SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Résolvantes en dualité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 177-189

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__177_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités Février 1967

RÉSOLVANTES EN DUALITÉ

(par M. Weil)

I. INTRODUCTION.

Soient E un espace localement compact, à base dénombrable et $\mathcal{T}$ sa tribu borélienne. Nous désignerons par $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_K$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_K$) l'ensemble des fonctions numériques mesurables (resp. mesurables à support compact, continues, continues et nulles à l'infini, continues et à support compact) sur E. L'exposant $^+$ affecté à ces divers espaces indique que seules les fonctions positives sont considérées (par exemple $\mathcal{C}^+$). Un noyau sur E opèrera à gauche sur les fonctions, à droite sur les mesures (Af, μA, $A(x, dy)$) s'il n'est pas surmonté d'un $\hat{}$; par contre un noyau, avec $\hat{}$, opèrera à droite sur les fonctions et à gauche sur les mesures ($f\hat{A}$, $\hat{A}\mu$, $\hat{A}(dy, x)$). Si μ est une mesure sur E, on désigne par $\langle f, g\rangle_\mu$ l'expression $\int f(x)\, g(x)\, \mu(dy)$ où $f, g \in \mathcal{B}^+$. Les noyaux A et $\hat{A}$ seront dits <u>en dualité</u> par rapport à la mesure positive μ si :

$$\langle f, Ag\rangle_\mu = \langle f\hat{A}, g\rangle_\mu \qquad f, g \in \mathcal{B}^+.$$

Considérons alors deux résolvantes sous markoviennes $(U_p)_{p \geq 0}$ et $(\hat{U}_p)_{p \geq 0}$ et une mesure de Radon positive : m sur E. Le préfixe co- servira à distinguer les objets relatifs à la résolvante $(\hat{U}_p)$ (fonctions, mesures coexcessives...) de ceux relatifs à la résolvante (U_p).

Nous ferons, dans toute la suite, les hypothèses suivantes :

Hypothèse H : Pour tout $p>0$:

1) Les mesures $U_p(x, dy)$, $U_p(dy, x)$ sont absolument continues par rapport à m, quel que soit $x \in E$.

2) Les noyaux U_p et $\hat{U}_p$ sont en dualité par rapport à m.

Remarque(1) Ces hypothèses peuvent paraître fortes. En fait il suffit de les supposer pour $p=0$ et de savoir que l'image de $\mathcal{C}_K$ par U_o et $\hat{U}_o$ est dans $\mathcal{C}_o$.

En effet, supposons d'abord que U_o et $\hat{U}_o$ soient bornés, absolument continus par rapport à m et en dualité par rapport à m. Alors l'hypothèse H est satisfaite : les noyaux U_p et $\hat{U}_p$ majorés par U_o et $\hat{U}_o$ sont absolument continus par rapport à m; en outre si $f, g \in \mathcal{C}_K^+$ alors les fonctions analytiques réelles $\langle f, U_p g\rangle_m$ et $\langle f \hat{U}_p, g\rangle_m$ coïncident au voisinage de o, donc pour tout $p>0$. (cf. méthode de Hunt dans Meyer [1] chap. X T 10 page 256).

Supposons ensuite que U_o et $\hat{U}_o$ appliquent $\mathcal{C}_K$ dans $\mathcal{C}_o$ et satisfassent aux hypothèses d'absolue contuinité et de dualité par rapport à m, alors H est encore satisfaite. Soit en effet $a \in \mathcal{C}_o^+$, une fonction strictement positive, telle que $U_o a$ et $a \hat{U}_o$ appartiennent à $\mathcal{C}_o$ et posons

$$a_k = k\, a \wedge 1 \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$m_k = a_k \cdot m$$

$$W_o^k f = U_o (a_k f)$$

$$\hat{W}_o^k f = (a_k f)\, \hat{U}_o \quad .$$

On sait d'après (Meyer [1], chap. X, T.10) qu'il existe des résolvantes $(W_p^k)_p$, $(\hat{W}_p^k)_p$ telles que :

(1) Remarque dûe à R. CAIROLI.

