un rôle essentiel:

THEOREME 3: <u>Soit</u> $X \in \underline{\underline{L}}$. <u>Alors</u> $\Delta X \in \mathcal{K}(\mu)$ <u>et si</u> $U = M_\mu(\Delta X|\tilde{\mathcal{P}})$, $V = \Delta X - U$ <u>et</u> $W = U + \frac{\hat{U}}{1-a}1_{\{a<1\}}$ <u>on a</u> $V \in \mathcal{H}_{loc}(\mu)$, $W \in \mathcal{G}_{loc}(\mu)$, <u>et</u>

(6) $$X = W*(\mu-\nu) + V*\mu + Y,$$

<u>où</u> $Y \in \underline{\underline{L}}$ <u>vérifie</u> $\Delta Y = 0$ <u>sur</u> D.

On note $\underline{\underline{L}}^1(\mu)$ (resp. $\underline{\underline{L}}^2(\mu)$) l'ensemble des $W*(\mu-\nu)$ (resp. $V*\mu$) appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$, avec $W \in \mathcal{G}_{loc}(\mu)$ (resp. $V \in \mathcal{H}_{loc}(\mu)$).

Soient également $\underline{\underline{L}}^3(\mu)$ (resp. $\underline{\underline{L}}^4(\mu)$) l'ensemble des $X \in \underline{\underline{H}}^1 \cap \underline{\underline{L}}^d$ (resp. $\underline{\underline{H}}^1$) vérifiant $\Delta X = 0$ sur $(D^p \setminus D)^c$ (resp. sur $D^p \cup D$). Remarquons que $\underline{\underline{L}}^3(\mu)$ et $\underline{\underline{L}}^4(\mu)$ ne dépendent en réalité que de D, et avec les notations du paragraphe précédent, on a $\underline{\underline{L}}^3(\mu) = \hat{\underline{\underline{L}}}(D^p \setminus D)$. Plus que par les espaces $\underline{\underline{L}}^i(\mu)$ eux-mêmes, nous seront en fait intéressés par $\underline{\underline{L}}(\mu) = \underline{\underline{L}}^1(\mu) + \underline{\underline{L}}^2(\mu)$ et $\tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu) = \underline{\underline{L}}(\mu) + \underline{\underline{L}}^3(\mu)$.

<u>Remarque</u>: On pourrait donner une définition directe de $\underline{\underline{L}}(\mu)$: c'est l'ensemble des $X \in \underline{\underline{H}}^1 \cap \underline{\underline{L}}^d$ caractérisés par $\Delta X_t = 1_D(t)U(t,\alpha_t) - \hat{U}_t$, où $U \in \mathcal{X}(\mu)$ vérifie $M_\mu(U|\tilde{\mathcal{P}}) \in \mathcal{G}_{loc}(\mu)$ et $U - M_\mu(U|\tilde{\mathcal{P}}) \in \mathcal{H}_{loc}(\mu)$. ∎

On peut alors préciser le théorème 3 de la manière suivante:

THEOREME 4: (a) <u>Les espaces</u> $\underline{\underline{L}}^i(\mu)$, $i \leq 4$, <u>sont fermés dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

(b) <u>Tout</u> $X \in \underline{\underline{L}}$ <u>s'écrit de manière unique comme</u>

$$X = X^1 + X^2 + X^3 + X^4, \quad X^i \in \underline{\underline{L}}^i_{loc}(\mu). \tag{7}$$

<u>Remarque</u>: En d'autres termes, $\underline{\underline{L}}$ est la somme directe des espaces $\underline{\underline{L}}^i_{loc}(\mu)$. On ne sait pas montrer la même chose pour $\underline{\underline{H}}^1$ et les $\underline{\underline{L}}^i(\mu)$: plus précisément si $X \in \underline{\underline{H}}^1$, on vérifie aisément que sa décomposition (7) satisfait $X^2 \in \underline{\underline{L}}^2(\mu)$ et $X^4 \in \underline{\underline{L}}^4(\mu)$; par contre on ne sait pas montrer que $X^1 \in \underline{\underline{L}}^1(\mu)$ et $X^3 \in \underline{\underline{L}}^3(\mu)$.

Dans le même ordre d'idées, il est facile de voir que les espaces $\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu)$ et $\underline{\underline{L}}^4_{loc}(\mu)$ sont orthogonaux (et même fortement orthogonaux), et de même les espaces $\underline{\underline{L}}^3_{loc}(\mu)$ et $\underline{\underline{L}}^2_{loc}(\mu)$. Dans [3] il est également montré que $\underline{\underline{L}}^1_{loc}(\mu) \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$ est orthogonal aux espaces $\underline{\underline{L}}^2_{loc}(\mu) \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $\underline{\underline{L}}^3_{loc}(\mu) \cap \underline{\underline{M}}_{loc}$; mais nous ne savons pas montrer que $\underline{\underline{L}}^1_{loc}(\mu)$ est orthogonal à $\underline{\underline{L}}^2_{loc}(\mu)$ et $\underline{\underline{L}}^3_{loc}(\mu)$. ∎

<u>Démonstration</u>: (i) Soit $X \in \underline{\underline{L}}$. On a la décomposition (6) et ${}^p(1_{D^p \setminus D}\Delta Y) = {}^p(1_{D^p}\Delta Y) = 1_{D^p}\,{}^p(\Delta Y) = 0$, tandis que $b(1_{D^p \setminus D}\Delta Y) \leq b(\Delta Y) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$: donc il existe $X^3 \in \underline{\underline{L}}^d$ unique tel que $X^3 = 1_{D^p \setminus D}\Delta Y$, et il reste à poser $X^1 = W*(\mu - \nu)$, $X^2 = V*\mu$ et $X^4 = Y - X^3$ pour obtenir la formule (7).

