SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une remarque sur les processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 555

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__555_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UNE REMARQUE SUR LES PROCESSUS DE MARKOV

par P.A. Meyer

Considérons, sur un espace d'états E, un semi-groupe droit que nous supposerons borélien pour simplifier (compte tenu de l'existence des compactifications de Ray, ce n'est pas une grosse restriction). Considérons en la réalisation continue à droite canonique, avec les notations habituelles Ω, X_t, $\underline{\underline{F}}^0$,... et rappelons comment, par l'astuce magique de Dawson, on calcule pour toute loi P^μ la projection optionnelle (Y_t) d'un processus borné $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^0$-mesurable (Z_t) par rapport à la famille (continue à droite) $(\underline{\underline{F}}^\mu_t)$. On forme successivement

$$\begin{aligned} h(\omega,t,\omega') &= Z_t(\omega/t/\omega') \quad (h(\omega/t/\omega')=h(k_t\omega/t/\omega')) \\ H(\omega,t,x) &= E^x[h(\omega/t/.)] = H(k_t\omega,t,x) \\ Y_t(\omega) &= H(\omega,t,X_t(\omega)) = H(k_t\omega,t,X_t(\omega)) \end{aligned}$$

Cette projection ne dépend pas de μ, et elle est optionnelle par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^0_t)$.
En particulier, si (Z_t) est optionnel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^0_{t+})$, (Z_t) et (Y_t) sont P^μ-indistinguables, et (Z_t) est donc P^μ-indistinguable d'un processus optionnel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^0_t)$, indépendant de μ.

Soit alors T un temps d'arrêt large, i.e. un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^0_{t+})$; appliquons le résultat précédent au processus (Z_t), indicatrice de $[[T]]$, et soit A l'ensemble $\{(t,\omega) : Y_t(\omega)=1\}$. Alors A est strictement optionnel, indistinguable de $[[T]]$ pour toute loi P^μ. D'après le théorème de section contenu dans ce volume, il existe pour toute loi μ un temps d'arrêt S_μ de la famille $(\underline{\underline{F}}^0_t)$, qui est une section complète de A (le graphe de S_μ passe dans A, et $P^\mu\{S_\mu<\infty\}$ $= P^\mu(\mathrm{proj}_\Omega A)$. Alors $T=S_\mu$ P^μ-p.s., et on voit que l'on <u>pourrait</u> se passer des temps d'arrêt larges en théorie des processus de Markov. Si l'on y réfléchit, c'est une manière d'interpréter la loi de tout ou rien.