$$W_o^k = \lim_{p \downarrow o} W_p^k$$

$$\hat{W}_o^k = \lim_{p \downarrow o} \hat{W}_p^k$$

Or W_o^k et $\hat{W}_o^k$ sont en dualité par rapport à m_k. Si donc f, g éléments de $\mathcal{E}_k^+$ ont leur support dans $\{a_k = 1\}$, on aura d'après ce qui précède :

$$\langle f \hat{W}_p^k , g \rangle_{m_k} = \langle f, W_p^k g \rangle_{m_k}$$

puisque W_o^k et $\hat{W}_o^k$ sont bornés ; donc

$$\langle f \hat{W}_p^k , g \rangle_m = \langle f, W_p^k g \rangle_m ,$$

puis en faisant tendre k vers l'infini, $f \hat{W}_p^k$ et $W_p^k g$ tendant en décroissant vers $f \hat{U}_p$ et $U_p g$ (Meyer [1], chap X, T.11) on a

$$\langle f \hat{U}_p, g \rangle_m = \langle f, U_p g \rangle_m$$

Ces préliminaires étant établis, nous allons montrer plusieurs résultats dûs à H. Kunita et T. Watanabe [1] et [2] . Ces résultats montreront que l'on peut toujours "bien" choisir les densités de U_p et $\hat{U}_p$ par rapport à m. Ils indiqueront également une certaine correspondance entre les mesures excessives et les fonctions coexcessives. Enfin pour terminer on montrera que pour toute mesure n excessive sur E il existe une résolvante $(\hat{V}_p)$ en dualité avec (U_p) par rapport à n.

2. RÉSOLVANTES EN DUALITÉ

Le premier théorème s'énonce :

Théorème 2.1. - (Kunita Watanabe [1]). Les hypothèses sont celles du § 1; on a alors :

1) La mesure m est à la fois surmédiane et cosurmédiane i.e.

$$m\,(p\,U_p) \leq m \text{ et } p\,\hat{U}_p\,m \leq m \qquad \text{pour tout } p$$

2) Pour chaque $p>0$ il existe une fonction positive mesurable $u_p(x,y)$ sur $E \times E$ telle que :

a) $$U_p(x, dy) = u_p(x,y)\, m(dy)$$

$$U_p(dx, y) = m(dx)\, u_p(x,y)$$

b) pour tout x, la fonction $u_p(x,\cdot)$ est p-coexcessive, la fonction $u_p(\cdot, x)$ est p-excessive. Une telle fonction est unique et

c) si $p<q$ $$u_p(x,y) = u_q(x,y) + (q-p)\int u_p(x,z)\, m(dz)\, u_q(z,y)$$

$$= u_q(x,y) + (q-p)\int u_q(x,z)\, m(dz)\, u_p(z,y).$$

Nous énoncerons d'abord un lemme qui est évident :

Lemme : Si la fonction mesurable f est m-négligeable alors on a $U_p f(x) = 0$ et $f\,\hat{U}_p(x) = 0$ pour tout x. En particulier $U_q f = f\,\hat{U}_q = 0$ pour tout q.

Il en résulte immédiatement que deux fonctions p-excessives (resp. p-coexcessives) égales m-p.p. sont égales partout.

De ceci déduisons l'unicité de la fonction u_p du théorème 2.1. Considérons deux fonctions u_p et u'_p satisfaisant au théorème 2.1. 2 a) et 2 b). Si $f \in \mathcal{B}^+$ on a alors :

$$U_p f(x) = \int u_p(x,y)\, f(y)\, m(dy)$$

$$\int u'_p(x,y)\, f(y)\, m(dy)$$

donc :

$$u_p(x,\cdot) = u'_p(x,\cdot) \qquad m \text{ p.p.}$$

donc partout puisque ce sont des fonctions p-excessives.

Démonstration du Théorème :

1) Soit f un élément de $\mathcal{B}^+$; on a

$$m(pU_p)f = \langle m(pU_p), f\rangle = \langle m, pU_p f\rangle = \langle 1, pU_p f\rangle_m$$

$$= \langle 1\ (p\hat{U}_p), f\rangle_m$$

$$\leqslant \langle 1, f\rangle_m \qquad \text{d'après le caractère sous markovien}$$

$$= \langle m, f\rangle$$

d'où $m(pU_p) \leqslant m$. On montre de même : $p\hat{U}_p\, m \leqslant m$.

2) Montrons maintenant l'existence d'une fonction u_p satisfaisant au théorème. Si F est une fonction mesurable sur $E \times E$ on posera :

$$U_p F(x,y) = \int U_p(x,dz)\, F(z,y)$$

$$F\hat{U}_p(x,y) = \int F(x,z)\, \hat{U}_p(dz,y).$$

Ces fonctions sont encore mesurables sur $E \times E$.

