SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Retournement du temps dans les processus markoviens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 166-176

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__166_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités Novembre 1966

RETOURNEMENT DU TEMPS DANS LES PROCESSUS MARKOVIENS

(par M. Weil)

1. - INTRODUCTION .

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus markovien de fonction de transition $(P_t)_{t>0}$ et de loi initiale μ , et soit $U_o = \int_0^\infty P_t dt$. Si le noyau U_o est un noyau diffusion propre, si le semi-groupe (P_t) est fellérien et s'il existe un semi-groupe fellérien $(\hat{P}_t)$ en dualité avec (P_t) par rapport à la mesure μU_o , NAGASAWA (Nagoya Math. J. 24 (1964) 177-204) montre que le processus obtenu par retournement du temps à partir d'un certain "temps de retour" R est markovien, homogène dans le temps et que sa fonction de transition est justement $(\hat{P}_t)$; en particulier elle ne dépend pas de R .

2. - NOTATIONS .

Soient E un espace localement compact à base dénombrable, ∂ un point isolé adjoint à E et $E' = E \cup \{\partial\}$. On note $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) la tribu borélienne sur E (resp. E') . Toutes les fonctions définies sur E seront étendues à E' en leur donnant la valeur 0 au point ∂ .

Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe de noyaux sous-markoviens sur $(E,\mathcal{B})$. Ce semi-groupe est rendu markovien sur $(E',\mathcal{B}')$ de la manière canonique. On le supposera fellérien.

Un processus markovien, de loi initiale μ, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition sera un système $(W, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ où $(W, \mathcal{G}, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ est un espace probabilisé, où $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{G}$, où chaque Y_t est une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable à valeurs dans $(E',\mathcal{B}')$, et où la loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ vérifie les propriétés :

1) $\underset{\sim}{P}^{\mu}\{Y_o \in A\} = \mu(A)$ $\qquad (A\in\mathcal{B}')$

2) $\underset{\sim}{E}^{\mu}[f\circ Y_t \mid \mathcal{G}_s] = P_{t-s}(Y_s, f)$ $\qquad (f\geq 0,\ \mathcal{B}'\text{-mesurable};\ s\leq t)$.

La famille de systèmes $(W, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), (Y_t), \underset{\sim}{P}^{\mu})_{\mu\in\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des lois de probabilité sur E', est une réalisation de (P_t) si :

a) Pour chaque loi $\mu\in\mathcal{P}$ le processus obtenu en munissant $(W,\mathcal{G})$ de la loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ est un processus markovien admettant μ comme loi initiale.

b) Pour tout $A\in\mathcal{G}$ la fonction : $x \longmapsto \underset{\sim}{P}^{x}(A)$ est mesurable (on note $\underset{\sim}{P}^{x}$ la mesure $\underset{\sim}{P}^{\epsilon_x}$), et on a :

$$\underset{\sim}{P}^{\mu}(A) = \int \underset{\sim}{P}^{x}(A)\,\mu(dx).$$

Réalisation canonique.

Nous allons maintenant particulariser le système $(W,\mathcal{G},(\mathcal{G}_t),(Y_t),\underset{\sim}{P}^{\mu})$. Pour cela, nous désignerons par Ω l'ensemble des applications continues à droite, et ayant une limite à gauche, de $\mathbb{R}_+$ dans E' qui gardent la valeur ∂ à partir du premier instant où elles l'atteignent. On désigne par $X_t(\omega)$ la valeur d'un élément ω de Ω à l'instant t, par $\zeta(\omega)$ la durée de vie :

$\inf (t : X_t(\omega) = \partial)$ et par $\mathcal{B}^\circ$ (resp. $\mathcal{B}_t^\circ$) la tribu engendrée par les applications X_s , $s \in \mathbb{R}_+$ (resp. X_s, $s \leq t$) .

Le semi-groupe (P_t) étant fellérien, pour toute loi μ sur $(E', \mathcal{B}')$ il existe une loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ sur $(\Omega, \mathcal{B}^\circ)$ pour laquelle le processus (X_t) est markovien et admet μ comme loi initiale .