(ii) Montrons maintenant que les $\underline{\underline{L}}^i(\mu)$ sont fermés. Si $X(n)$ tend vers X dans $\underline{\underline{H}}^1$ on sait qu'on peut extraire une sous-suite, notée encore $X(n)$, telle que $\Delta X(n)_T \longrightarrow \Delta X_T$ P-ps et dans L^1 pour tout temps d'arrêt: il est très facile d'en déduire que $\underline{\underline{L}}^3(\mu)$ et $\underline{\underline{L}}^4(\mu)$ sont fermés dans $\underline{\underline{H}}^1$, et que dans la décomposition (7) de X on a $X^4=0$ si $X(n)\in\tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu)$ pour tout n. Il nous reste à vérifier que si $X(n)\in\underline{\underline{L}}^1(\mu)$ (resp. $\underline{\underline{L}}^2(\mu)$) pour tout n, alors $X=X^1$ (resp. $X=X^2$) et donc, par localisation, on peut supposer que X^1, X^2, $X^3\in\underline{\underline{H}}^1$. On note enfin $X^1=W*(\mu-\nu)$ et $X^2=V*\mu$.

Supposons d'abord que $X(n)=W(n)*(\mu-\nu)$. Les sauts de M^3 peuvent être épuisés par une suite de temps d'arrêt prévisibles T tels que $[T]\subset D^p$ et $a_T<1$ sur $\{T<\infty\}$; soit T un tel temps d'arrêt: on a $\Delta X^3_T=1_{\{T\notin D\}}(\hat{W}_T-\lim\hat{W}(n)_T)$, la limite étant P-ps et dans L^1; en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{T-}$, on trouve $0=(1-a_T)(\hat{W}_T-\lim\hat{W}(n)_T)$. Par suite $\hat{W}(n)_T$ tend vers $\hat{W}_T$ et $\Delta X^3_T=0$, ce qui implique $X^3=0$. Mais alors pour tout temps d'arrêt T, $\lim(1_D(T)W(n)(T,\alpha_T)-\hat{W}(n)_T)=1_D(T)(W(T,\alpha_T)+V(T,\alpha_T))-\hat{W}_T$, ce qui montre que $W(n)-\hat{W}(n)$ tend M_μ-ps vers $W+V-\hat{W}$; mais alors V est mesurable par rapport à la complétée de $\tilde{\mathcal{P}}$ pour M_μ, alors que $M_\mu(V|\tilde{\mathcal{P}})=0$: donc $V=0$ M_μ-ps, $X^2=0$ et $X=X^1$.

Supposons maintenant que $X(n)=V(n)*\mu$. Si T est prévisible et vérifie $a_T<1$ sur $\{T<\infty\}$, on a $0=\lim 1_{\{T\notin D\}}\Delta X(n)_T=1_{\{T\notin D\}}(\Delta X^3_T-\hat{W}_T)$, d'où, comme ci-dessus, $\Delta X^3_T=0$; par suite $X^3=0$. Par ailleurs (cf. [3], proposition (2.4)) il existe une suite (S_p) de temps d'arrêt telle que $D=\bigcup[\![S_p]\!]$ et $E[\Delta X(n)_{S_p}|\mathcal{F}_{S_p-}\vee\sigma(\alpha_{S_p})]=0$ puisque $X(n)\in\underline{\underline{L}}^2(\mu)$. Donc $E[\Delta X_{S_p}|\mathcal{F}_{S_p-}\vee\sigma(\alpha_{S_p})]=0$ et on en déduit (toujours d'après [3]) que $W*(\mu-\nu)=0$: donc $X^1=0$ et $X=X^2$.

(iii) Il faut maintenant montrer l'unicité de la décomposition (7), c'est-à-dire que $X^i=0$ $\forall i\leq 4$ si $X=\sum X^i=0$. Mais alors $(X^4)^c=X^c=0$ et $\Delta X^4=0$, donc $X^4=0$. Si on reprend la preuve de la fermeture de $\underline{\underline{L}}^1(\mu)$, par exemple, en posant $X(n)=0\in\underline{\underline{L}}^1(\mu)$ pour tout n, on voit d'abord que $X^3=X^2=0$, puis $X^1=X=0$. ∎

PROPOSITION 4: <u>L'espace $\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu)$ est fortement stable</u>.

<u>Démonstration</u>: Si $X(n)\in\tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu)$ tend vers X on a $X^c=0$ et $\Delta X=0$ en dehors de $D\cup D^p$, donc le terme X^4 de la décomposition (7) de X est nul et $X\in\tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu)$. Soit maintenant $X\in\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu)$, $H\in\tilde{L}_{loc}(X)$ et $Y=H\circledast X$. On a $Y^c=H\bullet X^c=0$, tandis que $\Delta Y=0$ en dehors de $D\cup D^p$, donc là encore le terme Y^4 de la décomposition (7) de Y est nul, et $Y\in\tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu)$. ∎

d - Espaces fortement stables de martingales.

Soit $X \in \underline{\underline{L}}$. On sait que ${}^p\underline{\underline{L}}(X^c) = \underline{\underline{L}}(X^c) = \tilde{\underline{\underline{L}}}(X^c)$, donc il nous reste à étudier ${}^p\underline{\underline{L}}(X^d)$, $\underline{\underline{L}}(X^d)$ et $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X^d)$. De même si $X \in \underline{\underline{L}}^c$ on sait que tout $Y \in \underline{\underline{L}}$ admet des décompositions (1), (2) et (3), ces décompositions étant d'ailleurs identiques (il suffit en effet de décomposer Y^c selon X). Enfin si $\underline{\underline{N}} \subset \underline{\underline{L}}$, soient $\underline{\underline{N}}^c = \{N^c : N \in \underline{\underline{N}}\}$ et $\underline{\underline{N}}^d = \{N^d : N \in \underline{\underline{N}}\}$; il est facile de voir que les espaces (fortement) stables engendrés par $\underline{\underline{N}}^c$ et $\underline{\underline{N}}^d$ sont fortement orthogonaux et que leur somme directe égale l'espace (fortement) stable engendré par $\underline{\underline{N}}$; par ailleurs les espaces stable et fortement stable engendrés par $\underline{\underline{N}}^c$ sont égaux, et leur structure est bien connue (voir par exemple Meyer [7]). Autrement dit, il reste à étudier les éléments de $\underline{\underline{L}}^d$ et les espaces fortement stables qu'ils engendrent.