Choisissons une fonction $v_p(x,y)$ positive mesurable sur $E \times E$ telle que

$$U_p(x,dy) = v_p(x,y)\, m(dy) \qquad \text{ou encore}$$

$$U_p f(x) = \langle v_p(x,\cdot), f\rangle_m \qquad \text{si } f \in \mathcal{B}^+$$

Si $f \in \mathcal{B}^+$ on aura :

$$
\begin{aligned}
q < v_p(x,\cdot)\, \hat{U}_{p+q},\, f >_m &= q < v_p(x,\cdot),\, U_{p+q} f >_m \\
&= q\, U_p\, U_{p+q} f(x) \\
&= q\, U_{p+q}\, U_p f(x) \\
&\leq U_p f(x) \\
&= < v_p(x,\cdot), f >_m
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Donc

$$v_p(x,\cdot)\,(q\,\hat{U}_{p+q}) \lessdot v_p(x,\cdot) \qquad \text{m-p.p.}$$

La fonction $v_p(x,\cdot)$ est donc "m-presque p-cosurmédiane" , on en déduit que la fonction

$$u_p(x,\cdot) = \lim_{q \uparrow \infty} v_p(x,\cdot)\,(q\,\hat{U}_{p+q})$$

existe (limite croissante) et est p-coexcessive. La démonstration est la même que lorsque $v_p(x,\cdot)$ est cosurmédiane et on a $v_p(x,\cdot) = U_p(x,\cdot)$ sauf sur un ensemble de copotentiel nul. Enfin la fonction $u_p(x,y)$ est évidemment mesurable sur $E \times E$.

Alors la formule (2.1.) :

$$< v_p(x,\cdot)\, q\, \hat{U}_{p+q},\, f >_m = q\, U_{p+q}\, U_p f(x).$$

donne par passage à la limite lorsque $q \uparrow \infty$.

$$< u_p(x,\cdot),\, f >_m = U_p f(x). \tag{2.2}$$

donc

$$U_p(x, dy) = u_p(x,y)\, m(dy)$$

et par conséquent u_p est une densité à droite de U_p.

Si f, $g \in \mathcal{B}^+$, on a d'après (2.2).

$$\int m(dx)\, g(x)\, u_p(x,y)\, f(y)\, m(dy) = \int g(x)\, U_p(x,f)\, m(dx)$$

$$= \langle g,\ U_p f \rangle_m$$

$$= \langle g\, \hat{U}_p,\ f \rangle_m$$

donc

$$g\, \hat{U}_p(y) = \int m(dx)\, g(x)\, u_p(x,y) \qquad m\text{-p.p.}$$

Il suffit alors d'appliquer l'opérateur $q\, \hat{U}_{p+q}$ au deux membres

$$g\, \hat{U}_p\, (q\, \hat{U}_{p+q})(y) = \int m(dx)\, g(x)\, u_p(x,z)\, q\, (\hat{U}_{p+q})(dz,\ y)$$

et de faire tendre q vers l'infini pour avoir :

$$g\, \hat{U}_p(y) = \int m(dx)\, g(x)\, u_p(x,y).$$

car $u_p(x, \cdot)$ est p-coexcessive. La fonction u_p est donc densité à gauche pour $\hat{U}_p$.

Il reste à montrer que $u_p(\cdot, y)$ est p-excessive. Or

$$u_p(x,y)\, (q\, \hat{U}_{p+q}) = q \int u_p(x,z)\, m(dz)\, (q\, u_{p+q}(z,y))$$

$$= q\, U_p\, (u_{p+q}(x,y)).$$

Le deuxième membre, donc le premier, est une fonction p-excessive. Mais si $q \uparrow \infty$ le premier membre tend en croissant vers $u_p(x,\cdot)$, et comme la limite d'une suite croissante de fonctions p-excessivesest p-excessive, on en

déduit que $u_p(\cdot, y)$ est p-excessive.

Enfin, pour x fixé et $p<q$, l équation résolvante en U_p donne :

$$u_p(x,y) = u_q(x,y) + (q-p) \int u_p(x,z)\, m(dz)\, u_q(z,y) \quad m\text{-p.p.}$$

mais les deux membres sont des fonctions q-coexcessives (en y) . Ils sont donc égaux partout, ce qui achève la démonstration.

Remarque : Cette dernière relation entraîne que u_p croit avec $\frac{1}{p}$. On en déduit l'existence de la densité u_o de U_o et $\hat{U}_o$ par rapport à m.

3 . RELATION ENTRE MESURES EXCESSIVES ET FONCTIONS COEXCESSIVES .

Si μ est une mesure positive sur E et si

$$\mu \hat{U}_p(y) \stackrel{=}{} \int \mu(dx)\, u_p(x,y)$$

alors il est clair que cette fonction $\mu \hat{U}_p$ est p-coexcessive et que c'est une densité de la mesure excessive μU_p par rapport à m. On a la réciproque suivante.

