SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une note sur le théorème du balayage de Hunt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 164-167

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__164_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970/71

UNE NOTE SUR LE THÉORÈME DE HUNT

par P.A.Meyer

Nous considérons ici, avec les notations usuelles, un processus de Markov (X_t) à valeurs dans E, satisfaisant aux hypothèses droites, un ensemble A presque borélien, une fonction excessive u. Le processus est supposé transient. Rappelons l'énoncé du célèbre théorème de HUNT sur le balayage :

THEOREME 1. Pour toute mesure μ ne chargeant pas $A\backslash reg(A)$, il existe une suite décroissante (v_n) de fonctions excessives majorant u sur A, telle que $P_A u = \lim_n v_n$ μ-presque partout.

Quitte à remplacer les v_n par les $v_n \wedge u$, on peut en fait supposer que $v_n = u$ sur A. En prenant pour μ une masse unité ε_x, on retrouve l'énoncé de HUNT sous sa forme familière (et un peu moins forte) : l'enveloppe inférieure u_A de l'ensemble des fonctions excessives majorant u sur A est égale à $P_A u$, sauf peut être en des points de $A\backslash reg(A)$.

Notre objet est ici le suivant : nous allons faire l'hypothèse de continuité absolue, et chercher alors - comme on peut le faire pour tant d'autres questions - à rendre l'énoncé du théorème 1 indépendant d'une mesure μ. Cela nous donnera quelques petits résultats amusants sur la topologie fine, comme sous-produits. J'ai du mal à croire que tout cela soit nouveau, mais je ne l'ai vu écrit nulle part.

Nous n'avons aucun problème sur reg(A), car $P_A u$ y est égal à u. Nous n'avons non plus aucun problème sur $A\backslash reg(A)$, puisqu'il est impossible d'y affirmer quoi que ce soit ! En définitive, la seule chose intéressante est ce qui se passe sur l'ensemble $(\overline{A})^c$ restant, où $\overline{A}$ désigne ici, comme dans toute la suite de cet exposé, l'adhérence fine de A, qui est presque borélienne. Nous allons établir le théorème suivant :

THEOREME 2. Sous l'hypothèse de continuité absolue, il existe une suite décroissante (v_n) de fonctions excessives, majorant u sur A, telle que $\lim_n v_n = P_A u$ quasi-partout sur $\overline{A}^c$.

Le texte fournira d'ailleurs quelques compléments : il y aura des conditions suffisantes pour que l'égalité ait lieu partout, on verra que l'ensemble polaire exceptionnel peut être choisi indépendamment de u si celle-ci est finie, etc.

Nous allons commencer par établir le résultat suivant, relatif à la topologie fine : bien entendu, sous l'hypothèse de cont. absolue.

PROPOSITION 1. Soit A un ensemble presque borélien finement fermé. Il existe une suite décroissante d'ensembles finement ouverts A_n contenant A, tels que $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$ pour tout n, et que $A=\cap_n A_n=\cap_n \overline{A}_n$ à un ensemble polaire près.

Avant de l'établir, notons un corollaire amusant : A est l'intersections des ouverts fins A_n , et du complémentaire (finement ouvert) de l'ensemble polaire en question. Donc tout fermé fin (presque borélien) est intersection dénombrable d'ouverts fins.

DEMONSTRATION. Prenons $\lambda>0$, et choisissons une suite décroissante de fonctions λ-excessives $f_n \leq 1$, égales à 1 sur A, convergeant presque partout vers $P^\lambda_A 1$, et posons $B_n = \{ f_n > 1 - 1/n\}$, de sorte que B_n est ouvert fin, contient A, décroît, et $\overline{B}_{n+1} \subset B_n$. Posons $A^* = \cap_n B_n = \cap_n \overline{B}_n$.

