SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une nouvelle démonstration des théorèmes de section

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 155-159
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__155_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE SECTION

(P.A. Meyer)

Les " théorèmes de section" sont les théorèmes qui affirment que, dans une partie bien-mesurable (resp. accessible, prévisible) de $\mathbb{R}_+\times\Omega$, on peut faire passer le graphe d'un temps d'arrêt (resp. d'un temps d'arrêt accessible, prévisible). La démonstration usuelle de ces résultats est donnée dans [1] et [2] . Résumons la brièvement, pour faire comprendre l'intérêt de ce qui suit . Le théorème de section le plus simple est celui qui a été découvert en dernier : le cas prévisible. Il s'établit au moyen du théorème de capacitabilité de CHOQUET, appliqué à un pavage convenable sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (voir [2]). Le cas accessible est traité dans [1] ; la preuve est analogue, mais le théorème de CHOQUET dit que les ensembles analytiques par rapport à un certain pavage sont capacitables, et il faut montrer que les ensembles accessibles sont bien analytiques par rapport au pavage considéré. Cette partie de la démonstration, qui était immédiate dans le cas prévisible, est ici très fatigante (voir [1], VIII.T18). Quant au cas bien-mesurable, il n'est pas établi directement dans [1] à partir du théorème de CHOQUET, mais indirectement par un procédé de modification qui ramène au cas accessible. En fin de compte, c'est donc le cas bien-mesurable, le moins fin des trois, qui se démontre le plus difficilement.

CORNEA et LICEA viennent de publier dans le Z. für W. un article qui fait faire à la question des progrès considérables. D'abord, leur démonstration est unifiée : les trois théorèmes de section s'établissent en appliquant le théorème de CHOQUET à trois pavages simples. D'autre part, ils ont considérablement amélioré la démonstration du lemme d'analyticité du cas accessible. C'est le travail de CORNEA et LICEA qui a été exposé au séminaire, mais on ne le trouvera pas dans cette rédaction définitive. En effet, DELLACHERIE a trouvé depuis lors une démonstration encore plus naturelle et plus simple (reproduite ici avec sa permission). Les avantages de la méthode de DELLACHERIE apparaissent surtout dans le cas bien-mesurable ; dans les deux autres cas , surtout dans le cas accessible, il faut encore un peu se fatiguer. J'indique ci-dessous un procédé qui permet d'éviter le " lemme d'analyticité" du cas accessible.

1. UN THÉORÈME DE SECTION PRÉLIMINAIRE

Le théorème de section suivant est presque trivial : c'est pourtant la clef de tous les autres. Nous n'utiliserons plus le théorème de capacitabilité pour établir les autres.

THÉORÈME.- Soient $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet , A une partie de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (indistinguable d'une partie) mesurable pour la tribu produit, et ε un nombre >0. Soit A' la projection de A sur Ω. Il existe alors une variable aléatoire positive U à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ possédant les propriétés suivantes

1) Le graphe $[U]$ de U passe dans A (i.e., $(U(\omega),\omega)\in A$ pour tout ω tel que $U(\omega)<\infty$).

2) $P\{U<\infty\} > P(A')-\varepsilon$.

DEMONSTRATION.- Nous ne donnerons pas de détails : soit C la capacité $B\mapsto P^*(B')$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (où B' désigne la projection de B sur Ω) ; soit $\underline{\underline{J}}$ le pavage constitué par les réunions finies d'ensembles de la forme $H\times[r,s]$ ($H\in\underline{\underline{F}}$, $0\leq r\leq s<\infty$) . On vérifie que tout élément de la tribu produit est $\underline{\underline{J}}$-analytique. Le théorème de CHOQUET entraîne alors que A contient un élément L de $\underline{\underline{J}}_\delta$ dont la capacité dépasse $C(A)-\varepsilon$; le début U de L répond alors à la question.

APPLICATION.- Nous désignerons maintenant par μ la mesure sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ définie par

$$\mu(f) = \int f(U(\omega),\omega)I_{\{U<\infty\}}(\omega)P(d\omega)$$

si f est mesurable bornée sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Si B est une partie mesurable de $\mathbb{R}_+\times\Omega$, la relation $\mu(B)\geq a$ entraîne que la projection B' de B sur Ω a une probabilité au moins égale à a.

