SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
CATHERINE DOLÉANS-DADE

Un contre-exemple au problème des laplaciens approchés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 127-137
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__127_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1969/70

UN CONTRE-EXEMPLE AU PROBLEME DES LAPLACIENS APPROCHES

par C. DELLACHERIE et C. DOLEANS-DADE

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On sait que tout potentiel de la classe (D) (X_t) est engendré par un unique processus croissant prévisible (ou naturel) (A_t). Ce théorème a été établi par MEYER [2] en approchant (A_t) par des processus croissants (A_t^h) appelés laplaciens approchés. Plus précisément, si pour tout $h>0$ et tout $t \geq 0$ on pose

$$A_t^h = \frac{1}{h}\int_0^t E[X_s - X_{s+h} | \underline{\underline{F}}_s]\, ds$$

on a alors

$$A_t = \lim_{h\to 0} A_t^h$$

la limite étant prise au sens de la topologie faible de $L^1(P)$. MEYER [2] a démontré d'autre part que la convergence a lieu au sens de la topologie forte de $L^1(P)$ lorsque (A_t) est un processus croissant continu.

Le problème des laplaciens approchés est alors le suivant : est-ce que l'on a $A_t = \lim A_t^h$ au sens de la topologie forte dans le cas général ? (*)

Nous donnons ici un contre-exemple à ce problème, ainsi qu'à deux problèmes voisins (convergence forte vers A_t des approximations "discrètes" , convergence de projections prévisibles).

(*) Nous renonçons, pour des raisons évidentes, à indiquer l'intérêt d'une réponse positive à ce problème.

I DESCRIPTION DE LA SITUATION INITIALE

Nous poserons $\Omega = [0,1]$, P = la restriction de la mesure de LEBESGUE et $\underline{\underline{F}}$ = la tribu des ensembles mesurables (au sens de LEBESGUE), et nous désignerons, pour chaque entier n, par S_n la fonction en escalier associée au n-ième découpage dyadique de Ω définie par

$$S_n(\omega) = k.2^{-n} \quad \text{pour } \omega \in [k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[\text{ et pour } k = 0,1,\ldots,2^n-1$$

La fonction identité sur Ω étant désignée par S, on a alors

$$S = \lim_n S_n \qquad P\{S_n < S \text{ pour tout } n\} = 1$$

Nous allons prendre maintenant pour famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ la plus petite famille admettant les S_n comme temps d'arrêt : S sera alors un temps d'arrêt prévisible annoncé par la suite de t.d'a. croissante (S_n).

Pour tout $t \geq 0$, nous noterons $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu engendrée par les ensembles négligeables et par les variables aléatoires $S_1 \wedge t$, $S_2 \wedge t$, ..., $S_n \wedge t$, ... : les S_n (et donc S) sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$. Voici une autre description de la tribu $\underline{\underline{F}}_t$, plus constructive (cf fig. 1 de l'annexe) : aux ensembles négligeables près, la tribu $\underline{\underline{F}}_t$ est engendrée par

- les boréliens de $[0,t\wedge 1]$ (intervalle de Ω)
- les atomes égaux aux intervalles non vides de la suite

  $\{t < S_1\}$, $\{S_1 \leq t < S_2\}$, ..., $\{S_n \leq t < S_{n+1}\}$, ...

Si on a $t \geq 1$, $\underline{\underline{F}}_t$ est égale à $\underline{\underline{F}}$ et il n'y a pas d'atomes; si on a $t < 1$, les atomes constituent une partition infinie de $]t,1]$ et viennent s'accumuler en t. De cette description, on déduit facilement que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est continue à droite. Comme $\underline{\underline{F}}_0$ contient les ensembles négligeables, la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie alors les conditions habituelles.

Nous désignerons enfin par (A_t) le processus croissant défini par $A_t = I_{\{S \leq t\}}$ - c'est un processus croissant prévisible puisque S est un temps d'arrêt prévisible -, et par (X_t) le potentiel engendré par (A_t) : $X_t = I_{\{S > t\}}$.