Théorème 3.1. - (Kunita et T. Watanabe [2]). Soit n une mesure de Radon positive sur E, excessive par rapport à la résolvante (U_p) i.e. :

(3.3) 1) $n(pU_p) \leqslant n$ pour tout $p > 0$

:

(3.4) 2) $\lim_{p \uparrow \infty} n(pU_p) = n$ (voir remarque plus loin).

Il existe alors une fonction v coexcessive unique telle que :

$$n(dx) = v(x)\, m(dx).$$

Remarque : les mesures $n(pU_p)$ croissent avec p (d'après (3.3) et l'équation résolvante). Il existe donc une mesure $\bar{n}$ telle que :

$$\langle n\,(pU_p),\ f\rangle \xrightarrow[p\uparrow\infty]{} \langle \bar{n}, f\rangle \qquad\qquad f \in \mathcal{B}^+$$

Si de plus, on suppose que $p U_p\, f \xrightarrow[p\uparrow\infty]{} f$ pour $f \in \mathcal{C}_K^+$ alors on a d après Ie lemme de Fatou :

$$\lim_p \inf\ \langle n(p U_p),\ f\rangle \geqslant \langle n, f\rangle$$

donc $n \leqslant \bar{n}$ et par suite $n = \bar{n}$. Dans ce cas la condition (3. 4) est inutile.

Démonstration du théorème :

Posons :

$$v_p(y) = p \int n(dx)\ u_p(x, y)\ .$$

C'est une fonction p-coexcessive et on a

$$n\,(p U_p)\,(dy) = v_p(y)\ m\,(dy).$$

Comme $n\,(p U_p)$ croit avec p, la relation $p \leqslant q$ entraine $v_p \leqslant v_q$ m-p. p. mais les deux membres sont des fonctions q-coexcessives, par conséquent $v_p \leqslant v_q$ partout. Donc la fonction :

$$v = \lim_{p\uparrow\infty} v_p$$

existe, et on vérifie que c'est une densité de n par rapport à m. De plus c'est une fonction coexcessive : en effet si $f \in \mathcal{B}^+$:

$$\begin{aligned}
\langle v_p\,(q U_q),\ f\rangle_m &= \langle v_p\ ,\ q U_q\, f\rangle_m \\
&= \langle n\,(p U_p)\ ,\ q U_q\, f\rangle \\
&\leqslant \langle n,\ q U_q\, f\rangle \\
&= \langle n\,(q U_q)\ ,\ f\rangle \\
&= \langle v_q\ ,\ f\rangle_m \\
&\leqslant \langle v\ ,\ f\rangle_m
\end{aligned}$$

Lorsque $p \uparrow \infty$ on aura :

$$\langle v\,(q\hat{U}_q),\ f\rangle_m \leqslant \langle v, f\rangle_m$$

donc

$$v\,(q\hat{U}_q) \leqslant v \qquad \text{m-p.p.}$$

Par conséquent la fonction w :

$$w = \lim_{q\uparrow\infty} v(q\hat{U}_q) = \lim_{q\uparrow\infty}\ \lim_{p\uparrow\infty} v_p(q\hat{U}_q)$$

est coexcessive. Comme les deux limites sont croissantes, on peut les intervertir :

$$\begin{aligned} w &= \lim_{p\uparrow\infty}\ \lim_{q\uparrow\infty} v_p(q\hat{U}_q) \\ &= \lim_{p\uparrow\infty}\ \lim_{r\uparrow\infty} v_p((p+r)\hat{U}_{p+r}) \\ &= \lim_{p\uparrow\infty}\ \lim_{r\uparrow\infty} v_p(r\hat{U}_{p+r}) \\ &= v \end{aligned}$$

c. q. f. d.

4. CHANGEMENT DE MESURE DE BASE.

Le théorème 3.2 va nous permettre de déduire le

Théorème 4.1 (H. Kunita et T. Watanabe [2]). Soit n une mesure de Radon positive sur E. Il existe alors une résolvante $(\hat{V}_p)$ sur E en dualité avec la résolvante (U_p) par rapport à la mesure n.