Commençons par le cas d'une martingale locale X. On pose

(8) $$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{(s)} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx),$$

ce qui définit une mesure aléatoire à valeurs entières (avec $D = \delta(\Delta X)$ et $\alpha = \Delta X$), sur $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La proposition suivante montre qu'il est équivalent de parler d'intégrale optionnelle par rapport à $X \in \underline{\underline{L}}^d$, ou d'intégrale stochastique par rapport à la mesure μ qui lui est associée par (8).

PROPOSITION 5: <u>On a</u> $\underline{\underline{L}}(X^d) = \underline{\underline{L}}(\mu)$ <u>et</u> $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X^d) = \tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu)$ (et donc, $\underline{\underline{L}}(X)$ et $\tilde{\underline{\underline{L}}}(X)$ sont respectivement les sommes directes $\underline{\underline{L}}(\mu) + {}^p\underline{\underline{L}}(X^c)$ et $\tilde{\underline{\underline{L}}}(\mu) + {}^p\underline{\underline{L}}(X^c)$).

<u>Démonstration</u>: Comme $D = \delta(\Delta X)$, il suffit en fait de montrer que $\underline{\underline{L}}(X^d) = \underline{\underline{L}}(\mu)$. Soit $Y = W*(\mu - \nu) + V*\mu \in \underline{\underline{L}}_{loc}(\mu)$; si $H_t = 1_D(t)(W(t, \Delta X_t) + V(t, \Delta X_t))/\Delta X_t$, on a $\Delta Y = H\Delta X - {}^p(H\Delta X)$ d'après (4) et (5), donc $H \in L_{loc}(X)$ et $Y = H \circledcirc X \in \underline{\underline{L}}_{loc}(X)$.

Soit inversement $Y = H \circledcirc X \in \underline{\underline{L}}_{loc}(X^d)$. Si $Y = \sum Y^i$ est la décomposition (7) de Y, on aura terminé si on prouve que $Y^3 = Y^4 = 0$. Or $(Y^4)^c = Y^c = 0$, tandis que $\Delta Y^4 = 1_{(D^p \cup D)^c} \Delta Y = 0$, donc $Y^4 = 0$. Soit T un temps prévisible tel que $a_T < 1$ sur $\{T < \infty\}$: on a $\Delta Y^3_T = 1_{\{T \notin D\}}(\Delta Y_T - \Delta Y^1_T) = 1_{\{T \notin D\}}({}^p(H\Delta X)_T + \hat{W}_T)$ si $Y^1 = W*(\mu - \nu)$; en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{T-}$ on obtient $0 = (1 - a_T)({}^p(H\Delta X)_T + \hat{W}_T)$, d'où l'on déduit $\Delta Y^3_T = 0$; par suite $Y^3 = 0$. ∎

COROLLAIRE: <u>Les espaces</u> $\mathbf{L}(X)$ <u>et</u> $\tilde{\mathbf{L}}(X)$ <u>sont fermés dans</u> $\mathbf{H}^1$.

Passons maintenant au cas d'une famille $\mathbf{N} \subset \mathbf{L}$. On suppose que $\mathbf{N} = (N(i))_{i \in I}$ est une famille <u>finie ou dénombrable</u> d'éléments de $\mathbf{L}$. Soit $E = \mathbb{R}^I \setminus \{0\}$, muni de la tribu $E \cap (\mathcal{R}^{I\otimes})$. On considère le processus $\Delta\tilde{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^I$, de coordonnées $\Delta\tilde{N}(i) = \Delta N(i)$. Soit $D = \{\Delta\tilde{N} \neq 0\}$. La formule suivante définit une mesure à valeurs entières:

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{(s)} 1_D(\omega, s)\, \varepsilon_{(s, \Delta\tilde{N}_s(\omega))}(dt, dx). \tag{9}$$

On note ${}^p\mathbf{L}^s_{loc}(\mathbf{N})$ (resp. $\tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N})$) l'espace stable (resp. fortement stable) engendré par $\mathbf{N}$ (le lecteur est prié d'excuser cette notation barbare !)

THEOREME 5: (a) <u>On a</u> $\tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N}^d) = \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$ <u>et</u> $\tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N})$ <u>est la somme directe</u> ${}^p\mathbf{L}^s_{loc}(\mathbf{N}^c) + \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$.

(b) <u>Tout</u> $X \in \mathbf{L}$ <u>admet une décomposition unique</u> $X = X' + X''$ <u>avec</u> $X' \in \tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N})$ <u>et</u> X'' <u>fortement orthogonal à</u> $\tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N})$.

<u>Démonstration</u>: Soit $X \in \mathbf{L}$. On sait qu'il existe une décomposition unique $X^c = X'^c + X''^c$ avec $X'^c \in {}^p\mathbf{L}^s_{loc}(\mathbf{N}^c)$ et X''^c orthogonal (donc fortement orthogonal) à cet espace. Supposons alors $X \in \mathbf{L}^d$, et soit $X = \sum X^i$ sa décomposition (7). Si on pose $X' = X^1 + X^2 + X^3$ et $X'' = X^4$ on a $X' \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$ et X'' est fortement orthogonal à $\tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$; enfin l'unicité de (7) entraine l'unicité de cette décomposition $X = X' + X''$. Il nous reste alors à prouver (a).

Posons alors $U^i(\omega, t, x) = x^i$ ($i^{\text{ème}}$ coordonnée de $x \in E$). Il est clair que $\Delta N(i) = U^i$ M_μ-ps et $\hat{U}^i = {}^p(\Delta N(i)) = 0$, donc $U^i \in \mathcal{G}_{loc}(\mu)$ et $N(i)^d = U^i * (\mu - \nu)$ d'après le théorème 3. Donc $N(i) \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$ et d'après la proposition 4, on a $\tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N}^d) \subset \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$.