Nous allons donner maintenant les trois contre-exemples annoncés. On peut les aborder dans un ordre arbitraire : nous avons choisi de les exposer dans un ordre croissant de complexité. Pour chacun d'eux, nous avons d'abord énoncé le problème dans son cadre général; ensuite nous nous plaçons dans la situation du premier paragraphe dont nous conservons les notations.

II CONVERGENCE DE PROJECTIONS PREVISIBLES

Enoncé du problème :

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On se donne d'autre part, pour chaque entier n, une famille $(\underline{\underline{F}}^n_t)$ vérifiant les conditions habituelles et on suppose que, pour t fixé, les tribus $\underline{\underline{F}}^n_t$ croissent avec n et engendrent $\underline{\underline{F}}_t$. Nous désignerons par $\underline{\underline{T}}$ (resp $\underline{\underline{T}}^n$) la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ constituée par les ensembles prévisibles relatifs à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ (resp $(\underline{\underline{F}}^n_t)$) : les tribus $\underline{\underline{T}}^n$ croissent avec n, et on montre facilement qu'elles engendrent $\underline{\underline{T}}$. Soit $Z = (Z_t)$ un processus mesurable borné : on sait que Z admet une projection prévisible Z^∞ (resp Z^n) relative à $(\underline{\underline{F}}_t)$ (resp $(\underline{\underline{F}}^n_t)$) (cf MEYER [3]) : Z^∞ (resp Z^n) est l'unique processus $\underline{\underline{T}}$-mesurable (resp $\underline{\underline{T}}^n$-mesurable) tel que l'on ait

$$Z^\infty_T = E[Z_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] \text{ p.s.} \qquad (\text{resp } Z^n_T = E[Z_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] \text{ p.s.})$$

pour tout t.d'a. prévisible borné T de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ (resp $(\underline{\underline{F}}^n_t)$), l'unioité s'entendant à l'indistinguabilité près. Le problème est alors le suivant :

" A-t-on $Z^\infty_T = \lim_n Z^n_T$ p.s. pour tout t.d'a. prévisible borné T de $(\underline{\underline{F}}_t)$? "

soit encore (d'après le théorème de section)

" A-t-on $Z^\infty = \lim_n Z^n$ à l'indistinguabilité près ? "

En un certain sens, Z^∞ (resp Z^n) est une espérance conditionnelle de Z par rapport à $\underline{\underline{T}}$ (resp $\underline{\underline{T}}^n$), et on a un problème analogue au problème de la convergence des martingales.

Contre-exemple :

Plaçons nous maintenant dans la situation du premier paragraphe. Pour tout t et tout n, nous désignons par $\underline{\underline{F}}_t^n$ la tribu engendrée par les ensembles négligeables et par les variables aléatoires $S_1 \wedge t$, $S_2 \wedge t$, ..., $S_n \wedge t$. Pour n fixé, la tribu $\underline{\underline{F}}_\infty^n$ est engendrée par les ensembles négligeables et par les 2^n atomes définis par la n-ième décomposition dyadique, et donc tout temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^n)$ est p.s. une variable aléatoire étagée. D'autre part, pour t fixé les $\underline{\underline{F}}_t^n$ croissent avec n et engendrent $\underline{\underline{F}}_t$. Soit Z l'indicatrice du graphe de S : comme S est un t.d'a. prévisible de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, Z est un processus prévisible et donc on a $Z^\infty = Z$. Mais le graphe de S est disjoint (à l'indistinguabilité près) des graphes de tous les t.d'a. des familles $(\underline{\underline{F}}_t^n)$, ceux-ci étant étagés, et donc on a $Z^n = 0$ pour tout n. Par conséquent, on a

$$P\{\omega \in \Omega : \exists t \quad Z_t^\infty(\omega) = \lim_n Z_t^n(\omega)\} = 0$$

