SÉMINAIRE PAUL KRÉE

PAUL KRÉE

Description lagrangienne d'un boson scalaire à l'aide d'un triplet nucléaire

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 1, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A1_0>

© Séminaire Paul Krée
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 1, 18 p.

DESCRIPTION LAGRANGIENNE D'UN BOSON SCALAIRE A L'AIDE D'UN TRIPLET NUCLÉAIRE

par Paul KRÉE

Le but de cet exposé est de montrer comment les triplets nucléaires interviennent naturellement dans la mécanique lagrangienne (dite aujourd'hui "symplectique") des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté.

(0.1) Triplets nucléaires complexes.

Un triplet nucléaire complexe $\mathcal{C} = (S \subset Z \subset {}'S)$ est la donnée d'une injection continue j, à image dense, d'un espace nucléaire complet S dans un espace de Hilbert séparable Z identifié à son antidual, et de l'adjointe de j identifiant Z à un sous-espace dense de l'antidual ${}'S$ de S.

La catégorie des triplets nucléaires complexes (TNC) a pour objets de tels triplets. Un morphisme de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1 = (S_1 \subset Z_1 \subset {}'S_1)$ est la donnée d'une application linéaire continue $\alpha : {}'S \longrightarrow {}'S_1$, induisant une application linéaire continue de S dans S_1, ce morphisme est noté α. On définit de même la catégorie des triplets nucléaires réels (TNR) $\mathcal{U} = (S_r \subset X \subset S_r')$, et l'on a un foncteur de complexification.

(0.2) Triplets conucléaires complexes.

Pour des raisons techniques, qui apparaissent dans l'exposé 2, on utilise aussi en théorie quantique des champs la catégorie (T'NC) des triplets conucléaires complexes $\mathcal{C} = (S \subset Z \subset {}'S)$. La seule différence avec ce qui précède est que c'est maintenant ${}'S$ qui est supposé nucléaire complet, S étant l'antidual de ${}'S$.

De plus, un morphisme α de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ est la donnée d'une application linéaire continue α de ${}'S$ dans ${}'S_1$ transformant toute partie équicontinue de S en une partie équicontinue de S_1. On dit aussi que $\alpha : {}'S \longrightarrow {}'S_1$ induit une application équicontinue (ou "bornée") de S dans S_1.

(0.3) Triplets nucléaires avec conjugaison.

(a) Une conjugaison sur un e. l. c. s. complexe E est une application Q antilinéaire et involutive de E dans E qui est biunivoque et bicontinue. Dans le cas particulier où E est un Banach, on suppose, de plus, que Q est isométrique. Une conjugaison est souvent notée $z \longrightarrow \bar{z}$. Pour un Hilbert complexe, on suppose, de plus, que Q est anti-autoadjointe $(Qf , g) = \overline{(f , Qg)}$. Lorsque z décrit Z, l'ensemble des points $\bar{z}$ est noté $\bar{Z}$, et il est isomorphe à Z. Et même, le groupe topologique commutatif sous-jacent à Z est isomorphe à $\bar{Z}$, muni de la to-

pologie induite par Z , et de l'addition induite par Z , soit $(\bar{z} , \bar{z}') \longrightarrow \bar{z} + \bar{z}'$. Cependant, si l'on munit $\bar{Z}$ de la loi externe induite par Z : $(\lambda , \bar{z}) \longrightarrow \lambda \bar{z}$, on obtient un e. l. c. s. qui est anti-isomorphe à Z , car $Q(z) = \bar{z}$ et $Q(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$. L'e. l. c. s. $\bar{Z}$, ainsi obtenu, est appelé l'espace conjugué de Z .

(b) Notons qu'on peut définir un "conjugué abstrait" d'un e. l. c. s. complexe E sans faire intervenir de conjugaison. Il suffit de munir le groupe topologique sous-jacent à E de la loi externe $(\lambda , z) \longmapsto \bar{\lambda} z$. L'e. l. c. s. $\bar{E}$ ainsi obtenu est appelé l'anti-espace de E . Et pour toute conjugaison Q de E , l'application $z \longrightarrow Qz$ est un isomorphisme de l'anti-espace $\bar{E}$ sur l'e. l. c. s. E .

(c) Par la suite, E est toujours muni d'une conjugaison. L'antidual $'E$ de E est l'espace des formes antilinéaires continues sur E , donc $'E = (\bar{E})'$. L'application $\tilde{Q} : \ell \longrightarrow \overline{\ell \circ Q_E}$ est une conjugaison dans $'E$.

(0.4) Triplet avec conjugaison.

Supposons que Z soit un Hilbert complexe, que j soit une injection continue à image dense d'un e. l. c. s. G dans Z , que Z et G soient munis de conjugaison Q_G et Q_Z telles que Q_Z induise Q_G sur G

$$G \hookrightarrow Z \hookrightarrow 'G .$$

On rappelle que le théorème de Riesz montre que Z est isomorphe à son antidual. Alors, la conjugaison $\tilde{Q}$ sur $'S$ induit les conjugaisons Q_H et Q_G respectivement sur G et H , car, pour $z \in Z$:

$$\forall \varphi \in S , \quad (\tilde{Q}z)(\varphi) = \overline{z(Q_E \varphi)} = (\overline{Q_H \varphi , z}) = (\varphi , Q_H z) .$$

D'où $\tilde{Q}z = Q_H z$.

1. Equation de Klein-Gordon.

Soit $s = 1$, 2 ou 3 . L'espace de Minkovski affine M_s est un espace affine réel à $(s + 1)$ dimensions, dont l'espace vectoriel tangent TM_s est muni d'une forme quadratique g du type $+ - \ldots -$. Si aucune confusion n'est possible, on écrit M au lieu M_s , et l'on écrit $\dim M = s$. D'après la théorie des formes quadratiques, on peut trouver une base $e_0 \ldots e_s$ de TM telle que la forme bilinéaire b associée à q vérifie

$$(1.1) \qquad g_{ij} = b(e_i , e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j ; \\ 1 & \text{si } i = j = 0 ; \\ -1 & \text{si } i = j \neq 0 . \end{cases}$$

Soit $x = (x^0 , x^1 , \ldots , x^s) = (x^0 , \underset{\sim}{x})$, quelconque dans TM , avec $\underset{\sim}{x} = (x^1 , \ldots , x^s)$. On a alors

$$(1.2) \qquad g(x) = g_{ij} x^i x^j = (x^0)^2 - \Sigma_{j=1}^{s} (x^j)^2 .$$

(1.3) On dit que l'on choisit des coordonnées dans M lorsqu'on choisit une origi-

ne dans M , et lorsqu'on rapporte TM à une base (e_i) vérifiant (1.3). Alors M peut être identifié à TM et à $\underset{\sim}{R}^{s+1}$. Physiquement, x^0 s'interprète comme étant le temps t , x^1 , ... , x^s étant les s variables d'espace.