On a $P^\lambda_A 1 \leqq P^\lambda_{B_n} 1 \leqq P^\lambda_{B_n}(f_n + \frac{1}{n}) \leqq f_n + \frac{1}{n}$. Donc $P^\lambda_{B_n} 1$ converge presque partout vers $P^\lambda_A 1$. Comme $P^\lambda_{A^*} 1$ est entre les deux, elle est égale à $P^\lambda_A 1$ presque partout, donc partout.

Soit $\beta = A^* \setminus A$. Comme $\mathrm{reg}(A)=\mathrm{reg}(A^*)$, β est contenu dans $A^* \setminus \mathrm{reg}(A^*)$, donc semi-polaire. D'après une remarque simple de DELLACHERIE[1], il existe alors une mesure μ portée par β - et ne chargeant donc pas A - telle que toute partie μ-négligeable de β soit polaire. Choisissons à nouveau des g_n λ-excessives majorant 1 sur A, décroissant μ-p.p. vers $P^\lambda_A 1$, et posons $C_n = \{g_n > 1 - 1/n\}$, $A_n = B_n \cap C_n$; on a encore $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$, A_n contient A, est finement ouvert.

Posons $A' = \cap_n A_n = \cap_n \overline{A}_n$. Pour μ-presque tout $x \in \beta$, $P^\lambda_{C_n} 1^x$, donc a fortiori $P^\lambda_{A_n} 1^x$ qui est plus petit, converge vers $P^\lambda_A 1^x$. Mais ceci est <1, donc pour n assez grand on a $x \notin C_n$, donc $x \notin A'$. Autrement dit, $A' \cap \beta$ est μ-négligeable, donc polaire, et $A' \setminus A$ est polaire.

Si A satisfait à l'énoncé sans ensemble polaire exceptionnel, i.e. si $A=\cap_n \overline{A}_n$, nous dirons que A est aimable . C'est le cas des fermés ordinaires.

Nous passons maintenant aux réduites.

PROPOSITION 2. Soit A presque borélien. Si u est finie sur A, il existe une suite décroissante (G_n) d'ouverts fins presque boréliens contenant A, telle que $P_{G_n} u$ converge vers $P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$. On peut remplacer quasi partout par partout si u est partout finie et $\overline{A}$ est aimable.

---

[1] Voir à la fin de l'exposé.

DEMONSTRATION. Les notations A', A_n sont celles de la démonstration de la proposition 1, relativement à l'ensemble finement fermé $\overline{A}$. Nous choisissons des fonctions excessives v_n égales à u sur A, décroissant p.s. vers $P_A u$ presque partout, et nous posons

$$D_n = \{ v_n > u - \frac{1}{n} \}$$

Ce sont des ouverts fins qui décroissent, et contiennent A parce que u est finie sur A. Le même raisonnement que dans la proposition 1 montre que $P_{D_n} u$ converge vers $P_A u$ presque partout. Posons ensuite

$$E_n = A_n \cap D_n \ , \ w_n = P_{E_n} u \ , \ w = \lim_n w_n \ ,$$

E_n est un ensemble finement ouvert contenant A ; $P_{E_n} u = w_n$ converge p.p. vers $P_A u$; on a $A = \bigcap_n \overline{E}_n$ à un ensemble polaire près.

Nous utilisons maintenant un petit raisonnement de KUNITA-T.WATANABE. Nous avons si $m \geq n$ $P_{E_n} P_{E_m} = P_{E_m}$; le théorème de LEBESGUE nous donne donc $P_{E_n} w = w$ en tout point où w est finie. Mais cela entraîne que w est égale à sa régularisée excessive dans $\overline{E}_n^c \cap \{w < \infty\}$, car si $x \in \overline{E}_n^c \cap \{w < \infty\}$

$$P_t w^x \geq P_t P_{E_n} w^x = P_{t+T_{E_n} \circ \theta_t} w^x \geq E^x [w \circ X_{T_{E_n}} I_{\{t < T_{E_n}\}}]$$

et comme x est irrégulier pour E_n cela tend, lorsque $t \to 0$, vers $P_{E_n} w^x = w(x)$.