III APPROXIMATION D'UN PROCESSUS CROISSANT PAR PASSAGE DU DISCRET AU CONTINU

Enoncé du problème :

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On se donne un processus croissant intégrable prévisible $\underline{\underline{A}} = (A_t)$ et on désigne par $X = (X_t)$ le potentiel engendré par A :

$$X_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - A_t$$

Fixons t et soit $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ (nous sous-entendons que $t_0 = 0$ et que $t_n = t$). Posons

$$A_t^\sigma = E[A_{t_1} - A_{t_0} | \underline{\underline{F}}_{t_0}] + E[A_{t_2} - A_{t_1} | \underline{\underline{F}}_{t_1}] + \ldots + E[A_{t_n} - A_{t_{n-1}} | \underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]$$

$$= E[X_{t_0} - X_{t_1} | \underline{\underline{F}}_{t_0}] + E[X_{t_1} - X_{t_2} | \underline{\underline{F}}_{t_1}] + \ldots + E[X_{t_{n-1}} - X_{t_n} | \underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]$$

Passons maintenant à la limite le long de l'ensemble filtrant des subdivisions de $[0,t]$. On a alors $A_t = \lim_\sigma A_t^\sigma$ au sens de la topologie faible de $L^1(P)$, et au sens de la topologie forte lorsque (A_t) est continu (cf DOLEANS [1]).

Le problème est alors le suivant :

"A-t-on $A_t = \lim_{\sigma} A_t^{\sigma}$ au sens de la topologie forte de L^1 en général ?"

Contre-exemple : (cf fig. 2 et 3 de l'annexe)

Plaçons nous maintenant dans la situation du premier paragraphe. On a ici $A_t = I_{\{S \leq t\}}$ et $X_t = I_{\{S > t\}}$. Nous allons étudier l'approximation pour $t = 1$: A_1 est égal à la constante 1 et X_1 à la constante 0. Une première idée est de prendre les subdivisions syadiques de $[0,1]$, mais cela ne donne rien car on a $A_1 = A_1^{\sigma}$ pour ces subdivisions ! Aussi nous allons les "canuler" en omettant certains points. Nous poserons

$$\sigma_1 = \{0,1/4,3/4,1\}$$

$$\sigma_2 = \{0,1/16,3/16,1/4,5/16,7/16,1/2,9/16,11/16,3/4,13/16,15/16,1\}$$

et, d'une manière générale, pour tout entier m, σ_m sera la subdivision de $[0,1]$ constituée par les points de la forme

$$k.2^{-2m} \qquad k \in \{0,1,\ldots,2^{2m}\} \qquad k \not\equiv 2 \text{ modulo } 4$$

La parité de 2m assure que 0 et 1 appartiennent à σ_m et que σ_m est contenu dans σ_{m+1}. D'autre part, si on prolonge ces subdivisions à $\mathbb{R}_+$ par périodicité de période 1, la subdivision σ_{m+1} est homothétique de la subdivision σ_m dans l'homothétie de centre 0 et de rapport 1/4.

Nous allons montrer que, dans $L^1(P)$, la norme de $(A_1^{\sigma_m} - A_1)$ est constante et égale à 1/4, ce qui montrera qu'on ne peut avoir $A_1 = \lim_{\sigma} A_1^{\sigma}$ au sens de la topologie forte.

Par définition, si $\sigma_m = \{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$, on a

$$A_1^{\sigma_m} = \sum_{i=0}^{n-1} (I_{\{S > t_i\}} - E[I_{\{S > t_{i+1}\}} | \underline{\underline{F}}_{t_i}]) = \sum_{i=0}^{n-1} E[I_{\{t_i < S \leq t_{i+1}\}} | \underline{\underline{F}}_{t_i}]$$

Etant donnée la forme des atomes des tribus $\underline{\underline{F}}_{t_i}$ (cf paragraphe I, fig. 1 et 2 de l'annexe), on a