(1.4) Définition de l'opérateur de Klein-Gordon (KG) .

Soit m un nombre réel $\geqslant 0$. Soit $\Omega^0(M)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables réelles sur M . L'opérateur KG de Klein-Gordon est l'opérateur linéaire de $\Omega^0(M)$ s'écrivant

$$\varphi \longrightarrow KG\ \varphi = \partial d\varphi + m^2\ \varphi ,$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure, et où ∂ est l'opérateur de Hodge.

Dans le cas où l'on veut préciser que l'opérateur KG est relatif au nombre réel m donné, on peut écrire KG_m au lieu de KG .

(1.5) PROPOSITION. - Pour tout choix de coordonnées dans M , l'opérateur de Klein-Gordon s'écrit

$$\varphi(x) \longrightarrow (KG_m\ \varphi)(x) = m^2 + \partial_{00}\ \varphi - \Sigma\ \partial_{jj}\ \varphi$$

avec la convention $d_{jk}\ \varphi = \partial^2/\partial x^j\ \partial x^k$.

On peut donc encore écrire

$$KG_m = m^2 + g(\frac{d}{dx}) .$$

La preuve est un exercice de géométrie differentielle. Si $\Omega^p(M)$ est l'espace des p-formes réelles sur M , on rappelle que l'opérateur $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ est tel que, pour tout ω , $d\omega$ est l'antisymétrisé de la dérivée contravariante $D\omega \in T^*M \otimes \Omega(M)$ du champ ω de tenseurs contravariants.

Soit $p > 0$. L'opérateur $\partial : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p-1}$ est défini, grâce à la donnée de la forme quadratique non dégénérée,

$$x \longrightarrow g(x) = \Sigma\ g_{ij}\ x^i\ x^j \tag{1.6}$$

avec g_{ij} nul pour $i \neq j$, égal à $+1$ (resp. -1) si $i = j = 0$ (resp. $i = j > 0$). En effet, g permet d'identifier canoniquement TM à son dual T^*M . Pour tout $x \in TM$, les nombres

$$x_i = \Sigma\ g_{ij}\ x^j , \quad i = 0 , \ldots , s ,$$

sont appelés les coordonnées covariantes de x , et l'on a

$$x_i = x^0 \text{ si } i = 0 \text{ (resp. } -x^i \text{ si } i > 0).$$

$$g(x) = \Sigma\ x_i\ x^i . \tag{1.7}$$

Soit $\ell > 0$. En physique, on a l'habitude de noter p un élément de T^*M . Les coordonnées covariantes de p sont des nombres réels p_j , et la forme linéaire sur TM , définie par p , s'écrit

(1.8) $$x \longrightarrow px = \tilde{p}x = \sum p_j\, x^j = \sum g_{jk}\, p^k\, x^j \ .$$

On écrira encore $g(x) = \tilde{x}x = x^2$. Ces conventions s'étendent aux éléments de $\bigotimes_\ell(TM)$, espace des tenseurs d'ordre ℓ sur TM . Chacun de ces tenseurs t a des composantes contravariantes $t^{i_1\cdots i_\ell}$, des composantes covariantes $t_{i_1\cdots i_\ell}$, des composantes mixtes $t_{i_1}^{\ \ i_2\cdots i_\ell}$, et l'on a, par exemple,

$$t_{i_1}^{\ \ i_2\cdots i_\ell} = \sum g_{i_s k}\, t^{k i_1\cdots i_\ell} \ .$$

Soit t un champ de ℓ-tenseurs sur M , et $\ell > 1$,

$$t \in \mathcal{C}^\ell(M) = \mathcal{C}^0(M) \otimes \left(\bigotimes_\ell(TM)\right) \ .$$

On obtient alors ∂t en contractant le tenseur

$$Dt \in T^*M \otimes \mathcal{C}^\ell(M) = \mathcal{C}^{\ell+1}(M)$$

par rapport aux deux premiers indices. Par exemple si, $t = d\varphi = \sum \partial_j\, \varphi\, dx^j$, on a

$$Dt = \sum a_{jk}\, dx^k \otimes dx^j = \sum a_j^k\, dx_k \otimes dx^j$$

avec $a_{jk} = \partial_{jk}\, \varphi$, $a_\ell^k = \partial_{00}\, \varphi$ si $k = 0$, et $-\partial_{kk}\, \varphi$ si $k > 0$. D'où

$$\partial t = \partial t\varphi = \sum a_k^k = \partial_{00}\, \varphi - \sum \partial_{jj}\, \varphi \ .$$

(1.9) DÉFINITION. - <u>Un champ scalaire classique sur</u> M <u>est une fonction réelle</u> φ <u>sur</u> M , <u>solution de l'équation aux dérivées partielles</u>

$$KG_m\, \varphi = j \ ,$$

<u>où</u> j <u>est une fonction réelle sur</u> M <u>appelée source. Si</u> $j = 0$, <u>on dit que le champ est libre. Si</u> j <u>est une fonction donnée (à priori, donc ne dépendant pas de</u> φ), <u>on dit que le champ libre est en interaction avec la source</u> j . <u>Si</u> j <u>est une fonction donnée du champ, on dit que le champ est interactif.</u>

Par exemple, si λ est une constante positive donnée, un champ de Jürgens est une solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

(1.10) $$KG_m\, \varphi = \lambda\varphi^3 \ .$$

Un champ scalaire classique est encore appelé une onde (scalaire classique). Par exemple,

$$\varphi_p(x) = \mathrm{Re}(\exp(i\tilde{p}x)) \Longrightarrow KG_m\, \varphi_p = (m^2 - p^2)\varphi_p \ .$$

Donc, φ_p est une onde si $m^2 - p^2 = 0$; on dit alors que φ_p est une onde plane.

Plus généralement, un champ classique sur M est une fonction φ sur M à valeurs tensorielles ou "spinorielles", solution d'une équation aux dérivées partielles de la physique classique. Si le second membre est nul, on dit que le champ classique considéré est libre.