Rappelons une conséquence bien connue du théorème des classes monotones : soit $\underline{\underline{H}}$ un pavage sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, stable pour ($\cup f$, $\cap f$), et soit $\underline{\underline{M}}$ la classe monotone engendrée par $\underline{\underline{H}}$; supposons que le complémentaire de tout élément de $\underline{\underline{H}}$ appartienne à $\underline{\underline{M}}$. Alors $\underline{\underline{M}}$ est une tribu ; de plus si $H\in\underline{\underline{M}}$ et $\mu(H)>a$, il existe un ensemble $K\in\underline{\underline{H}}_\delta$ contenu dans H, et tel que $\mu(K)>a$.

2. LE CAS DES ENSEMBLES BIEN-MESURABLES

Désignons par A un ensemble bien-mesurable, et construisons la variable aléatoire U et la mesure μ comme ci-dessus. Désignons par $\underline{\underline{J}}$ l'ensemble des intervalles stochastiques de la forme $[S,T[$, où S et T sont des temps d'arrêt tels que $S\leqq T$, et désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble de parties stable pour $(\cup f, \cap f)$ engendré par $\underline{\underline{J}}$. On vérifie aussitôt que $\underline{\underline{H}}$ est constitué par les ensembles de la forme

$$[S_1,T_1[\cup [S_2,T_2[\;\ldots\cup\; [S_n,T_n[$$

où $S_1\leqq T_1\leqq S_2\leqq T_2\ldots$, et donc que $\underline{\underline{H}}$ est stable pour le passage au complémentaire. Appliquons alors le théorème rappelé plus haut : comme $\underline{\underline{J}}$ engendre la tribu bien-mesurable, A appartient à la classe monotone $\underline{\underline{M}}$ engendrée par $\underline{\underline{H}}$, donc A contient un ensemble $K\in\underline{\underline{H}}_\delta$ tel que $\mu(K) \geqq P(A')-\varepsilon$ (puisque $\mu(A)>P(A')-\varepsilon$). Mais tout élément de $\underline{\underline{H}}$ est fermé à droite : donc K est fermé à droite, et le début T de K est un temps d'arrêt dont le graphe passe dans A, et tel que $P\{T<\infty\}\geqq P(A')-\varepsilon$. Le premier théorème de section est établi.

3. LE CAS DES ENSEMBLES PRÉVISIBLES

Supposons maintenant que A soit prévisible , et construisons U et μ. Désignons par $\underline{\underline{J}}$ l'ensemble des intervalles stochastiques fermés $[S,T]$, où $S\leqq T$ et où S et T sont prévisibles ; soit $\underline{\underline{H}}$ le pavage stabilisé de $\underline{\underline{J}}$ pour $(\cup f, \cap f)$: on vérifie sans peine que $\underline{\underline{H}}$ est constitué par les ensembles de la forme

$$[S_1,T_1]\cup[S_2,T_2]\ldots \cup [S_n,T_n]$$

où les S_i et les T_i sont prévisibles, et où $S_1\leqq T_1\leqq\ldots\leqq S_n\leqq T_n$. Montrons que la classe monotone $\underline{\underline{M}}$ engendrée par $\underline{\underline{H}}$ est une tribu (qui coïncidera alors avec la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$, car $\underline{\underline{J}}$ engendre $\underline{\underline{P}}$). Il suffit évidemment de montrer que le complémentaire d'un intervalle $[S,T]$ appartient à $\underline{\underline{M}}$; c'est clair pour $]T,\infty[= \bigcup_n [T+\frac{1}{n},\infty]$. D'autre part, S est prévisible : il existe donc une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt $\leqq$ S, telle que $S_n<S$ (p.s.) sur $\{0<S<\infty\}$, et que $\lim_n S_n=S$. Posons $R_n=0$ si $S_n>0$, $R_n=+\infty$ si $S_n=0$; de même $R'_n=S_n$ si $S_n>0$, $R'_n=\infty$ si $S_n=0$. Les R_n,R'_n sont prévisibles et on a $[0,S[= \bigcup_n [R_n,R'_n]$, donc $[0,S[\in \underline{\underline{J}}_\sigma$.

Appliquons le théorème rappelé plus haut : comme $A\in\underline{\underline{M}}$ et $\mu(A)>P(A')-\varepsilon$, il existe une suite décroissante (K_n) d'éléments de $\underline{\underline{H}}$, dont l'intersection K est contenue dans A et satisfait à $\mu(K) \geq P(A')-\varepsilon$. Soient T_n, T les débuts de K_n,K respectivement ; comme K est un ensemble à coupes fermées contenu dans A, le graphe de T passe dans A, et $P\{T<\infty\} \geq P(A') -\varepsilon$ (noter qu'il suffit pour cela que les coupes de K soient fermées à droite). Il reste donc seulement à montrer que T est prévisible. Or les T_n sont prévisibles, et $\lim_n T_n = T$ <u>du fait que les coupes des K_n sont des ensembles fermés</u> ; la limite d'une suite croissante de temps d'arrêt prévisibles étant prévisible, le théorème de section pour le cas prévisible est établi.