Cette loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ est unique . Soient $\mathcal{B}^\mu$ la tribu obtenue en complétant $\mathcal{B}^\circ$ pour la loi $\underset{\sim}{P}^\mu$, et $\mathcal{B}_t^\mu$ la tribu constituée des éléments de $\mathcal{B}^\mu$ ne différant d'un élément de $\mathcal{B}_t^\circ$ que par un ensemble $\underset{\sim}{P}^\mu$-négligeable . Désignons encore par

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}} \mathcal{B}^\mu \qquad\qquad \mathcal{B}_t = \bigcap_{\mu} \mathcal{B}_t^\mu \quad .$$

Si l'on désigne toujours par $\underset{\sim}{P}^\mu$ l'extension de cette loi à $\mathcal{B}^\mu$ ou $\mathcal{B}$, on vérifie que le système $(\Omega , \mathcal{B} , (\mathcal{B}_t) , (X_t), \underset{\sim}{P}^\mu)$ est une réalisation de (P_t) qu'on appellera la réalisation canonique de (P_t) .

3 . - NOYAUX EN DUALITÉ .

Définition - Deux noyaux sous-markoviens M et $\hat{M}$ sont en dualité par rapport à une mesure m sur E si, quelles que soient les fonctions mesurables et bornées f , g sur E , on a la relation :

$$\int Mf . g \, dm = \int f . \hat{M}g \, dm \quad .$$

Comme exemple très simple, on peut considérer les deux noyaux :

$$M(x, dy) = p(x, y) \, m(dy) \qquad \hat{M}(x, dy) = p(y, x) \, m(dy)$$

qui sont en dualité par rapport à la mesure m . ($p(x, y)$ désigne ici une fonction positive mesurable de (x, y)) .

Deux semi-groupes (resp. résolvante) $(P_t)_{t \geq 0}$ et $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ (resp. $(U_p)_{p \geq 0}$ et $(\hat{U}_p)_{p \geq 0}$) sur l'espace $(E, \mathcal{B})$ seront dits <u>en dualité</u> par rapport à une mesure m sur E si les noyaux P_t et $\hat{P}_t$ (resp. U_p et $\hat{U}_p$) sont en dualité par rapport à m , pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (resp. $p \in \mathbb{R}_+$) .

<u>Nous supposerons dans toute la suite que μ est une loi de probabilité sur E , que (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont deux semi-groupes fellériens sur E , de résolvantes respectives $(U_p$ et $(\hat{U}_p)$, que la mesure $m = \mu U_o$ est de Radon, et que (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont en dualité par rapport à m .</u>

Nous allons maintenant définir les instants où l'on pourra retourner le processus, de manière à obtenir encore un processus markovien et homogène dans le temps .

4. - TEMPS DE RETOUR .

<u>Définition 4.1</u> .- Une application R de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ est un temps de retour si elle possède les propriétés suivantes :

(r_o) R est $\mathcal{B}$-mesurable et $R \leq \zeta$

(r_1) si $s < R(\omega)$ alors $R(\omega) = s + R(\theta_s(\omega))$

(r_2) si $s > R(\omega)$ alors $R(\theta_s(\omega)) = 0$.

Intuitivement, un temps de retour est l'instant où un certain phénomène se produit pour la dernière fois .

Il est clair que la durée de vie ζ du processus (X_t) est un temps de retour .

Comme autre exemple, en désignant par

$$S_D(\omega) = \sup\,(t \geq 0\ ,\ X_t(\omega) \in D) \qquad D \subset E$$
$$= 0 \quad \text{si l'ensemble de ces } t \text{ est vide}$$

(le dernier temps de sortie du sous-ensemble D de E) , nous avons la

Proposition 4. 1. - Le dernier temps de sortie d'un sous-ensemble borélien D de E est un temps de retour .

Démonstration .

Les axiomes (r_1) et (r_2) sont évidents . Montrons l'axiome (r_o) lorsque D est ouvert : on a

$$\{ t < S_D \} = \{ \text{il existe } r \in \mathbb{Q}_+ ,\ t < r ,\ X_r(\omega) \in D \}$$

car les trajectoires du processus sont continues à droite . Le dernier ensemble appartient à $\mathfrak{F}$.

Lorsque D n'est pas ouvert, il faut utiliser la théorie des ensembles analytiques .

5. - RETOURNEMENT DU TEMPS DANS LES PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGÈNES .

Soit R un temps de retour ; posons :

$$(5.1) \qquad Y_t(\omega) = \begin{cases} \partial & \text{si } R(\omega) = +\infty \quad \text{ou } R(\omega) \leq t \\ X_{R(\omega)-t}(\omega) & \text{si } t < R(\omega) < \infty \end{cases}$$

et désignons par $\hat{X}_t(\omega)$ la limite à droite $Y_{t_+}(\omega)$.

Définition 5.1 .- Le processus $((\hat{X}_t)_{t>0} , \underset{\sim}{P}^{\mu})$ défini sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{F})$ est appelé le processus en retournant $(X_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ à l'instant R (ou, plus brièvement, le processus retourné à R).

Le caractère markovien du processus $(\hat{X}_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ se déduira du lemme suivant , intéressant par lui-même .

Lemme 5.1.- Soient $(t_i)_{1 \le i \le n}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs, et $f_1, \ldots, f_n$, g une suite de fonctions sur E' , continues , bornées et nulles au point ∂ . On a alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{E}^{\mu} \left[\int_{t_n}^{\infty} dt\, e^{-bt}\, e^{-aR}\, f_1 \circ Y_{t_1} \cdots f_n \circ Y_{t_n}\, g \circ Y_t \right] \\ &= \underset{\sim}{E}^{\mu} \left[\int_0^{\infty} ds\, e^{-as}\, g \circ X_s\, \underset{\sim}{E}^{X_s} \left[e^{-(a+b)R}\, f_1 \circ Y_{t_1} \cdots f_n \circ Y_{t_n} \right] \right] . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Preuve . On a

$$I = \int_{t_n}^{\infty} dt\, e^{-bt}\, e^{-aR}\, f_1 \circ Y_{t_1} \cdots f_n \circ Y_{t_n} \cdot g \circ Y_t$$

$$= 1_{\{t_n < R < \infty\}} \int_{[t_n, R[} dt\, e^{-bt}\, e^{-aR}\, f_1 \circ Y_{t_1} \cdots f_n \circ Y_{t_n}\, g \circ Y_t$$

car sur l'ensemble $\{t \ge R\}$ (resp. $\{R \le t_n\}$, $\{R = \infty\}$) nous avons :

$$g \circ Y_t = g(\partial) = 0 \qquad \text{d'après (5.1)}$$

(resp. $f_n \circ Y_{t_n} = f_n(\partial) = 0$ d'après (5.1) ,

$e^{-aR} = 0$)

ce qui entraîne l'apparition de l'indicatrice et la restriction de l'intervalle d'intégration .

En posant $s = R - t$, I s'écrira :

$$I = 1_{\{t_n<R<\infty\}} \int_0^{R-t_n} ds\, e^{-b(R-s)}\, e^{-aR}\, f_1 \circ Y_{t_1} \cdots f_n \circ Y_{t_n}\, g \circ Y_{R-s} \ .$$

Mais nous avons :

$$g \circ Y_{R-s} = g \circ X_s \ .$$

D'autre part :

$$e^{-b(R-s)}\, e^{-aR} = e^{-b(R\circ\theta_s)}\, e^{-a(S+R\circ\theta_s)}$$

$$= e^{-as}\, e^{-(a+b)R\circ\theta_s}$$

car $s < R$ sur $\{t_n<R<\infty\}$ puisque $s \le R - t_n < R$.

Enfin on a la relation :

$$f_i \circ Y_{t_i} = f_i \circ Y_{t_i} \circ \theta_s \qquad \text{sur } \{t_n<R<\infty\} \ .$$

En effet, sur ce dernier ensemble, on a $Y_{t_i}(\omega) = X_{R(\omega)-t_i}(\omega)$. Or $Y_{t_i}(\theta_s(\omega))$ est, soit égal à $X_{R(\theta_s(\omega))-t_i}(\theta_s(\omega))$, soit égal à ∂ d'après (5.1) ; mais cette dernière possibilité est à exclure car elle a lieu lorsque $R(\theta_s(\omega))$ est infini (resp. inférieur à t_i) et ce n'est pas possible puisque $s<R(\omega)<\infty$ (resp. puisque $s<R(\omega)$, ce qui entraîne : $R \circ \theta_s(\omega) = R(\omega) - s$, mais $R(\omega) - s > t_i$ car $s<R(\omega) - t_n$). Par conséquent $Y_{t_i}(\theta_s(\omega))$ est égal à $X_{R(\omega)-t_i}(\omega)$.