(1.11) Ce qui précédait se plaçait dans le contexte de la relativité restreinte ;

mais on aurait pu se placer dans le contexte galiléen plus classique. Plus précisement, tout ce qui vient d'être dit, relativement à M, peut être adapté à l'espace euclidien E_s à s dimensions. Ainsi, le laplacien Δ sur E_s s'écrit ∂d (mais les fonctions φ telles que $\Delta\varphi = 0$ ne s'interprètent plus comme des ondes). On aurait pu aussi se placer dans le contexte moins classique de la relativité générale, M étant remplacé par une variété différentiable à "métrique" hyperbolique. On obtient dans un tel contexte, par exemple, les champs de gravitation,...

2. Formalisme lagrangien en dimension infinie.

En dimension finie, la mécanique lagrangienne est exposée dans [5]. Une extension en dimension infinie est proposée dans [3] en utilisant des espaces de Banach, ce qui conduit à des difficultés de domaines. De plus, l'étude de KG $\varphi = 0$, faite dans [3], ne précise pas l'espace symplectique. Nous reprenons la question en utilisant des triplets nucléaires. Introduisons le moment conjugué de φ.

$$\pi(t\ ,\ x') = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t\ ,\ x') = \varphi^{\bullet}(t\ ,\ x')\ , \tag{2.1}$$

et écrivons l'équation KG $\varphi = 0$ sous la forme d'un système différentiel du premier ordre (analogue au système de Hamilton).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \pi(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi(t)\\ (\Sigma\,\partial_{jj} - m^2)\,\varphi(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \Sigma\,\partial_{jj} - m^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \pi(t)\end{bmatrix}\ , \tag{2.2}$$

où l'on a posé

$$\varphi(t) = \varphi(t\ ,\ .) \quad \text{et} \quad \pi(t) = \pi(t\ ,\ .)\ .$$

C'est une équation différentielle à valeurs dans un Banach. Plus précisément, si $\varphi(t)$ et $\pi(t)$ décrivent respectivement des espaces de Banach $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et si l'on pose

$$F(t) = (\varphi(t)\ ,\ \pi(t))\ ,\quad F = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}\ , \tag{2.3}$$

le système (2.2) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\,f(t) = f^{\bullet}(t) = A\,f(t)\ , \tag{2.4}$$

où A est un opérateur non borné de F. On cherche $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ de manière à ce que cet opérateur soit le plus simple possible.

(2.5). LEMME (exercice). - *On prend pour* $\mathfrak{X}$ *l'espace de Sobolev complexe* $H^1(\underset{\sim}{R}^s)$, *muni de la norme* $(\|\mathrm{grad}\ \varphi\|^2 + m^2\,\|\varphi\|^2)^{\frac{1}{2}}$, *et* $\mathfrak{Y} = L^2(\underset{\sim}{R}^s)$. *Soit* (A) *l'opérateur non borné de* $F = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ *de domaine* $D(A) = H^2(\underset{\sim}{R}^s) \oplus H^1(\underset{\sim}{R}^s)$, *tel que*

$$A(u\ ,\ v) = (v\ ,\ (\Sigma\,\partial_{jj} - m^2)u)\ , \tag{2.6}$$

pour tout élément $(u\ ,\ v)$ *du domaine de* A. *Alors, l'opérateur* $B = -iA$ *est autoadjoint dans* F.

Il résulte alors de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints, ou de la théorie des semi-groupes continus d'opérateurs d'un Banach la proposition suivan-

te.

(2.7) PROPOSITION. - Pour tout élément $(\varphi_0 , \pi_0) \in H^2(\underset{\sim}{R}^s) \oplus H^1(\underset{\sim}{R}^s)$, l'unique solution (au sens des semi-groupes) du problème de Cauchy

$$\partial_{tt}\, \varphi(t , x') = (\textstyle\sum_{j=1}^{s} \partial_{jj} - m^2)\, \varphi(t , x') ,$$
$$\varphi(0 , x') = \varphi_0(x') ,$$
$$\varphi^{\bullet}(0 , x') = \pi_0(x') ,$$

est

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \pi(t) \end{bmatrix} = \exp(itB) \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \pi_0 \end{bmatrix} ,$$

où $\exp(itB)$ désigne le groupe unitaire engendré par $B = -iA$, où A est décrit par le lemme (2.5).

Comme on s'intéresse aux solutions φ réelles, on se limite ci-après au cas où φ_0 et π_0 sont réels.

(2.8) COROLLAIRE. - Lorsque le temps t évolue, l'énergie du système à l'instant t , définie par

(2.9) $h(\varphi) = \frac{1}{2} \int ((\text{grad}\, \varphi(t , x'))^2 + m^2\, \varphi^2(t , x'))dx' + \frac{1}{2} \int \varphi^{\bullet}(t , x')^2\, dx'$,

est indépendante du temps. Elle est donc toujours égale à sa valeur initiale

$$h = \tfrac{1}{2} \int (\text{grad}^2\, \varphi_0(x') + m^2\, \varphi_0^2(x') + \pi_0^2(x'))dx' .$$

En effet, $h(\varphi)$ est le carré de la norme de $(\varphi(t) , \pi(t)) \in H_r^1 \oplus L_r^2$, et $\exp(itB)$ est un opérateur unitaire.

(2.10) Forme symplectique σ .

L'espace de phase adéquat semble donc être $F = H_r^1 \oplus L_r^2$, l'indice r rappelant qu'il s'agit d'espaces hilbertiens réels. Tout élément $(\varphi_0 , \pi_0) \in F$ représente une solution φ de KG , autrement dit une onde. On peut donc noter φ l'élément générique de F . Pour tout temps t , et pour deux ondes φ et ψ , on pose

$$q(t) = \langle \varphi_t , \psi_t^{\bullet} \rangle_0 - \langle \varphi_t^{\bullet} , \psi_t \rangle_0 ,$$

l'indice zéro rappelant qu'il s'agit de produits scalaires dans L_r^2 . Le nombre $q(t)$ ne dépend pas du temps t car

$$q^{\bullet}(t) = \langle \varphi_t , \psi_t^{\bullet\bullet} \rangle_0 - \langle \varphi_t^{\bullet\bullet} , \psi_t \rangle_0$$
$$= \langle \varphi_t , (m^2 - \textstyle\sum \partial_{jj})\psi_t \rangle_0 - \langle (m^2 - \sum \partial_{jj})\varphi_t , \psi_t \rangle_0 = 0 .$$

On peut donc considérer la forme σ sur F , associée à la forme bilinéaire alternée

(2.11) $$(\varphi , \psi) \longmapsto \sigma(\varphi , \psi) = \langle \varphi_t , \psi_t^{\bullet} \rangle_0 - \langle \varphi_t^{\bullet} , \psi_t \rangle_0 .$$

Cette forme est, d'ailleurs, naturellement définie sur un espace plus grand que F,

à savoir $\tilde{F} = L^2_r \oplus L^2_r$. Cette 2e forme est dite symplectique, car l'opérateur linéaire de $\tilde{F}$, naturellement associé à σ , est un isomorphisme de l'espace de Hilbert $\tilde{F}$.