Supposons d'abord que u soit partout finie ; w l'est alors aussi, et on a $w = P_A u$ dans $\bigcup_n \overline{E}_n^c$, c'est à dire quasi-partout dans $\overline{A}^c$, et partout dans $\overline{A}^c$ si A est aimable. Noter que de toute façon, si u est partout finie, l'ensemble polaire exceptionnel est contenu dans $\overline{A}^c \backslash A'^c$, ensemble polaire fixe.

Ensuite, supposons que u soit finie seulement sur A. L'ensemble $\gamma = \overline{A}^c \cap \{w > P_A u\}$ est semi-polaire, et en utilisant à nouveau la remarque de DELLACHERIE, nous choisissons une mesure μ portée par γ (donc ne chargeant pas A) telle que toute partie μ-négligeable de γ soit polaire, puis une suite décroissante d'ouverts fins contenant A, mettons H_n , telle que $P_{H_n} u$ tende vers $P_A u$ μ-presque partout. Un raisonnement déjà fait plus haut montre qu'alors, si nous remplaçons E_n par $G_n = E_n \cap H_n$, nous avons bien $\lim_n P_{G_n} u = P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$.

Il nous faut maintenant démontrer le théorème 2 dans le cas où u n'est plus nécessairement finie sur A. Nous ne pourrons plus alors choisir des fonctions v_n de la forme $P_{G_n} u$, G_n ouvert fin contenant A, comme le montre l'exemple de la théorie classique dans $\mathbb{R}^3$, avec $A = \{x\}$, $u = g_x$, la fonction de GREEN en x : dans ce cas $P_A u = 0$, mais $P_G u = u$ pour tout G non effilé en x.

Etant donné ce que nous avons vu, il suffira d'esquisser la démonstration : nous prenons des fonctions excessives w_n majorant u sur A, qui décroissent, et dont la limite est presque partout égale à $P_A u$. Notons w cette limite, et β l'ensemble des points de $\overline{A}^c$ où $w > P_A u$. β est semi-polaire, nous choisissons une mesure μ portée par β telle que toute partie μ-négligeable de β soit semi-polaire, et nous choisissons une suite w'_n de fonctions excessives majorant u sur A, qui converge vers $P_A u$ μ-p.p., et nous posons $v_n = w_n \wedge w'_n$. La suite v_n maintenant converge vers $P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$.

C'est plus facile que la proposition 2, parce qu'on n'a fait aucune restriction sur la forme des fonctions excessives utilisées, tandis qu'alors on voulait des fonctions de la forme $P_G u$. Mais le résultat peut s'améliorer : par exemple, si $\overline{A}$ est aimable, A_n une suite décroissante d'ouverts fins contenant $\overline{A}$ telle que $\overline{A} = \bigcap_n \overline{A}_n$, et si l'on remplace les v_n par les $P_{A_n} v_n$, la nouvelle limite sera égale à $P_A u$, non seulement quasi-partout dans $\overline{A}^c$, mais aussi en tout point de $\overline{A}^c$ où elle est finie.

APPENDICE : LA REMARQUE DE DELLACHERIE

On considère un ensemble semi-polaire S. On le représente comme réunion d'ensembles totalement effilés S_n . On prend une mesure de référence de masse 1, appelons la λ, et on pose

$$a_n = \sup_{x \in S_n} P^{\lambda}_{S_n} 1^x < 1$$

$$\mu_n(f) = E^{\lambda}\Big[\sum_t e^{-\lambda t} I_{S_n} \circ X_t \, . \, f \circ X_t \Big]$$

mesure de masse $\leq a_n/1-a_n$, et enfin

$$\mu = \sum c_n \mu_n$$

où les $c_n > 0$ sont tels que μ soit bornée. Une partie μ-négligeable de S n'est P^{λ}-p.s. jamais rencontrée, comme λ est une mesure de référence, elle est polaire.