4. LE CAS DES ENSEMBLES ACCESSIBLES

Nous avons deux possibilités pour traiter ce cas : la première consiste à reprendre exactement le cas précédent, en remplaçant partout <u>prévisible</u> par <u>accessible</u> . Tout se transpose alors exactement, à l'exception d'une seule propriété : le fait que si S est accessible l'intervalle $[0,S[$ appartient à $\underline{\underline{M}}$. Cette propriété est vraie : on en trouvera une démonstration horrible dans [1] (VIII.T18), et une bonne démonstration dans l'article de CORNEA et LICEA. Nous préférons ici suivre un autre chemin.

Nous prendrons pour $\underline{\underline{J}}$ l'ensemble des intervalles semi-ouverts $[S,T[$, où S et T sont accessibles, et nous raisonnerons, non pas comme dans le cas prévisible, mais comme dans le cas bien-mesurable. Du fait que les intervalles sont semi-ouverts, le passage au complémentaire ne pose aucun problème ; en raisonnant comme dans la seconde partie, nous construisons un temps d'arrêt T, début d'un ensemble accessible fermé à droite $K \subset A$ tel que $\mu(K) \geq P(A')-\varepsilon$. Tout revient à montrer que T est accessible ; or le graphe $[T]$ de T est un ensemble accessible, car $[T] = K \setminus (]T,\infty[)$, et $]T,\infty[$ est évidemment un ensemble accessible. Ainsi, nous sommes ramenés au problème suivant : est il vrai que si S est un temps d'arrêt, (S accessible) <=> ([S] est un ensemble accessible) ? Noter que l'implication => est évidente, car $[S]=\bigcap_n [S,S+\frac{1}{n}[$.

Pour établir l'implication <= , supposons $[S]$ accessible, et décomposons S en sa partie accessible S" et sa partie totalement inaccessible S' ; l'implication => étant vraie, S' est un temps d'arrêt totalement inaccessible dont le graphe, égal à $[S]\setminus[S'']$ est accessible . Reste à voir que cela entraîne que $S'=\infty$ p.s..

La remarque suivante présente un certain intérêt par elle même : soit V un temps d'arrêt quelconque , et soit $\underline{\underline{U}}$ l'ensemble des temps d'arrêt accessibles $U \leq V$ (ensemble non vide, puisque $0 \in \underline{\underline{U}}$) ; $\underline{\underline{U}}$ est stable pour l'opération $\vee$, et la limite d'une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{U}}$ appartient à $\underline{\underline{U}}$. Il est alors facile de montrer que $\underline{\underline{U}}$ contient un élément maximal U : si W est accessible et $W \leq V$, on a (p.s.) $W \leq U$. Si V est totalement inaccessible, on a $U < V$ sur $\{V < \infty\}$.

Soit alors un temps d'arrêt S' dont le graphe [S'] est un ensemble accessible, et qui n'est pas p.s. infini . Appliquons la démonstration faite plus haut, en prenant $A=[S']$: il existe une suite décroissante (K_n) d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ (chaque K_n est donc réunion finie d'intervalles stochastiques semi-ouverts à bornes accessibles) telle que l'intersection $K=\bigcap_n K_n$ soit contenue dans $A=[S']$, et que $\mu(K)>0$. Soient V_n le début de K_n , V le début de K ; associons à V le temps d'arrêt maximal U de la remarque précédente ; quitte à remplacer K_n par $K_n \cap [U,\infty[$, nous pouvons supposer $V_n \geq U$. Mais d'autre part V_n est accessible et $V_n \leq V$, donc $V_n \leq U$ p.s. Autrement dit, nous avons $V_n = U$ p.s. ; mais K_n est fermé à droite , donc contient le graphe $[V_n]=[U]$. En passant à l'intersection, on trouve $[S'] \supset K \supset [U]$; comme $\mu(K)>0$, et comme U est accessible, non p.s. égal à $+\infty$, nous voyons que la partie accessible de S' n'est pas p.s. égale à $+\infty$. Il en résulte que S' ne peut être totalement inaccessible, et le théorème est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] est le livre " Probabilités et Potentiel" ; [2], le Guide détaillé de la théorie générale des processus , dans le Séminaire de Probabilités II (Lect. Notes in M. vol.51). L'article de A.CORNEA et G.LICEA est paru récemment dans le Z. für Warscheinlichkeitstheorie, vol.10 , 1968, p. 198-202.