(2.12) Définition provisoire du gradient symplectique.

Soit g un observable du système considéré, c'est-à-dire, une fonction réelle C^∞ sur $\tilde{F}$. Le gradient symplectique de g est le champ de vecteurs $^{\#}dg$ sur F , tel que

(2.13) $$\forall\ \varphi \in \tilde{F}\ ,\ \forall\ v \in \mathcal{C}_\varphi(\tilde{F})\ ,\quad \sigma(^{\#}dg(\varphi)\ ,\ v) = \langle dg(\varphi)\ ,\ v\rangle_{\tilde{F}}\ .$$

Cette définition ne permet pas de définir $^{\#}dh$, car h n'est pas une fonction dérivable sur $\tilde{F}$, mais seulement sur le sous-espace dense F . C'est un phénomène spécifique à la dimension infinie. Une première idée consiste à introduire un domaine pour g , i. e. un sous-espace de Banach où g est dérivable, puis à introduire un domaine encore plus petit pour définir $^{\#}dg$. Ceci conduit à des difficultés de domaines (voir [3]). Il est plus commode d'introduire un domaine "universel" très petit, de façon que tous les observables raisonnables soient dérivables sur ce domaine, sans qu'il soit nécessaire de réduire encore le domaine pour définir $^{\#}dg$. Beaucoup de choix sont possibles. Pour simplifier l'expose, on se limite à un choix simple, et au cas $m > 0$, mais d'autres choix de domaine sont possibles, et tout peut être adapté au cas $m = 0$.

(2.14) DÉFINITION. - Soit S_r l'espace de Schwartz réel, $S(\underset{\sim}{R}^s)$. D'où, un triplet nucléaire

$$S_r\, dx' \oplus S_r\, dx \subset L^2_r\, dx' \oplus L^2_r\, dx' \subset S'_r \oplus S'_r\ .$$

Un observable classique g est une fonction réelle indéfiniment Fréchet-dérivable sur $S_r \oplus S_r$. Le gradient symplectique de g est une application

$$S_r \oplus S_r \xrightarrow{\ ^{\#}dg\ } S_r \oplus S_r$$

telle que, pour tout $\varphi \in S_r \oplus S_r$, et tout $v \in S'_r \oplus S'_r$ on ait

(2.15) $$\sigma(^{\#}dg(\varphi)\ ,\ v) = \langle dg(\varphi)\ ,\ v\rangle\ .$$

(2.16) Exemples.

(a) Pour $g = h = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_1 + \frac{1}{2}\|\varphi^\bullet\|^2_0$, on trouve

$$^{\#}dh(\varphi) = (\varphi^\bullet\ ,\ (\Delta - m^2)\varphi)\ .$$

Donc, comme en dimension finie, l'évolution du système s'écrit

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi^\bullet\end{pmatrix} = {}^{\#}dh\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi^\bullet\end{pmatrix}\ .$$

(b) A tout f dans L^2_r , on associe les observables classiques

$$\varphi \xrightarrow{\ q_f\ } \int f(x)\ \varphi(x')\ dx'\ ,\quad \varphi \xrightarrow{\ p_f\ } \int f(x)\ \varphi^\bullet(x')\ dx'\ .$$

Alors

$$\#dq_f(\varphi) = (0\ ,\ -f) \quad \text{et} \quad \#dp_f(\varphi) = (f\ ,\ 0)\ .$$

(c) A tout point $x' \in \underset{\sim}{R}^s$, on peut associer les observables classiques

$$\varphi \xrightarrow{q_{x'}} \varphi(x')\ ,\quad \varphi \xrightarrow{p_{x'}} \varphi'(x')$$

et

$$\#dq_{x'}(\varphi) = (0\ ,\ -\delta_x)\ ,\quad \#dp_{x'} = (\delta_{x'}\ ,\ 0)\ .$$

(d) On peut dire qu'un observable classique g est très régulier (resp. régulier) si, pour tout $\varphi \in S_r \oplus S_r$,

$$\#dg(\varphi) \in S_r \oplus S_r \quad (\text{resp. } \in L^2_r \oplus L^2_r)\ .$$

Si g est très régulier, $\#dg$ est un champ de vecteurs tangent à $S_r \oplus S_r$, comme en dimension finie. Il en est ainsi pour $g = h$ (voir (a)). Dans les autres cas, $\#dg$ est un champ de vecteurs "supertangents à $S_r \oplus S_r$" (voir (b) et (c)).

(2.17) Définition du crochet de Poisson $\{f\ ,\ g\}$.

Soient f et g deux observables classiques tels que, pour tout $\varphi \in S_r \oplus S_r$, la forme bilinéaire σ se prolonge par continuité à un couple d'e. v. contenant $\#df(\varphi)$ et $\#dg(\varphi)$. On pose alors

$$\{f\ ,\ g\}(\varphi) = \sigma(\#df(\varphi)\ ,\ \#dg(\varphi))\ .$$

Si la fonction $\{f\ ,\ g\}$ sur $S_r \oplus S_r$ est C^∞ , on dit que c'est le crochet de Poisson de f et de g , et que f et g sont crochetables.

(2.18) Exemples.

(a) Pour f et $g \in L^2_r$, on a

$$\{q_f\ ,\ q_g\} = \{p_f\ ,\ p_g\} = 0\ ,\quad \{q_f\ ,\ p_g\} = \int fg\ dx'\ .$$

(b) L'évolution temporelle d'un observable g crochetable avec l'halmiltonien est donnée par

$$\frac{d}{dt}\, g(\varphi(t)) = \{h\ ,\ g\}(\varphi(t))\ .$$

(c) Quels que soient x et $y \in \underset{\sim}{R}^s$, les observables q_x et q_y (resp. p_x et p_y) sont crochetables, et l'on a

$$\{q_x\ ,\ q_y\} = \{p_x\ ,\ p_y\} = 0\ .$$

Cependant, q_x et p_y ne sont pas crochetables. On notera que, pour $f \in S_r$, q_x et p_f sont crochetables.