- si $t_{i+1} = t_i + 2^{-2m}$ (i.e. si $t_i = k.2^{-2m}$ avec $k \neq 1$ modulo 4)

$$E[I_{\{S > t_{i+1}\}} | \underline{\underline{F}}_{t_i}] = I_{\{S > t_{i+1}\}}$$

- si $t_{i+1} = t_i + 2.2^{-2m}$ (i.e. si $t_i = k.2^{-2m}$ avec $k = 1$ modulo 4)

$$E[I_{\{S > t_{i+1}\}} | \underline{\underline{F}}_{t_i}] = \frac{1}{2}.I_{\{t_i + 2^{-2m} < S \leq t_{i+1} + 2^{-2m}\}} + I_{\{S > t_{i+1} + 2^{-2m}\}}$$

D'où finalement la valeur de $A_1^{\sigma_m}$, donnée par les valeurs de ses restrictions aux intervalles de la (2m)-ième décomposition dyadique de Ω :

sur l'intervalle $[k.2^{-2m},(k+1).2^{-2m}[$, $A_1^{\sigma_m}$ est constante et

= 1 si k = 0 modulo 4 ou si k = 1 modulo 4

= 1/2 si k = 2 modulo 4

= 3/2 si k = 3 modulo 4

Par conséquent si on prolonge la définition de $A_1^{\sigma_m}$ à $\mathbb{R}_+$ par périodicité de période 1, on a l'identité (cf fig. 3 de l'annexe)

$$A_1^{\sigma_{m+1}}(\omega) = A_1^{\sigma_m}(4\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi, la norme de $(A_1^{\sigma_m} - A_1)$ dans L^1 est constante et égale à 1/4.

IV APPROXIMATION D'UN PROCESSUS CROISSANT PAR LES LAPLACIENS APPROCHES

Enoncé du problème :

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On se donne un processus croissant intégrable prévisible $A = (A_t)$ et on désigne par $X = (X_t)$ le potentiel engendré par A :

$$X_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - A_t$$

Nous ferons l'abus de notation consistant à écrire $t \longrightarrow E[X_{t+h} | \underline{\underline{F}}_t]$ (resp $t \longrightarrow E[A_{t+h} | \underline{\underline{F}}_t]$) la surmartingale (resp sousmartingale) continue à droite qui, pour $h > 0$ donné, est p.s. égale à chaque instant t à $E[X_{t+h} | \underline{\underline{F}}_t]$ (resp $E[A_{t+h} | \underline{\underline{F}}_t]$). On sait qu'une telle surmartingale (resp sousmartingale) existe et est unique à l'indistinguabilité près.

Posons alors pour tout t et tout $h > 0$

$$A_t^h = \frac{1}{h}\int_0^t (X_s - E[X_{s+h}|\underline{F}_s])\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t (E[A_{s+h}|\underline{F}_s] - A_s)\,ds$$

Pour h fixé, on définit ainsi un processus croissant (A_t^h) appelé le laplacien approché d'ordre h du potentiel (X_t). On sait que, pour t fixé, l'on a $A_t = \lim_{h\to 0} A_t^h$ au sens de la topologie faible de $L^1(P)$, et au sens de la topologie forte lorsque (A_t) est continu (cf MEYER [2]). Le problème est alors le suivant :

"A-t-on $A_t = \lim_{h\to 0} A_t^h$ au sens de la topologie forte de L^1 en général ? "

Contre-exemple : (cf fig. 4 et 5 de l'annexe)

Plaçons nous maintenant dans la situation du premier paragraphe. On a ici $A_t = I_{\{S \leq t\}}$ et $X_t = I_{\{S > t\}}$. Nous allons étudier l'approximation pour $t = 1$: A_1 est égal à la constante 1 et X_1 à la constante 0. Nous allons étudier les laplaciens approchés pour $h_n = 2^{-n}$, n parcourant les entiers.