Lorsque $\mathbf{N}$ n'est constitué que d'un seul élément N, la proposition 5 entraine $\tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu) = \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(N^d) = \tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N}^d)$ et la démonstration est terminée. Passons au cas général: à chaque $N(i)$ on associe par (8) une mesure μ^i, et on pose $F_i = [\delta(\Delta N(i)) \cup \delta^p(\Delta N(i))]^c$ et $G_i = \bigcap_{j \leq i} F_i$. On a $\tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu^i) = \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(N(i)^d) \subset \tilde{\mathbf{L}}^s_{loc}(\mathbf{N}^d) \subset \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$. Soit $X \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$. D'après la première partie de la démonstration on a une décomposition $X = X'(1) + X''(1)$ avec $X'(1) \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu^1)$ et $\Delta X''(1) = 1_{F_1}\Delta X$, $X''(1) = X - X'(1) \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$. Par récurrence on construit une suite $(X'(i), X''(i))$ ainsi: si $X''(i) \in \tilde{\mathbf{L}}_{loc}(\mu)$ vérifie $\Delta X''(i) = 1_{G_i}\Delta X$ on a $X''(i) =$

$X'(i+1) + X''(i+1)$ avec $X'(i+1) \in \tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu^{i+1})$ et $\Delta X''(i+1) = 1_{F_{i+1}} \Delta X''(i) = 1_{G_{i+1}} \Delta X$. Si $Y(i) = \sum_{j \leq i} X'(i)$ on a $Y(i) \in \tilde{\underline{\underline{L}}}^s_{loc}(\underline{\underline{N}}^d)$, tandis que

$$[Y(i) - X, Y(i) - X] = 1_{G_i} \cdot [X,X].$$

Comme $\tilde{\underline{\underline{L}}}^s_{loc} \cap \underline{\underline{H}}^1$ est fermé et comme $\bigcap G_i = (D \cup D^p)^c$ alors que $[X,X] = 1_{D \cup D^p} \cdot [X,X]$ puisque $X \in \tilde{\underline{\underline{L}}}_{loc}(\mu)$, on en déduit facilement que $X \in \tilde{\underline{\underline{L}}}^s_{loc}(\underline{\underline{N}}^d)$, achevant ainsi la démonstration.■

Jusqu'à présent, on a montré les parties (a) et (c) du théorème 2. Il nous reste à montrer la partie (b):

PROPOSITION 6: <u>Si</u> $X, Y \in \underline{\underline{L}}$ <u>on a la décomposition unique suivante</u>

$$Y = H \odot X + Y', \quad H \in L_{loc}(X), \quad [X, Y'] = 0.$$

<u>Démonstration</u>: On sait qu'il existe $H' \in L^2_{loc}(X^c)$ tel que $Y^c = H' \cdot X^c + Y'^c$ avec $\langle X^c, Y'^c \rangle = 0$ et $H' = 0$ sur $\delta(\Delta X) \cup \delta^p(\Delta X)$. μ étant définie par (8) on considère la décomposition (7) $Y^d = \sum Y^i$ de Y^d. D'après la proposition 5 il existe $H'' \in L_{loc}(X^d)$ tel que $H'' = 0$ en dehors de $\delta(\Delta X) \cup \delta^p(\Delta X)$ et que $Y^1 + Y^2 = H'' \odot X^d$. Il reste à poser $H = H' + H''$, l'unicité provenant de l'unicité de la décomposition (7).■

<u>Remarque</u>: On pourrait montrer ce résultat (ainsi d'ailleurs que (3)) sans passer par l'intermédiaire du théorème 4 (et donc des mesures aléatoires). Le problème revient alors à choisir H. On peut prendre

$$H = 1_{\delta(\Delta X)^c} \frac{d\langle Y^c, X^c \rangle}{d\langle X^c, X^c \rangle} + 1_{\delta(\Delta X)} \frac{1}{\Delta X}\left(\Delta Y + 1_{\{a<1\}} \frac{{}^p(\Delta Y 1_{\delta(\Delta X)})}{1 - a}\right),$$

où $a = {}^p(1_{\delta(\Delta X)})$ (on remarque qu'on a alors $a_t = \nu(\{t\} \times E)$, si ν est la projection prévisible duale de la mesure μ associée à X). Mais, montrer que $H \in L_{loc}(X)$ revient en fait à recopier la démonstration (assez longue) du théorème 3.■

<u>3 - SEMI-MARTINGALES</u>

<u>a - Caractérisation des sauts d'une semi-martingale</u>.

On note $\underline{\underline{S}}$ l'ensemble des semi-martingales nulles à l'origine (i.e. des sommes $X = M + A$ où $M \in \underline{\underline{L}}$ et $A \in \underline{\underline{V}}$), et $\underline{\underline{S}}_s$ l'ensemble des semi-martingales <u>spéciales</u>, c'est-à-dire qui admettent une décomposition

$X = M + A$ avec $M \in \underline{\underline{L}}$ et $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. On sait (cf. par exemple [6]) que tout $X \in \underline{\underline{S}}_s$ admet une décomposition et une seule, dite <u>canonique</u>, $X = M + A$ avec $M \in \underline{\underline{L}}$ et $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ <u>prévisible</u>, et on note $\check{X}$ la "partie continue" du processus à variation finie A. Si $X \in \underline{\underline{S}}$ on connait également la partie "martingale continue" X^c de X, et on pose

$$\underline{\underline{D}}(X) = \{D \in \mathcal{O} : a(1_D \Delta X) \in \underline{\underline{V}},\ X^D = X - a(1_D \Delta X) \in \underline{\underline{S}}_s\}.$$

On sait [4] que pour tout $c > 0$, $\{|\Delta X| > c\} \in \underline{\underline{D}}(X)$.

Par ailleurs pour tout processus optionnel Y on pose

$$\underline{\underline{E}}(Y) = \{D \in \mathcal{O} : a(1_D Y) \in \underline{\underline{V}},\ b(Y 1_{D^c}) \in \underline{\underline{A}}_{loc},\ a({}^p(Y 1_{D^c})) \in \underline{\underline{V}}\}$$

et on note $\underline{\underline{K}}$ l'ensemble des processus optionnels Y tels que $\underline{\underline{E}}(Y) \neq \emptyset$. Le théorème suivant jouera vis-à-vis de l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale le même rôle que le théorème 1 dans la partie 2.