Pour le système mécanique étudié, on a donc un formalisme lagrangien avec énergie, observables, forme symplectique, structure hilbertienne sur l'espace de phase. On serait alors tenté de quantifier en prenant, par exemple, comme espace de fonctions d'ondes $K = L^2(H^1_r\ ,\ \nu)$. Ce serait prématuré, car nous n'avons pas étudié l'invariance relativiste des grandeurs introduites. Par exemple, $F = H^1_r \oplus L^2_r$ a-t'il l'invariance relativiste ? On va voir que ce n'est pas le cas, et qu'en fait

le bon espace de phase est $H_r^{\frac{1}{2}} \oplus H_r^{-\frac{1}{2}}$. De même, les observables p_x et q_x n'ont pas l'invariance relativiste, et l'on trouvera de meilleurs "observables" a_x et a_x^* .

3. L'équation de Klein Gordon et la relativité restreinte.

(3.1) Groupe de Lorentz L et groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$.

Le groupe de Lorentz L est le groupe des transformations linéaires de TM qui conservent la forme quadratique g . Rapportant TM à une base $e_0 \dots e_s$ telle que (1,1) , tout $\Lambda \in L$ est caractérisé par une matrice carrée d'ordre quatre Λ_ν^μ telle que

$$(3.2) \qquad x \xrightarrow{\Lambda} y = (y^\mu)_\mu \text{ , avec } y^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \text{ .}$$

La conservation de g par Λ se traduit par les relations :

$$(3.3) \qquad \Lambda_\mu^k \, g_{k\lambda} \, \Lambda_\nu^\lambda = g_{\mu\nu} \text{ , } \mu \text{ et } \nu = 0 \text{ , } \dots \text{ , } s$$

équivalentes à la relation matricielle

$$^t\Lambda G \Lambda = G \quad \text{ou} \quad \Lambda^{-1} = {}^tG\Lambda G \text{ .}$$

Ceci entraine dét $\Lambda = \pm 1$. De plus, la relation (3.3) s'écrit, pour $\mu = \nu = 0$,

$$(3.4) \qquad (\Lambda_0^0)^2 - \Sigma_{j=1}^3 (\Lambda_0^j)^2 = 1 \text{ .}$$

On a donc deux possibilités pour Λ_0^0

$$(3.5) \qquad \Lambda_0^0 \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda_0^0 \leqslant -1 \text{ .}$$

(3.6) Le groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$ est le sous-groupe de L formé par les transformations Λ telles que

$$\text{dét } \Lambda = +1 \text{ , et } \Lambda_0^0 \geqslant 1 \text{ .}$$

On démontre que c'est la composante connexe de l'élément neutre de L .

(3.7) Groupe de Poincaré P et groupe de Poincaré restreint $G = P_+^\uparrow$.

Le groupe de Poincaré P (resp. le groupe de Poincaré restreint $P_+^\uparrow$) est le groupe des transformations affines de M dont les transformations linéaires tangentes appartiennent à L (resp. $L_+^\uparrow$). Pour tout choix d'une origine dans M , tout élément de $P_+^\uparrow$ est caractérisé par un couple

$$(3.8) \qquad (a \text{ , } \Lambda) \text{ , avec } a \in TM \text{ et } \Lambda \in L_+^\uparrow \text{ ,}$$

la transformation correspondante de M étant $x \longrightarrow \Lambda x + a$. La loi de composition dans $P_+^\uparrow$ s'écrit alors

$$(3.9) \quad (a' \text{ , } \Lambda) \circ (a \text{ , } \Lambda) = (\Lambda'\Lambda \text{ , } a' + \Lambda' a) \text{ et } (a \text{ , } \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a \text{ , } \Lambda^{-1}) \text{ .}$$

Le groupe $P_+^\uparrow$ agit aussi transitivement dans l'espace des fonctions réelles f (resp. complexes) définies sur M , l'élément $(a \text{ , } \Lambda)$ de $P_+^\uparrow$, définissant la transformation

(3.10) $$f \longrightarrow (a , \Lambda)f = f \circ (a , \Lambda)^{-1} = f(\Lambda^{-1}(x - a)) .$$

(3.11) Transformation de Fourier.

Soit dx la mesure positive sur TM s'écrivant, par rapport à une base (e_j) vérifiant (1.1),

$$dx = dx^0 \ldots dx^s .$$

Cette mesure est indépendante du choix de la base (e_j) . Donc, moyennant seulement le choix d'une origine dans M , on peut définir la transformée de Fourier (TF) de toute $f \in L^1(M , dx)$:

(3.12) $$\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-(s+1)/2} \int_M f(x) \exp(ipx)\, dx .$$

C'est une fonction sur $T^* M$.

Pour abréger, on écrit parfois $f(p)$ au lieu de $\tilde{f}(p)$.

(3.13) Effet d'un changement d'origine dans M .

Soit $b \in TM$. Si l'on remplace l'origine choisie 0 dans M par $o + b$, alors la nouvelle TF , $\tilde{f}_b(p)$, est reliée à l'ancienne TF , $\tilde{f}(p)$, par la relation

(3.14) $$\tilde{f}_b(p) = \exp(- ibp)\, \tilde{f}(p) .$$

On remarque que le produit scalaire $px = p^0 x^0 - p'x'$ intervenant dans (3.12) n'est pas le produit scalaire euclidien $p^0 x^0 + p'x'$ intervenant dans la définition usuelle de la TF . On note de même $f(x^0 , p')$ la transformée de Fourier partielle de f par rapport aux variables d'espace

(3.15) $$f(x^0 , p') = (2\pi)^{-s/2} \int f(x^0 , x') \exp(- ip'x')\, dx' .$$

Cette TF partielle dépend du choix de coordonnées dans M . De plus, elle n'est définie que si la fonction $x' \longrightarrow f(x^0 , x')$ est définie et intégrable par rapport à $dx' = dx^1 \ldots dx^s$.

(3.16) Pour tout $(a , \Lambda) \in P_+^{\uparrow}$, la TF de $(a , \Lambda)f$ est $\exp(iap)\, f({}^t\Lambda p)$.

(3.17) La TF de KG f est $(m^2 - p^2)f(p)$.

(3.18) PROPOSITION.

(a) Pour tout $f \in S'(M)$, $KG((a , \Lambda)f) = (a , \Lambda)(KG\ f)$.