Nous allons montrer que la norme dans $L^1(P)$ de $(A_1^{h_n} - A_1)$ reste $\geq 1/16$ pour tout n, ce qui montrera qu'on ne peut avoir $A_1 = \lim_{h\to 0} A_1^h$ au sens de la topologie forte.

On pourrait calculer directement la valeur de $A_1^{h_n}$, mais celle-ci n'est pas simple et il n'y a pas non plus de relation simple entre $A_1^{h_n}$ et $A_1^{h_{n+1}}$. Aussi nous allons procéder autrement. Pour chaque n, nous allons minorer $A_1^{h_n}$ par une variable aléatoire positive B^n telle que la norme dans L^1 de $(B^n - A_1)^+$ soit constante et égale à 1/16 : il est clair que la norme de $(A_1^{h_n} - A_1)$ sera alors minorée par 1/16.

Fixons n et décomposons l'intervalle de temps [0,1] par la n-ième subdivision dyadique $\{k.2^{-n};\ k = 0,1,\ldots,2^n\}$. On a

$$A_1^{h_n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \cdot \int_{k.2^{-n}}^{(k+1).2^{-n}} (I_{\{S > s\}} - E[I_{\{S > s+2^{-n}\}}|\underline{F}_s])\,ds$$

Nous allons définir la variable aléatoire B^n par ses restrictions aux intervalles de Ω découpés par la n-ième subdivision dyadique :

sur l'intervalle $[k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$ de Ω, nous posons

- si $k = 2$ modulo 2

  $B^n = 0$

- si $k = 1$ modulo 2

  $$B^n = 2^n . \int_{(k-1).2^{-n}}^{(k+1).2^{-n}} (I_{\{S > s\}} - E[I_{\{S > s + 2^{-n}\}} | \underline{\underline{F}}_s]) \, ds$$

Il est clair que l'on a $0 \leq B^n \leq A_1^{h_n}$. D'autre part, sur l'intervalle $[k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$ de Ω, on a $S > s$ pour tout $s \in [(k-1).2^{-n},k.2^{-n}[$, et on a $E[I_{\{S > s+2^{-n}\}} | \underline{\underline{F}}_s] = 0$ pour tout $s \in [k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$ car l'ensemble $\{S > (k+1).2^{-n}\}$ appartient à la tribu $\underline{\underline{F}}_{k.2^{-n}}$. Par conséquent, si $k = 1$ modulo 2, on a sur l'intervalle $[k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$ de Ω

$$B^n = 2^n . \int_{(k-1).2^{-n}}^{k.2^{-n}} (1 - E[I_{\{S > s+2^{-n}\}} | \underline{\underline{F}}_s]) \, ds + 2^n . \int_{k.2^{-n}}^{(k+1).2^{-n}} I_{\{S > s\}} \, ds$$

Explicitons les valeurs de ces deux intégrales. La seconde est évidemment égale sur l'intervalle considéré à $2^n.(S - k.2^{-n})$. D'autre part, étant donnée la forme des atomes des tribus $\underline{\underline{F}}_s$ (cf paragraphe I, fig. 1 et 4 de l'annexe), la première intégrale est constante et égale à 1/2 sur l'intervalle considéré. D'où finalement le tableau des valeurs de la variable aléatoire B^n :

sur l'intervalle $[k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$ de Ω, B^n est égale

à 0 si $k = 2$ modulo 2

à $\frac{1}{2} + 2^n.(S - k.2^{-n})$ si $k = 1$ modulo 2

Par conséquent, si on prolonge la définition de B^n à $\mathbb{R}_+$ par périodicité de période 1, on a l'identité (cf fig. 5 de l'annexe)

$$B^{n+1}(\omega) = B^n(2\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi, la norme de $(B^n - A_1)^+$ dans L^1 est constante et égale à 1/16.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOLEANS C. : Construction du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D) (C.R. série A, t264, p600-602, 1967)

[2] MEYER P.A. : Probabilités et Potentiel (Hermann, Paris, 1966)

[3] MEYER P.A. : Guide de la théorie générale des processus (Séminaire de Probabilités II, Lecture Notes n°51, Springer, Heidelberg 1968)

A N N E X E

On trouvera deux types de figures : a) figures 1,2,4 : nous avons représenté $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ où Ω figure horizontalement. La même échelle est prise sur les deux axes. b) figures 3,5 : nous avons représenté des graphes de v.a. . Ω figure toujours horizontalement, mais le rapport des échelles sur les axes est égal à 4.

