SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE

Une martingale uniformément intégrable mais non localement de carré intégrable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 138-140

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__138_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969-70

UNE MARTINGALE UNIFORMÉMENT INTÉGRABLE MAIS NON LOCALEMENT DE CARRÉ INTÉGRABLE

par C. DOLÉANS-DADE

Soit $(\Omega , \mathcal{F} , P)$ un espace de probabilité complet et $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$ une famille croissante, continue à droite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Une martingale (X_t) à valeurs réelles et à trajectoires continues à droite est localement de carré intégrable s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) tels que

1) $\lim T_n = +\infty$ p.s.

2) pour chaque n, $(X_{t\wedge T_n})$ est une martingale de carré intégrable (c'est-à-dire pour chaque n, $E[X^2_{T_n}] < +\infty$).

L'étude des intégrales stochastiques par rapport aux martingales localement de carré intégrable se ramène trivialement à celle des intégrales stochastiques par rapport aux martingales de carré intégrable. Il est donc intéressant, pour justifier la théorie des intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales faite en [2], de savoir qu'il existe des martingales locales qui ne sont pas localement de carré intégrable.

Nous allons construire ici une martingale <u>uniformément intégrable</u> telle que <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>non identiquement nul, on ait</u> $E[X_T^2] = +\infty$. Une telle martingale ne peut évidemment pas être localement de carré intégrable.

Soient $\Omega = R_+$, $\mathcal{F}^o$ la tribu borélienne de R_+, S l'application identité de Ω dans R_+ et $\mathcal{F}^o_t$ la tribu engendrée par $S \wedge t$. On prend pour probabilité P sur Ω la loi exponentielle

$$P\{S > x\} = e^{-x} \qquad \text{pour tout } x \geq 0 \quad .$$

On considère la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par $\mathcal{F}^o$ et les ensembles P-négligeables de Ω, et pour chaque t la tribu $\mathcal{F}_t$ engendrée par $\mathcal{F}^o_t$ et les ensembles P-négligeables de Ω. On a alors les résultats suivants (voir [1]) :

1) la famille $(\mathcal{F}_t)$ est croissante, continue à droite, sans temps de discontinuité,

2) une variable aléatoire T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ si et seulement s'il existe $u \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

a) $T \geq S$ p.s. sur l'ensemble $\{S \leq u\}$

b) b) $T = u$ p.s. sur l'ensemble $\{S > u\}$.

Pour tout temps d'arrêt T tel que $P\{T = 0\} < 1$, il existe donc un $u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tel que $S \wedge u \leq T$ p.s. .

Considérons maintenant la variable aléatoire

$$Z = I_{\{0<S\leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{S}} e^{\frac{S}{2}} .$$

$$E[Z] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{2}} e^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\, dx < +\infty .$$

La variable aléatoire Z est donc intégrable, et la martingale continue à droite

$$X_t = E[Z \mid \mathcal{F}_t] = Z\, I_{\{S\leq t\}} + \frac{E[Z\, I_{\{S>t\}}]}{P\{S>t\}}\, I_{\{S>t\}}$$

est donc uniformément intégrable.

Pour tout $a \in]0, 1]$ nous avons

$$X^2_{S\wedge a} \geq Z^2\, I_{\{S\leq S\wedge a\}} = \frac{1}{S} e^S\, I_{\{0<S\leq a\}}$$

et donc

$$E[X^2_{S\wedge a}] \geq \int_0^a \frac{1}{x} e^x e^{-x}\, dx = +\infty .$$

Soit maintenant T un temps d'arrêt tel que $P\{T = 0\} < 1$, et $a \in]0, 1]$ tel que $S \wedge a \leq T$ p.s. . On ne peut avoir l'inégalité $E[X_T^2] < +\infty$, car ceci entraînerait

$$E[X^2_{S \wedge a}] \leq E[X_T^2] < +\infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE : Un exemple de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 124, Springer, Heidelberg 1970.

[2] D. DOLÉANS-DADE & P.A. MEYER : Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 124, Springer, Heidelberg 1970.