(b) L'espace des solutions localement intégrables de l'équation de Jürgens est stable par $P_+^{\uparrow}$.

En effet, supposons $KG\ \varphi = \lambda\varphi^3$, et montrons que $KG((a , \Lambda)\varphi) = \lambda((a , \Lambda)\varphi)^3$. L'hypothèse entraine

$$(a , \Lambda)(KG\ \varphi) = \lambda((a , \lambda)\varphi)^3 .$$

Il suffit d'appliquer (3.18 (a)).

(3.19) Remarque. - Si φ est solution de KG $\varphi = j$, où j est une source donnée, alors

$$\forall\ (a\ ,\ \Lambda) \in G\ ,\quad KG\ ((a\ ,\ \Lambda)\varphi) = (a\ ,\ \Lambda)j\ .$$

Par conséquent, l'espace des solutions de KG $\varphi = j$ n'est pas invariant par G , en général.

(3.20) Hyperboloïde positif de masse $m > 0$.

C'est

$$H\uparrow = \{p = (p^0\ ,\ p')\ ;\ p^0 > 0\ ,\ p^0 = \omega(p')\}\ , \tag{3.21}$$

avec

$$\omega(p') = (m^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}} = (m^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{s}(p^j)^2)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{3.22}$$

Pour $m = 0$, $H\uparrow$ serait un cône. Comme on suppose $m \neq 0$, $H\uparrow$ est une variété différentiable, dont la structure est définie par la carte canonique suivante.

$$H\uparrow \xrightarrow{c} \underset{\sim}{R}^s$$
$$(p^0\ ,\ \vec{p}) \longrightarrow \vec{p} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = p'\ .$$

(3.23) Espaces $\mathcal{S}(H\uparrow)$, $\mathcal{D}(H\uparrow)$, $\mathcal{S}_r(H\uparrow)$, $\mathcal{D}_r(H\uparrow)$ ...

L'espace $\mathcal{S}(H\uparrow)$ est défini comme l'espace des fonctions φ complexes sur $H\uparrow$ qui, par la carte c , se transforment en des fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s)$. On notera que $H\uparrow$ est une partie de T^*M qui ne dépend pas du choix de coordonnées dans M , et que $\mathcal{S}(H\uparrow)$ ne dépend pas d'un tel choix. On définit $\mathcal{S}_r(H\uparrow)$ comme le sous-espace de $\mathcal{S}(H\uparrow)$ formé par les éléments réels de $\mathcal{S}(H\uparrow)$. On définit de même $\mathcal{D}(H\uparrow)$ (resp. $\mathcal{D}_r(H\uparrow)$) comme l'espace des fonctions complexes (resp. réelles) sur $H\uparrow$ qui correspondent, par la carte canonique, à l'espace de Schwartz complexe $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^s)$ (resp. réel $\mathcal{D}_r(\underset{\sim}{R}^s)$).

(3.24) Définition de la mesure invariante μ sur $H\uparrow$.

La mesure μ sur $H\uparrow$ est la mesure sur $H\uparrow$ qui, moyennant le choix de coordonnées dans M , a pour image, par la carte c , la mesure suivante sur $\underset{\sim}{R}^s$

$$c\mu = d\vec{p}/(2\omega(\vec{p}))\ . \tag{3.25}$$

On définirait de même μ si $m = 0$.

(3.26) PROPOSITION. - Soit $\underset{\sim}{\mu}$ l'extension à T^*M de la mesure μ sur $H\uparrow$.

$$\forall\ g \in \mathcal{S}(T^*M)\ ,\quad \int_{T^*M} g\ d\underset{\sim}{\mu} = \int_{p\in H\uparrow} g(p)\ d\mu(p)\ .$$

Alors $\underset{\sim}{\mu}$ et μ ne dépendent pas du choix de coordonnées dans M , et sont invariantes sous l'action de $L_+^\uparrow$.

Preuve.

(a) Soit $m > 0$. La mesure dp , sur $\underset{\sim}{R}^{s+1} = T^*M$, est invariante par $L_+^\uparrow$ car

dét $\Lambda = 1$, pour tout $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Soit $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^+)$. Comme l'hyperboloïde solide $H^+ = \{p \in T^*M \ ; \ p^0 > \omega(\vec{p})\}$ est $L_+^\uparrow$-invariant, la mesure $f(p^2)\, \varkappa(p)\, dp$ sur T^*M est $L_+^\uparrow$-invariante, où $\varkappa$ est la fonction indicatrice de H^+ . Soient $K^+ = \{p \in T^*M \ ; \ p^0 > 0\}$, et l'homéomorphisme

$$K^+ \xrightarrow{h} \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{R}^+$$

$$p = (p^0 , \vec{p}) \longrightarrow (\vec{p} , y) \quad \text{avec} \quad y = \tilde{p}p \ .$$

Comme

$$\frac{\partial y}{\partial p^0} = 2p^0 \ , \ \text{alors} \ \frac{D(\vec{p} , y)}{D(p)} = 2p^0$$

et h transporte μ_f en la mesure $2^{-1}\, \omega^{-1}(\vec{p})\, f(y)\, d\vec{p}\, dy$, alors

$$\int g \, d\mu_f = \int h^{-1} \circ g \, d(h\mu_f) = \int \frac{g(\sqrt{y^2 + \vec{p}^2} \ , \vec{p}) f(y)}{2\sqrt{y^2 + \vec{p}^2}} \, d\vec{p}\, dy \ .$$

Pour toute f fixée, μ_f est $L_+^\uparrow$-invariante sur K^+ , et μ_f ne dépend pas du choix de coordonnées dans M . Si (ρ_n) est la suite régularisante usuelle dans $\mathcal{D}'(\underset{\sim}{R})$, $(\rho_n) \longrightarrow \delta_0$ si $n \longrightarrow \infty$, on peut prendre $f_n(t) = \rho(t - m)$, et faire tendre n vers l'infini. Alors (μ_{f_n}) tend faiblement dans $\mathcal{S}'(T^*M)$ vers la mesure

$$g \longrightarrow \int \frac{g(\omega(\vec{p}) \ , \vec{p})}{2\omega(\vec{p})} \, d\vec{p} = \int g(p) \, d\mu(p)$$

c'est-à-dire vers $\underset{\sim}{\mu}$. D'où la proposition.

(3.27) Triplet nucléaire $(S \subset Z \subset {}'S)$.