THEOREME 6: (a) <u>Soit</u> Y <u>un processus optionnel. Pour qu'il existe</u> $X \in \underline{\underline{S}}$ <u>avec</u> $\Delta X = Y$, <u>il faut et il suffit qu'il appartienne à</u> $\underline{\underline{K}}$, <u>et dans ce cas on a</u> $\underline{\underline{E}}(Y) = \underline{\underline{D}}(\Delta X)$.

(b) <u>Soient</u> $Y \in \underline{\underline{K}}$, $N \in \underline{\underline{L}}^c$, $A \in \underline{\underline{V}}^c$. <u>Pour tout</u> $D \in \underline{\underline{E}}(Y)$ <u>il existe un</u> $X \in \underline{\underline{S}}$ <u>et un seul tel que</u> $\Delta X = Y$, $X^c = N$, $\check{X}^D = A$ (rappelons que $\check{X}^D$ est la partie continue du processus prévisible de $\underline{\underline{V}}$ intervenant dans la décomposition canonique de la semi-martingale spéciale X^D).

<u>Démonstration</u>: (i) Soient $X \in \underline{\underline{S}}$, $Y = \Delta X$, $D \in \underline{\underline{D}}(X)$. On a $a(1_D Y) \in \underline{\underline{V}}$. Soit $X^D = M + A$ la décomposition canonique de X^D. D'une part $a(\Delta A) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, d'autre part $b(\Delta M) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ d'après le théorème 1, donc le lemme 1 entraine $b(\Delta X^D) = b(Y 1_{D^c}) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Par ailleurs ${}^p(\Delta X^D) = \Delta A$ donc $a({}^p(Y 1_{D^c})) \in \underline{\underline{V}}$. On a donc $D \in \underline{\underline{E}}(Y)$ et $Y \in \underline{\underline{K}}$.

(ii) Soient $X \in \underline{\underline{S}}$, $Y = \Delta X$, $D \in \underline{\underline{E}}(Y)$. On a $a(Y 1_D) = a(1_D \Delta X) \in \underline{\underline{V}}$ et $X^D \in \underline{\underline{S}}$. Soit $X^D = M + A$ une décomposition où $M \in \underline{\underline{L}}$ et $A \in \underline{\underline{V}}$. Si (T_n) est une suite localisante à la fois pour M et pour le processus à variation localement intégrable $b(Y 1_{D^c})$, et si $R_n = \inf(t : |X^D|_t \geq n)$, on a $E(\int_0^{T_n \wedge R_n} |dA_s|) < \infty$, d'où l'on déduit $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Par suite $X^D \in \underline{\underline{S}}_s$ et $D \in \underline{\underline{D}}(X)$.

(iii) Soient $N \in \underline{\underline{L}}^c$, $Y \in \underline{\underline{K}}$, $A \in \underline{\underline{V}}^c$ et $D \in \underline{\underline{E}}(Y)$. Comme $a({}^p(Y 1_{D^c})) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ on a $b({}^p(Y 1_{D^c})) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et si $Z = Y 1_{D^c} - {}^p(Y 1_{D^c})$, on a ${}^p Z = 0$

et $b(Z) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Le théorème 1 entraine l'existence de $M \in \underline{\underline{L}}^d$ avec $\Delta M = Z$. Soit

$$X = M + N + a({}^p(Y1_{D^c})) + a(Y1_D) ;$$

il est clair que X est une semi-martingale vérifiant $X^c = N$, $\Delta X = Y$ et $\check{X}^D = A$. Enfin l'unicité d'un tel X est évidente.∎

COROLLAIRE 1: <u>Soient</u> $Y \in \underline{\underline{K}}$, $D, D' \in \underline{\underline{E}}(Y)$. <u>Alors</u> $a(Y(1_D - 1_{D'})) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. <u>Si de plus</u> $X \in \underline{\underline{S}}$ <u>vérifie</u> $\Delta X = Y$, <u>on a</u> $\check{X}^D - \check{X}^{D'} = a(1_{\delta^i(Y)} Y(1_{D'} - 1_D))^p$.

<u>Démonstration</u>: Comme $Y \in \underline{\underline{K}}$ il existe $X \in \underline{\underline{S}}$ avec $\Delta X = Y$. Soient $X^D = M + A$ et $X^{D'} = M' + A'$ les décompositions canoniques de X^D et $X^{D'}$. On a $X^D - X^{D'} = a(Y(1_{D'} - 1_D))$, donc $M - M' = A' - A + a(Y(1_{D'} - 1_D)) \in \underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{A}}_{loc}$: on en déduit la première partie de l'énoncé. On en déduit également que $A - A' = a(Y(1_{D'} - 1_D))^p$; comme $\check{X}^D - \check{X}^{D'}$ est la partie continue de $A - A'$, on obtient ainsi la fin du corollaire.∎

COROLLAIRE 2: <u>Si</u> $(Y_i)_{i \leq n}$ <u>est une famille d'éléments de</u> $\underline{\underline{K}}$ <u>et si</u> $c_i > 0$ <u>pour tout</u> i, <u>on a</u> $\bigcup_{(i)} \{|Y_i| > c_i\} \in \bigcap_{(i)} \underline{\underline{E}}(Y_i)$.