Nous avons donc obtenu :

$$I = 1_{\{t_n<R<\infty\}} \int_0^{R-t_n} ds\ e^{-as}\, g \circ X_s\ e^{-(a+b)R\circ\theta_s}\ f_1 \circ Y_{t_1} \circ \theta_s \cdots f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s \ .$$

Dans cette expression, l'indicatrice peut être supprimée et l'intégration peut avoir lieu de zéro à l'infini . En effet d'une part, pour l'indicatrice, ou bien R est infini et par conséquent $R \circ \theta_s$ l'est également, ou bien $R \leq t_n$, mais comme $s < R$ dans l'intégrant, cela entraîne $R \circ \theta_s \leq t_n$: dans les deux cas, la fonction sous le signe intégral :

$$e^{-(a+b)R \circ \theta_s} f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s$$

est nulle . Nous pouvons donc supprimer l'indicatrice .

D'autre part, pour l'intégration de zéro à l'infini , $f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s$ n'est non nul que si $Y_{t_n} \circ \theta_s$ est différent de ∂ , par conséquent. si $t_n < R \circ \theta$. Trois cas sont alors possibles : ou $s < R$ et donc $R \circ \theta_s = R - s$ et par suite $s < R - t_n$, ou $s = R$ et alors la fonction sous le signe somme à une intégrale nulle sur l'ensemble $\{s = R\}$, ou enfin $s > R$, mais ce cas est exclu car il entraînerait que $R \circ \theta_s = 0$ et donc $t_n < 0$ ce qui est absurde . On peut donc intégrer de zéro à l'infini .

La démonstration du lemme 5.1 s'achève alors en considérant l'espérance $\underset{\sim}{E}^{\mu}[I]$ et en utilisant la propriété de Markov simple .

Corollaire 5.1.- Soient $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs , et $f_1, \ldots, f_n, g$ une suite de fonctions sur E' , continues, bornées et nulles au point ∂ . On a alors la relation suivante :

$$\underset{\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_{t_n}^{\infty} dt\ e^{-bt} e^{-aR} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ g \circ \hat{X}_t\Big]$$

(5.3)

$$= \underset{\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_0^{\infty} ds\ e^{-as}\ g \circ X_s\ \underset{\sim}{E}^{X_s}\big[e^{-(a+b)R} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\big]\Big] .$$

Preuve . Cela résulte du fait que le processus (X_t) est continu à droite et à des limites à gauche, et par conséquent l'ensemble des t tels que $\underset{\sim}{P}^{\mu}\{Y_t \neq \hat{X}_t\} > 0$ est dénombrable .

Ce corollaire va nous permettre de montrer le résultat principal de cet exposé .

Théorème 5.1.- Soit $((X_t), \underset{\sim}{P}^{\mu})$ un processus markovien, homogène dans le temps et admettant comme fonction de transition un semi-groupe fellérien (P_t) . Supposons que le noyau $U_o = \int_0^{\infty} P_t \, dt$ soit un noyau diffusion propre et qu'il existe un semi-groupe fellérien $(\hat{P}_t)$ qui soit en dualité avec (P_t) par rapport à la mesure μU_o . Soit enfin R un temps de retour .

Alors le processus $(\hat{X}_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ retourné du processus $(X_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ à l'instant R est un processus markovien, homogène dans le temps et dont la fonction de transition est $(\hat{P}_t)$.

On notera que $(\hat{X}_t)$ n'est défini que pour $t>0$ en général .

On remarquera que les résolvantes (U_p) , $(\hat{U}_p)$, associées aux semi-groupes (P_t) , $(\hat{P}_t)$, sont également en dualité par rapport à la mesure μU_o .

Démonstration du théorème .-

Il suffit de montrer l'égalité, où $0 < t < u$:

$$A(t,u) = B(t,u) \tag{5.4}$$

avec

$$A(t,u) = \underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n} \; g \circ \hat{X}_t \; h \circ \hat{X}_u]$$

et

$$B(t,u) = \underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n} \; g \circ \hat{X}_t \; \hat{P}_{u-t}(\hat{X}_t, h)]$$

où $f_1, \ldots, f_n, g, h$ sont des fonctions sur E', continues, bornées et nulles en ∂ et où la suite $(t_1, t_2, \ldots, t_n, t, u)$ vérifie : $0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq t < u$.

(En effet, cela entraînera la même relation lorsque les $f_1, \ldots, f_n$, g, h sont continues sur E).