On a une injection continue à image dense j de $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s)$ dans $L^2(\underset{\sim}{R}^s \ , 2^{-1}\omega^{-1}\, d\vec{p})$. Identifiant cet espace avec son antidual, on obtient le triplet nucléaire suivant.

(3.28) $$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s) 2^{-1}\, \omega^{-1}\, d\vec{p} \subset L^2(\underset{\sim}{R}^s \ , \ 2^{-1}\, \omega^{-1}\, d\vec{p}) 2^{-1}\, \omega^{-1}\, dp \subset {}'\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s) \ .$$

On notera que ce triplet est différent de celui intervenant en théorie des distributions :

(3.29) $$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s)\, d\vec{p} \subset L^2(\underset{\sim}{R}^s \ , d\vec{p})\, d\vec{p} \subset {}'\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s) \ .$$

En raisonnant de même sur $H\uparrow$, on obtient le triplet

(3.30) $$\mathcal{S}(H\uparrow)\mu \subset L^2(H\uparrow \ , \mu)\mu \subset {}'\mathcal{S}(H\uparrow) \ ,$$

et les triplets (3.28) et (3.30) se correspondent par la carte c . L'espace $\mathcal{S}$ peut être remplacé par l'espace $\mathcal{D}$

(3.31) $$\mathcal{D}(H\uparrow)\mu \subset L^2(H\uparrow \ , \mu)\mu \subset {}'\mathcal{D}(H\uparrow) \ .$$

Pour simplifier l'écriture, on pose $Z = L^2(H\uparrow \ , \mu)$ $S = \mathcal{S}(H\uparrow)$ ou $\mathcal{D}(H\uparrow)$, et l'on écrit (3.30) et (3.31) sous la forme simplifiée

(3.32) $$(S \subset Z \subset {}'S) \ .$$

(3.33) Transformée de Fourier d'une distribution réelle sur M .

Pour $T \in \mathcal{D}'(M)$, la distribution imaginaire conjuguée est définie par $\langle \bar{T} , \varphi \rangle = \langle T , \bar{\varphi} \rangle$. Alors la TF de $\bar{T}$ est $(\bar{T})^*(p) = \overline{\tilde{T}(-p)}$. En particulier,

$$T \text{ réelle} \Longrightarrow \tilde{T}(-p) = \overline{\tilde{T}(p)} \quad . \tag{3.34}$$

Appliquons ceci à une solution réelle φ de KG $\varphi = 0$, les données initiales correspondantes étant telles que $(\varphi_0 , \pi_0) \in S_r \times S_r$ avec $S_r = \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^s)$. Alors, $(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0$, et $\tilde{\varphi}$ est portée par la réunion de $H\uparrow$ et de son symétrique $-H\uparrow$.

Notons ext l'opérateur d'extension des mesures sur $H\uparrow$ en mesure sur $T^* M$.

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T^* M) \ , \quad \int_{T^*M} \varphi \, d(\text{ext } U) = \int_{H\uparrow} (r\varphi) \, dU$$

où $r\varphi$ est la restriction de φ à $H\uparrow$.

(3.35) THÉORÈME. - *Pour toute donnée initiale* $(\varphi_0 , \pi_0) \in S_r \times S_r$, *notons* $z = z(\varphi_0 , \pi_0)$ *la fonction sur* $H\uparrow$ *telle que la transformée de Fourier* $\tilde{\varphi}$ *de la solution* φ *de* KG $\varphi = 0$, *s'écrive*

$$\tilde{\varphi} = (2\pi)^{+\frac{1}{2}} [\text{ext}(z\mu) + (\text{ext}(z\mu))^*] \ . \tag{3.36}$$

Alors

$$(c^{-1} \cdot z)(\vec{p}) = \omega(\vec{p}) \, \tilde{\varphi}_0(\vec{p}) + i\tilde{\pi}(\vec{p}) \ . \tag{3.37}$$

Donc

$$\overline{c^{-1} \, z(\vec{p})} = (c^{-1} \, \bar{z})(\vec{p}) = \omega(\vec{p}) \, \overline{\tilde{\varphi}_0(\vec{p})} - \overline{i\tilde{\pi}(p)} \ ,$$

et φ *s'exprime de la manière suivante à l'aide de* z

$$\forall\, x \in M \ ; \quad \varphi(x) = (2\pi)^{-s/2} \int_{p \in H\uparrow} [\exp(-ipx) z(p) + \exp(ipx) \overline{z(p)}] \, d\mu(p) \ . \tag{3.38}$$

Preuve. - On détermine φ en résolvant le problème de Cauchy de la proposition (2.7) par transformation de Fourier partielle par rapport aux variables d'espaces seulement. La TF partielle ainsi obtenue est notée $\varphi(t , \vec{p})$,et elle vérifie le système

$$\varphi''(t , \vec{p}) = -(\vec{p}^2 + m^2) \, \varphi(t , p) \ ; \quad \varphi(0 , t) = \varphi_0(\vec{p}) \ ; \quad \varphi'(0 , \vec{p}) = \pi_0(\vec{p}) \ .$$

Pour tout $\vec{p}$ fixé dans $\underset{\sim}{R}^s$, on reconnait un problème de données initiales pour l'équation différentielle $f''(t) + (\vec{p}^2 + m^2) f(t) = 0$. On peut donc calculer explicitement $t \longrightarrow \varphi(t , \vec{p})$, pour tout $\vec{p}$ fixé.

$$\varphi(t , \vec{p}) = \exp(it\omega(\vec{p}))\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{2} + \frac{\tilde{\pi}_0}{2i\omega}\right) + \exp(-it\omega(\vec{p}))\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{2} - \frac{\tilde{\pi}_0}{2i\omega}\right) \ . \tag{3.38}'$$

On calcule alors la TF totale $\tilde{\varphi}(p)$ de φ en prenant la TF de $t \longrightarrow \varphi(t , \vec{p})$, d'où

$$\varphi(p) = \varphi(p^0 , \vec{p}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} [\delta_{-\omega}(p^0)\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{2} + \frac{\tilde{\pi}_0}{2i\omega}\right) - \delta_{\omega}(p^0)\left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{2} - \frac{\tilde{\pi}}{2i\omega}\right)] \ ,$$

soit

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \, \tilde{\varphi}(p) = \text{ext}[(\omega\tilde{\varphi}_0 + i\tilde{\pi}_0)\mu] + (\text{ext}[(\omega\tilde{\varphi}_0 + i\tilde{\pi}_0)\mu])^* \ .$$