<u>Démonstration</u>: Soit $D_i = \{|Y_i| > c_i\}$. D'après le théorème 6 on a $D_i \in \underline{\underline{E}}(Y_i)$. Mais si $D = \bigcup D_i$, il est facile de voir que presque toutes les coupes de D sont discrètes dans $[0,\infty[$ et donc $a(Y_i 1_D) \in \underline{\underline{V}}$; comme $D_i \subset D$ il est facile d'en déduire que $D \in \underline{\underline{E}}(Y_i)$.∎

<u>b - Intégrales prévisibles.</u>

Soit $X \in \underline{\underline{S}}$. On cherche à construire l'intégrale stochastique $H \cdot X$ pour des processus prévisibles H les plus généraux possibles. Il est naturel de considérer une décomposition $X = M + A$ avec $M \in \underline{\underline{L}}$ et $A \in \underline{\underline{V}}$, et dans ce cas on impose $H \in {}^pL_{loc}(M)$ et l'intégrabilité de H par rapport à A, i.e. $H \cdot A \in \underline{\underline{V}}$; on pose alors $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$, mais il faut vérifier que ce processus ne dépend pas de la décomposition de X choisie, ce qui est par exemple le cas lorsque H est localement borné [6]. Il se peut également que cette construction marche pour certaines décompositions et pas pour d'autres. Enfin on veut que $H \cdot X \in \underline{\underline{S}}$ et que $\Delta H \cdot X = H \Delta X$, donc d'après le corollaire 2 ci-dessus on a $\underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H \Delta X) \neq \emptyset$.

Compte tenu de ces remarques, il est naturel de poser:

$$^{p}\mathcal{L}(X) = \{H \text{ prévisible: } H^2\bullet\langle X^c,X^c\rangle \in \underline{\underline{V}},\ H\Delta X \in \underline{\underline{K}},\ \exists\, D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X) \text{ avec } H\bullet\check{X}^D \in \underline{\underline{V}}\}.$$

Soient alors $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ et $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ tel que $H\bullet\check{X}^D \in \underline{\underline{V}}$; d'après le théorème 6 il existe un $Y \in \underline{\underline{S}}$ et un seul vérifiant

$$Y^c = H\bullet X^c, \quad \Delta Y = H\Delta X, \quad \check{Y}^D = H\bullet\check{X}^D,$$

et on note $H \overset{D}{*} X$ cette semi-martingale.

PROPOSITION 7: <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{S}}$ <u>et</u> $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$. <u>On a</u> $H\bullet\check{X}^D \in \underline{\underline{V}}$ <u>pour tout</u> $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ <u>et les processus</u> $H \overset{D}{*} X$ <u>prennent une valeur commune, notée</u> $H*X$, <u>lorsque</u> D <u>parcourt</u> $\underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$.

<u>Démonstration</u>: On fixe $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ tel que $H\bullet\check{X}^D \in \underline{\underline{V}}$ et on pose $Y = H \overset{D}{*} X$. Soit $D' \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$. Il nous faut montrer que $H\bullet\check{X}^{D'} \in \underline{\underline{V}}$ et que $Y' = H \overset{D'}{*} X$ vérifie $Y' = Y$.

Posons $C = a(1_{\{i(\Delta X)}X(1_{D'}-1_D))$. D'après le corollaire 1 appliqué à ΔX et à $H\Delta X$ on voit que $C \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et $H\bullet C \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, donc $(H\bullet C)^p = H\bullet C^p \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Mais $\check{X}^D - \check{X}^{D'} = C^p$, d'où il découle que $H\bullet\check{X}^{D'} \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et Y est bien défini. Etant donné le théorème 6-(b) il nous suffit de vérifier que $\check{Y}^{D'} = \check{Y}'^{D'}$. Mais en utilisant les définitions de ces processus, le fait que $1_{\{i(H\Delta X)}H\Delta X = 1_{\{i(\Delta X)}H\Delta X$ et le corollaire 1 pour X et Y, on obtient

$$\check{Y}^{D'} = \check{Y}^D - (H\bullet C)^p = H\bullet(\check{X}^{D'} + C^p) - H\bullet C^p = H\bullet\check{X}^{D'} = \check{Y}'^{D'}. \blacksquare$$

En utilisant cette proposition et le corollaire 2, il est très facile de vérifier que

- $H,H' \in {}^{p}\mathcal{L}(X) \Rightarrow H + H' \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ et $(H + H')*X = H*X + H'*X$,
- $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)\cap{}^{p}\mathcal{L}(X') \Rightarrow H \in {}^{p}\mathcal{L}(X+X')$ et $H*(X + X') = H*X + H*X'$.

PROPOSITION 8: (a) <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{V}}$ <u>et</u> H <u>prévisible tel que</u> $H\bullet X \in \underline{\underline{V}}$. <u>Alors</u> $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ <u>et</u> $H*X = H\bullet X$.

(b) <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{L}}$ <u>et</u> $H \in {}^{p}L_{loc}(X)$. <u>Alors</u> $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ <u>et</u> $H*X = H\bullet X$.

(c) <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{S}}$ <u>et</u> H <u>prévisible localement borné. Alors</u> $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ <u>et</u> $H*X = H\bullet X$ (où $H\bullet X$ est l'intégrale définie en [6]).

<u>Démonstration</u>: (a) Si $X \in \underline{\underline{V}}$ et $H\bullet X \in \underline{\underline{V}}$ il est clair que $\hat{\Omega} = \Omega\times[0,\infty[\in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$; comme $X^{\hat{\Omega}} = \check{X}^{\hat{\Omega}}$ est la "partie continue" du processus à variation finie X, on a également $H\bullet\check{X}^{\hat{\Omega}} \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Par suite $H \in {}^{p}\mathcal{L}(X)$ et $H\bullet X$ satisfait clairement les relations de définition de $H*X$.

(b) Si $H \in {}^pL_{loc}(X)$ on a $H^2 \bullet \langle X^c, X^c\rangle \in \underline{\underline{V}}$ et $b(H\Delta X) \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, donc $\emptyset \in \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$. On a également $\emptyset \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)$ et $X^{\emptyset} = 0$, donc $\check{X}^{\emptyset} = 0$. Par suite $H \in {}^p\mathcal{X}(X)$. Enfin $H\bullet X$ vérifie clairement les relations de définition de $H \ast X$ avec $D = \emptyset$.

(c) Soit $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)$; comme H est localement borné, il est clair que $H^2 \bullet \langle X^c, X^c\rangle \in \underline{\underline{V}}$, que $D \in \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ et que $H \bullet \check{X}^D \in \underline{\underline{V}}$, donc $H \in {}^p\mathcal{X}(X)$. Enfin là encore, $H\bullet X$ vérifie les relations de définition de $H \ast X$. ∎

Compte tenu de cette proposition, on écrira désormais $H\bullet X$ au lieu de $H \ast X$.

c - Intégrales optionnelles.