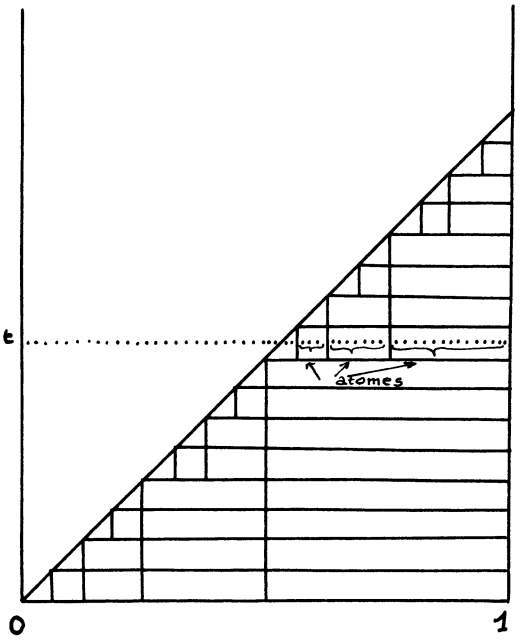

Figure 1

Nous avons représenté le graphe de S, et les graphes des S_n pour n = 1,2,3,4. On a mis ainsi en évidence la formation des atomes de $\underline{F}_t$ obtenus par découpage de l'intervalle]t,1] de Ω par les graphes des S_n.

La figure est stable pour les homothéties de centre O et de rapport 2^{-n}, n entier.

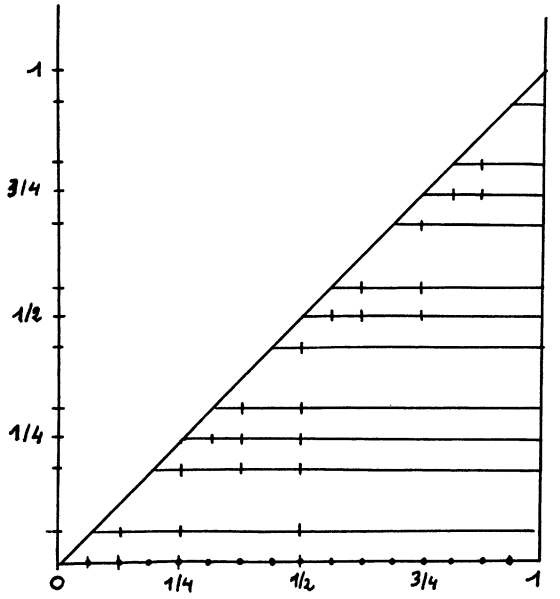

Figure 2 :

Nous avons représenté la 4-ième subdivision de Ω et la subdivision σ_2 de [0,1], en indiquant la formation des atomes de $\underline{\underline{F}}_{t_i}$ pour les $t_i \in \sigma_2$. Apparaissent alors les deux cas possibles des valeurs de $E[S > t_{i+1} | \underline{\underline{F}}_{t_i}]$ suivant que $t_{i+1} - t_i = 1/16$ ou $2/16$.