Démonstration : Posons

$$\hat{V}_p(dx, y) = \begin{cases} v(x)\,\hat{U}_p(dx, y)\dfrac{1}{v(y)} & \text{si } y \in \{0 < v < \infty\} \\ 0 & \text{si } y \in \{v = 0\} \\ \dfrac{1}{p}\,\varepsilon_y(dx) & \text{si } y \in \{v = \infty\} \end{cases}$$

Nous avons :

$$f\hat{V}_p(y) = \begin{cases} (f\,v)\,\hat{U}_p(y)\frac{1}{V(y)} & \text{si } y \in \{0 < v < \infty\} \\ 0 & \text{si } y \in \{v = 0\} \\ \frac{1}{p} f(y) & \text{si } y \in \{v = \infty\} \end{cases}$$

$(\hat{V}_p)$ est bien une résolvante : en effet il suffit de vérifier l'équation résolvante :

$$f\hat{V}_p - f\hat{V}_q + (p - q)\, f\hat{V}_p \hat{V}_q = 0 \qquad f \in \mathcal{B}^+.$$

Or si $y \in \{v = 0\}$ c'est évident, si $y \in \{v = \infty\}$ on a :

$$(q - p)\, f\hat{V}_p \hat{V}_q(y) = (q - p)\frac{1}{p\,q} f(y)$$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) f(y)$$

$$= f\hat{V}_p(y) - f\hat{V}_q(y),$$

tandis que lorsque $y \in \{0 < v < \infty\}$:

$$f\hat{V}_p \hat{V}_q(y) = \int f\hat{V}_p(x)\, \hat{V}_q(dx, y)$$

$$= \int f\hat{V}_p(x)\, v(x)\, \hat{U}_q(dx, y)\frac{1}{v(y)}$$

$$= \int_{\{0 < v < \infty\}} f\hat{V}_p(x)\, v(x)\, \hat{U}_q(dx, y) \cdot \frac{1}{v(y)} \qquad \text{car } \{v = \infty\} \text{ est m-négligeable}$$

$$= \int_{\{0 < v < \infty\}} (f\,v)\, U_p(x)\frac{1}{v(x)}\; v(x)\, U_q(dx, y)\frac{1}{v(y)}$$

Mais $v\,\hat{U}_p = 0$ sur $\{v = 0\}$ puisque $v\,(p\,\hat{U}_p) \leq v$. D'autre part

On a : $f\,v = v$ sur $\{v = 0\}$, donc $f\,v = \sup_{k\uparrow\infty} ((f\,v) \wedge k\,v)$, d'où

$$(f\,v)\,\hat{U}_p = v\,\hat{U}_p = 0 \text{ sur } \{v = 0\}$$

Par conséquent

$$f\,\hat{V}_p\,\hat{V}_q\,(y) = \int (f\,v)\,\hat{U}_p\,(x)\,\hat{U}_q\,(dx, y)\frac{1}{v\,(y)}$$

$$= \frac{(f\,v)\,\hat{U}_q\,(y) - (f\,v)\,\hat{U}_p\,(y)}{p - q}\cdot\frac{1}{v\,(y)}$$

$$= \frac{1}{p - q}\,((f\,v)\,\hat{V}_q\,(y) - (f\,v)\,\hat{V}_p\,(y)) \quad \text{si } y \in \{0 < v < \infty\}$$

(V_p) est donc bien une résolvante et il est clair qu'elle est sous markovienne.

Il reste à montrer la propriété de dualité.

$$\langle f\,\hat{V}_p,\ g\rangle_n = \langle f\,\hat{V}_p,\ g\,V\rangle_m \qquad f, g \in \mathcal{B}^+$$

$$= \int_E f\,\hat{V}_p\,(y)\,g\,(y)\,v\,(y)\,m\,(dy)$$

$$= \int_{\{0 < v < \infty\}} (f\,v)\,\hat{U}_p\,(y)\,\frac{1}{v\,(y)}\,g\,(y)\,v\,(y)\,m\,(dy)$$

$$= \int_E (f\,v)\,\hat{U}_p\,(y)\,g\,(y)\,m\,(dy)$$

par le même raisonnement que ci-dessus. Donc :

$$\langle f\,\hat{V}_p,\ g\rangle_n = \langle (f\,v)\,\hat{U}_p,\ g\rangle_m$$

$$= \langle f\,v,\ U_p\,g\rangle_m$$

$$= \langle f,\ U_p\,g\rangle_n$$

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

H. KUNITA ET T. WATANABE :

[1] Markoff processes and Martin boundaries : Ill. J. of Math. n° 9, 1965 (485-526).

[2] On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory : J. of Math and Mech. n° 15,1966 (393-434).

P.A. MEYER :

[1] Probabilités et potentiel , Hermann, Paris, 1966.

Université de Strasbourg Départemt de Mathématique Bibliothèque

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.