On va maintenant généraliser le paragraphe précédent, en définissant une intégrale optionnelle $H\bullet X$ pour certains processus H, de sorte que cette intégrale coïncide avec l'intégrale de Stieltjes lorsque cette dernière existe: il ne s'agit donc pas d'une généralisation des intégrales optionnelles $H \odot X$ et $H \circledast X$ lorsque $X \in \underline{\underline{L}}$.

On considère l'espace $\underline{\underline{A}}'$ des mesures aléatoires $\mu(\omega, dt)$ sur $]0,\infty[$ pour lesquelles il existe une partition prévisible (A_n) de $\hat{\Omega} = \Omega \times [0,\infty[$ telle que chaque processus $\int_0^t 1_{A_n}(s)\mu(ds)$ appartienne à $\underline{\underline{A}}$ (ou $\underline{\underline{A}}_{loc}$). Si $\mu \in \underline{\underline{A}}'$ on définit sa projection prévisible duale μ^p comme l'unique mesure telle que $\int_0^t 1_{A_n}(s)\mu^p(ds)$ soit la projection prévisible duale de $\int_0^t 1_{A_n}(s)\mu(ds)$ pour chaque n : l'ensemble $\underline{\underline{A}}'$ n'est autre que l'ensemble des mesures aléatoires (signées) définies au paragraphe 2-c, lorsque l'espace E est réduit à un point, et telles que M_μ soit $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finie; μ^p est alors la projection prévisible duale de μ au sens de ce paragraphe 2-c. On notera $H\bullet d\mu$ la mesure aléatoire $\mu(\omega, dt)H(\omega, t)$; lorsque le processus $\mu(]0,t])$ appartient à $\underline{\underline{V}}$ ou à $\underline{\underline{A}}$, on écrit simplement $\mu \in \underline{\underline{V}}$ ou $\mu \in \underline{\underline{A}}$; inversement si $A \in \underline{\underline{V}}$ on note dA la mesure $\mu(\omega, dt) = dA_t(\omega)$.

Soient $X \in \underline{\underline{S}}$ et H optionnel tel que $H\Delta X \in \underline{\underline{K}}$. Si $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ il est clair que $H\bullet d\check{X}^D \in \underline{\underline{A}}'$ (prendre $A_n = \{n-1 \leq |{}^pH| < n\}$) et $(H\bullet d\check{X}^D)^p = H\bullet d\check{X}^D$. Par ailleurs on considère la mesure aléatoire

$$\alpha(dt) = \sum_{(s)} 1_{\mathcal{S}^1(\Delta X_s)} \Delta X_s\, \varepsilon_s(dt) .$$

Posons:

$$\underline{\underline{G}}(X,H) = \{D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X) : 1_{D^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha \in \underline{\underline{A}}',$$
$$H\bullet d\check{X}^D + (1_{D^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha)^p \in \underline{\underline{V}}\}.$$

LEMME 2: (a) <u>Si</u> $\underline{\underline{G}}(X,H) \neq \emptyset$ <u>on a</u> $\underline{\underline{G}}(X,H) = \underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$.

(b) <u>Si</u> D, $D' \in \underline{\underline{G}}(X,H)$ <u>on a</u>

$$(10)\quad H\bullet d\check{X}^{D'} + (1_{D'^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha)^p = H\bullet d\check{X}^D + (1_{D^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha)^p - ((1_D-1_{D'})H\bullet d\alpha)^p$$

(on rappelle que d'après le corollaire 1, $(1_{D'}-1_D)H\bullet d\alpha \in \underline{\underline{A}}_{loc}$; si H est prévisible, ce lemme est une partie de la proposition 7).

<u>Démonstration</u>: Soient $D \in \underline{\underline{G}}(X,H)$ et $D' \in \underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$. Soit $dC = (1_{D'}-1_D)\bullet d\alpha$. D'après le corollaire 1, $C \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et $H\bullet dC \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, tandis que $\check{X}^D = \check{X}^{D'} + C^p$. Pour simplifier, on pose $d\beta = 1_{D^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha$ et $d\beta' = 1_{D'^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha$. On a alors $d\beta' = d\beta + (1_D-1_{D'})(H-{}^pH)\bullet d\alpha = d\beta + {}^pH\bullet dC - H\bullet dC$. Mais $d\beta \in \underline{\underline{A}}'$ par hypothèse, $H\bullet dC \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et ${}^pH\bullet dC \in \underline{\underline{A}}'$: par suite $d\beta' \in \underline{\underline{A}}'$ et on a

$$d\beta'^p = d\beta^p + {}^pH\bullet dC^p - (H\bullet dC)^p = d\beta^p + H\bullet dC^p - (H\bullet dC)^p,$$

ce qui n'est autre que (10). Par ailleurs le second membre de (10) est dans $\underline{\underline{A}}_{loc}$ puisque $D \in \underline{\underline{G}}(X,H)$ et $H\bullet dC \in \underline{\underline{A}}_{loc}$: donc $d\beta'^p + H\bullet d\check{X}^{D'} \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ et $D' \in \underline{\underline{G}}(X,H)$. ∎

Soit alors

$$\mathcal{X}(X) = \{H \text{ optionnel: } H^2\bullet\langle X^c,X^c\rangle \in \underline{\underline{V}},\ H\Delta X \in \underline{\underline{K}},\ \underline{\underline{G}}(X,H) \neq \emptyset\}.$$

Si $H \in \mathcal{X}(X)$ et $D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$ $(= \underline{\underline{G}}(X,H))$ on considère la semi-martingale $Y(D)$ caractérisée par

$$Y(D)^c = H\bullet X^c,\quad \Delta Y(D) = H\Delta X,\quad d\check{Y}(D)^D = H\bullet d\check{X}^D + (1_{D^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha)^p.$$

Si $D' \in \underline{\underline{G}}(X,H)$ on a encore $Y(D')^c = H\bullet X^c$ et $\Delta Y(D') = H\Delta X$. De plus d'après (10) et le corollaire 1 on a

$$d\check{Y}(D')^D = d\check{Y}(D')^{D'} + ((1_{D'}-1_D)H\bullet d\alpha)^p$$
$$= H\bullet d\check{X}^{D'} + (1_{D'^c}(H-{}^pH)\bullet d\alpha)^p + ((1_{D'}-1_D)H\bullet d\alpha)^p = d\check{Y}(D)^D.$$

Par suite $Y(D') = Y(D)$ et on note $H\bullet X$ <u>la valeur commune des</u> $Y(D)$ <u>lorsque</u> D <u>parcourt</u> $\underline{\underline{E}}(\Delta X) \cap \underline{\underline{E}}(H\Delta X)$.