Les deux membres de (5.4) sont des fonctions continues à droite en u sur $]t, \infty[$ car le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ est fellérien et la mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ est bornée. Il suffit donc de prouver l'égalité de leurs transformées de Laplace $\mathcal{L}A$ et $\mathcal{L}B$ en u.

En utilisant le corollaire 5.1 on obtient :

$$\mathcal{L}A = \underset{\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_t^{\infty} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\, g \circ \hat{X}_t\, e^{-au}\, h \circ X_u\, du\Big]$$

$$= \underset{\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_0^{\infty} h \circ X_s\, ds\; E^{X_s}\big[e^{-aR} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\; g \circ \hat{X}_t\big]\Big] \tag{5.5}$$

$$= \int (\mu U_o)(dx)\; h(x)\, w_t(x)$$

où $w_t(x) = \underset{\sim}{E}^{x}\big[e^{-aR} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\, g \circ \hat{X}_t\big]$.

D'autre part :

$$\mathcal{L}B = \int_t^{\infty} \underset{\sim}{E}^{\mu}\big[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\; g \circ \hat{X}_t\; \hat{P}_{u-t}(\hat{X}_t, h)\big]\, e^{-au}\, du$$

$$= \underset{\sim}{E}^{\mu}\big[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\; g \circ X_t\; \hat{U}_a h \circ \hat{X}_t\big]\, e^{-at} \tag{5.6}$$

Or les deux fonctions (5.5) et (5.6) sont continues à droite en t sur $]t_n, \infty[$: pour (5.6) cela résulte du caractère fellérien du semi-groupe $(\hat{P}_t)$: $\hat{U}_a h$ est une fonction continue ; tandis que pour (5.5) c'est évident. Par conséquent, il suffit de vérifier l'égalité de leur transformée de Laplace $\mathcal{L}\mathcal{L}A$ et $\mathcal{L}\mathcal{L}B$ en t. Mais on a

$$\int_{t_n}^{\infty} e^{-bt}\ w_t(x)\ dt = \underset{\sim\sim}{E}^x\Big[\int_{t_n}^{\infty} e^{-bt}\ dt\ e^{-aR}\ f_1\circ\hat{X}_{t_1}\dots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ \ g\circ\hat{X}_t\Big]$$

$$= \underset{\sim\sim}{E}^x\Big[\int_0^{\infty} e^{-as}\ g\circ X_s\ ds\ \underset{\sim\sim}{E}^{X_s}\big[\,e^{-(a+b)R} f_1\circ\hat{X}_{t_1}\dots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\,\big]\Big]$$

d'après le corollaire 5.1 . La dernière expression vaut :

$$U_a\,(x\ ,\ g\ .\ k_{ab})$$

avec

$$k_{a\,b}(x) = \underset{\sim\sim}{E}^x\big[\,e^{-(a+b)R}\ f\circ\hat{X}_{t_1}\dots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\,\big]\ .$$

On en déduit que :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}A = \int(\mu U_o)(dx)\ h(x)\ \ U_a(x, g, k_{a\,b})$$

$$= \int(\mu\, U_o)(dx)\ \hat{U}_a\,(x,h)\ g(x)\ k_{a\,b}(x)$$

puisque les résolvantes (U_p) et $(\hat{U}_p)$ sont en dualité par rapport à $\mu\, U_o$.
Enfin, en utilisant à nouveau le corollaire 6.1 $\mathcal{L}\mathcal{L}B$ est égal à :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}B = \underset{\sim\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_{t_n}^{\infty} dt\ e^{-bt}\ \ e^{-at}\ f_1\circ\hat{X}_{t_1}\dots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ \ \ \hat{U}_a\,h\circ X_t\ \Big]$$

$$= \underset{\sim\sim}{E}^{\mu}\Big[\int_0^{\infty} g\circ X_s\ \ \hat{U}_a\ h\circ X_s\ \underset{\sim\sim}{E}^{X_s}\big[\,e^{-(a+b)R}\ f_1\circ\hat{X}_{t_1}\dots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\,\big]\Big]$$

$$= \int(\mu\, U_o)(dx)\ g(x)\ \hat{U}_a\,h(x)\,k_{a\,b}(x)$$

$$= \mathcal{L}\mathcal{L}A\ .$$

Cela termine la démonstration .