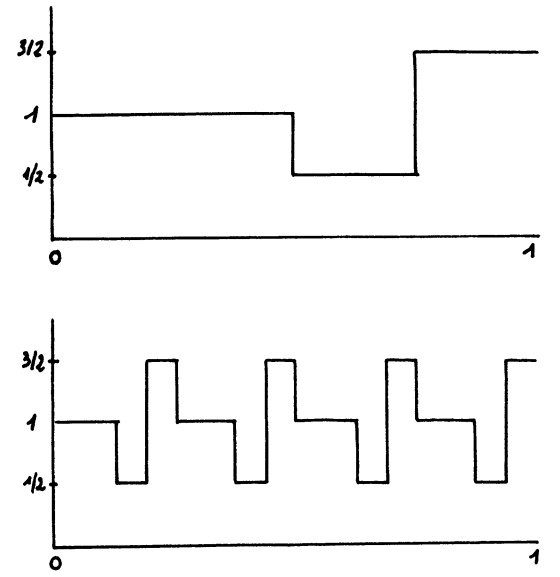

Figure 3 :

Nous avons représenté les graphes des variables aléatoires $A_1^{\sigma_1}$ et $A_1^{\sigma_2}$. On a mis ainsi en évidence la formation périodique de ces variables aléatoires. On voit aussi que la norme dans L^1 de $(A_1^{\sigma_n} - A_1)$ est constante et égale à 1/4.

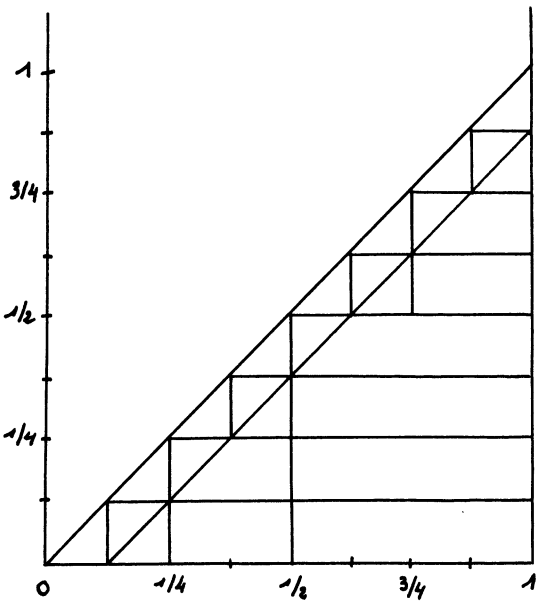

Figure 4 :

Nous avons représenté les graphes des S_n pour n = 1,2,3, le graphe de S et le graphe de $S - 2^{-3}$ et indiqué la formation des atomes de $\underline{F}_t$ lorsque t parcourt les points de la 3-ième subdivision dyadique de [0,1]. On voit ainsi apparaitre la signification de la variable aléatoire B^3 et son mode de calcul.

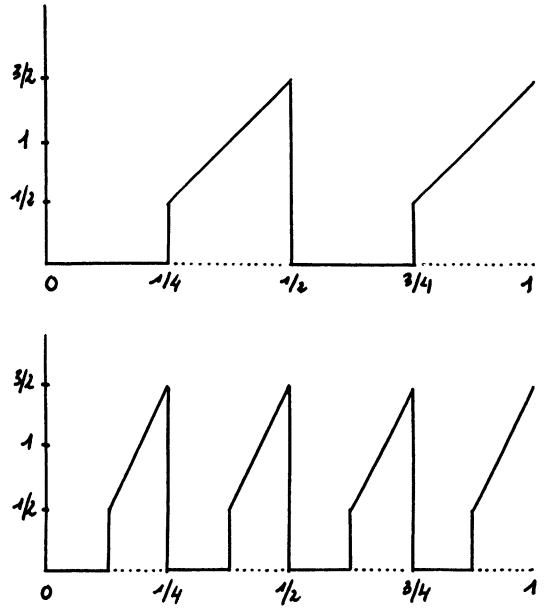

Figure 5 :

Nous avons représenté les graphes des variables aléatoires B^2 et B^3. On a mis ainsi en évidence la formation périodique de ces variables aléatoires. On voit aussi que la norme dans L^1 de $(B^n - A_1)$ est constante et égale à 1/16.