On remarque immédiatement que ${}^p\mathcal{X}(X) = \{H \in \mathcal{X}(X),\ H \text{ prévisible}\}$ et si $H \in {}^p\mathcal{X}(X)$, $H\bullet X$ n'est autre que l'intégrale définie au paragraphe précédent. Etant donnés le corollaire 2 et le lemme 2-(a), il est facile de vérifier que

$$(11)\quad \begin{aligned} &- H,H' \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow H+H' \in \mathcal{L}(X) \quad \text{et} \quad (H+H')\cdot X = H\cdot X + H'\cdot X\,, \\ &- H \in \mathcal{L}(X)\cap\mathcal{L}(X') \Rightarrow H \in \mathcal{L}(X+X') \quad \text{et} \quad H\cdot(X+X') = H\cdot X + H\cdot X'\,. \end{aligned}$$

PROPOSITION 9: <u>Si</u> $X \in \underline{\underline{V}}$ <u>et si</u> H <u>est un processus optionnel tel que</u> $\int_0^t H_s dX_s \in \underline{\underline{V}}$, <u>alors</u> $H \in \mathcal{L}(X)$ <u>et l'intégrale stochastique</u> $H\cdot X_t$ <u>égale l'intégrale de Stieltjes</u> $\int_0^t H_s dX_s$.

<u>Démonstration</u>: Par hypothèse, $a(H\Delta X) \in \underline{\underline{V}}$ et $a(\Delta X) \in \underline{\underline{V}}$, donc $\hat{\Omega} \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$. De plus $\check{X}^{\hat{\Omega}}$ est la "partie continue" du processus à variation finie X, donc $H\cdot\check{X}^{\hat{\Omega}} \in \underline{\underline{A}}_{loc}$. Par suite $\hat{\Omega} \in \underline{\underline{G}}(X,H)$ et $H \in \mathcal{L}(X)$. Enfin il est clair que l'intégrale de Stieltjes vérifie les relations de définition de $H\cdot X$ avec $D = \hat{\Omega}$. ∎

<u>Remarque</u>: Il semblerait plus naturel, à première vue, de définir l'intégrale stochastique pour les processus optionnels H appartenant à

$$\mathcal{L}'(X) = \{H \text{ optionnel: } H^2\cdot\langle X^c,X^c\rangle \in \underline{\underline{V}},\ H\Delta X \in \underline{\underline{K}},\ \exists D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$$
$$\text{avec } H\cdot\check{X}^D \in \underline{\underline{V}} \text{ et } a(1_{\mathcal{S}^1(\Delta X)} 1_{D^c}\, X(H-{}^pH)) \in \underline{\underline{A}}_{loc}\}.$$

On a $\mathcal{L}'(X) \subset \mathcal{L}(X)$. Mais les espaces $\mathcal{L}'(X)$ ne vérifie pas les relations (11) en général, ce qui est ennuyeux pour des espaces de fonctions intégrables. On peut également considérer les ensembles

$$\mathcal{L}''(X) = \{H \text{ optionnel: } H^2\cdot\langle X^c,X^c\rangle \in \underline{\underline{V}},\ H\Delta X \in \underline{\underline{K}},\ \exists D \in \underline{\underline{E}}(\Delta X)\cap\underline{\underline{E}}(H\Delta X)$$
$$\text{à coupes discrètes dans } [0,\infty[\text{ et tel que } H\cdot\check{X}^D \in \underline{\underline{V}} \text{ et}$$
$$a(1_{\mathcal{S}^1(\Delta X)} 1_{D^c}\, X(H-{}^pH)) \in \underline{\underline{A}}_{loc}\}.$$

Cette fois-ci, $\mathcal{L}''(X)$ vérifie bien les relations (11), ainsi que les inclusions ${}^p\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{L}''(X) \subset \mathcal{L}'(X) \subset \mathcal{L}(X)$; mais par contre la proposition 9 n'est plus valide pour $\mathcal{L}''(X)$.

<u>REFERENCES</u>

1 BERNARD A., MAISONNEUVE B.: Décomposition atomique de martingales de la classe $\mathcal{H}^1$. A paraitre, 1976.

2 DELLACHERIE C.: <u>Capacités et processus stochastiques</u>. Springer Verlag, Berlin, 1972.

3 JACOD J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. Wahr. <u>34</u>, 225-244, 1976.

4 JACOD J; MEMIN J.: Caractéristiques locales et condition de continuité absolue pour les semi-martingales. Z. Wahr. 35, 1-37, 1976.

5 LEPINGLE D.: Sur la représentation des sauts des martingales. A paraitre, 1976.

6 MEYER P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511, Springer Verlag, Berlin, 1976.

7 MEYER P.A.: Notes sur les intégrales stochastiques, I- intégrales hilbertiennes. A paraitre, 1976.

8 PRATELLI M.: Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable. Sém. Proba. Strasbourg X, Lect. Notes Math. 511, Springer Verlag, Berlin, 1976.

9 YEN K.A., YOEURP C.: Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels. Sém. Proba. Starsbourg X, Lect. Notes Math. 511, Springer Verlag, Berlin, 1976.

10 YOR M.: Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales. Article de Thèse, Paris, 1976.