On a donc prouvé (3.37). Pour prouver (3.38), on note que, pour $p \in H\uparrow$, $-p \in H\downarrow = -H$, et que $\tilde{\varphi}(-p) = \overline{\tilde{\varphi}(p)} = (\text{ext } \bar{z}\mu)(p)$. La formule d'inversion de Fourier donne

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-(s+1)/2} \int_{p^0>0} \tilde{\varphi}(p) \exp(-ipx)\, dp + (2\pi)^{-(s+1)/2} \int_{p^0<0} \tilde{\varphi}(p)\exp(-ipx)\, dp$$

$$= (2\pi)^{-s/2} \int_{p\in H\uparrow} z(p) \exp(-ipx)\, d\mu(p) + (2\pi)^{-s/2} \int_{+p\in H\uparrow} \overline{z(p)} \exp(-ipx)\, d\mu(p).$$

Une autre démonstration du théorème s'obtient en notant que, pour φ vérifiant KG $\varphi = 0$, il existe une fonction z sur $H\uparrow$ telle que

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-s/2} \int z(p) \exp(-ipx)\, d\mu(p) + \text{imaginaire conjugué}$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-s/2} \int (z(p) \exp(-ipx) + \bar{z}(p) \exp(ipx))\, d\mu(p) .$$

Puis l'on écrit que $\varphi(0 , \vec{x}) = \varphi_0(\vec{x})$, $\varphi^\bullet(0 , \vec{x}) = \pi_0(x)$.

(3.39) Remarque. - La formule (3.38) garde un sens pour $(\varphi_0 , \pi_0) \in S'_r \oplus S'_r$. En effet, elle peut être écrite

$$\varphi(t , \vec{x}) = (2\pi)^{-s/2} \int \exp(-it\omega(\vec{p})) \frac{\tilde{\varphi}\omega + i\tilde{\pi}}{2\omega} \exp(i\vec{px})\, d\vec{p} + \text{imaginaire conjugué} .$$

On interprète alors l'intégrale, pour t fixé, comme la TF de la distribution tempérée $\exp(it\omega(\vec{p}))((\tilde{\varphi} + i\tilde{\pi})/2\omega)$. Alors $\varphi(t , \vec{x})$ est représentée par une fonction C^∞ de la variable t, à valeurs dans $S'_r(\underset{\sim}{R}^s)$.

(3.40) COROLLAIRES.

(a) On peut considérer $\varphi \longrightarrow z(\varphi)$ comme un bon paramétrage de l'ensemble des solutions de KG. On notera que ce paramétrage dépend du choix d'une origine dans M, vu (3.14), si l'origine est translatée du vecteur b dans M, $z = z(p)$ est remplacé par $z(p)\exp(-ibp)$, $p \in H\uparrow$

(b) L'espace de phase hilbertien naturel pour KG est l'espace de Hilbert complexe $Z = L^2(H\uparrow , \mu)$. Une origine étant choisie dans M, Z est invariant sous l'action du groupe $L^\uparrow_+$, et Z est muni de la conjugaison $z \longrightarrow \bar{z}$. Si $z(\varphi) \in Z$, on a

$$\int |\omega(\vec{p})\ \tilde{\varphi}_0(\vec{p})|^2 \frac{d\vec{p}}{\omega(p)} < \infty \quad \text{et} \quad \int |\tilde{\pi}_0(\vec{p})|^2 \frac{d\vec{p}}{\omega(\vec{p})} < \infty .$$

Donc

(3.41) $$z(\varphi) \in Z \Longleftrightarrow \varphi_0 \in H_r^{\frac{1}{2}}(\underset{\sim}{R}^s) \quad \text{et} \quad \pi_0 \in H_r^{-\frac{1}{2}}(\underset{\sim}{R}^s) .$$

(c) De même, une origine étant choisie dans M, on peut identifier les solutions de KG correspondant à des données initiales $(\varphi_0 , \pi_0) \in S'_r \times S'_r$ à des éléments du triplet nucléaire $S \subset Z \subset {}'S$.

(d) Dans les modèles heuristiques de champs, intervient un espace de phase de dimension finie, et il intervient un paramétrage de cet espace du genre

$$z_k = p_k + iq_k , \quad \bar{z}_k = p_k - iq_k \quad [1].$$

Les relations (3.37) motivent ce paramétrage, et elles montrent son imperfection. En effet, il est difficile de modèliser correctement en dimension finie l'opérateur $\varphi_0 \longrightarrow \omega(\vec{p}).\tilde{\varphi}_0(\vec{p}) = \omega\tilde{\varphi}_0$.

(e) L'hamiltonien h et la forme symplectique σ s'expriment de la manière suivante à l'aide du paramétrage z de l'espace de phase.

$$h(z) = z\bar{z}\omega = \int_{\mu\in H\uparrow} |z(p)|^2\, \omega(p)\, d\mu(p) . \tag{3.42}$$

$$\sigma(z\ ,\ z_1) = 2\ \mathrm{Im}(z\ ,\ z_1)_Z = 2\ \mathrm{Im} \int_Z \overline{z(p)}\ z_1(p)\ d\mu(p) . \tag{3.43}$$

En effet, utilisant (2.9) et le théorème de Plancherel

$$h(z) = \tfrac{1}{2}(\|\varphi_0\|_1^2 + \|\pi_0\|_0^2) = \tfrac{1}{2}\int(|\tilde{\pi}(p')|^2 + \omega^2|\tilde{\varphi}(p')|^2)\ dp'$$

$$= \int(\omega\tilde{\varphi} + i\tilde{\pi})(\omega\bar{\tilde{\varphi}} - i\bar{\tilde{\pi}})\,\omega\,\frac{dp'}{2\omega(p')} = z\bar{z}\omega .$$

De même,

$$2\ \mathrm{Im}\ \bar{z}z_1 = \mathrm{Im}\int(\bar{\tilde{\varphi}}_0\ \omega - i\bar{\tilde{\pi}}_0)(\tilde{\varphi}_1\ \omega + i\tilde{\pi}_1)\ \frac{dp'}{\omega(p')} .$$

Supprimant les deux termes réels de l'intégrale

$$2\ \mathrm{Im}\ \bar{z}z_1 = \bar{\tilde{\varphi}}_0\ \tilde{\pi}_1 - \bar{\tilde{\pi}}_0\ \tilde{\varphi}_1 = \int(\varphi_0\ \pi_1 - \pi_0\ \varphi_1)\ dx' = \sigma(z\ ,\ z_1) .$$

(f) Le groupe de Poincaré restreint $G = P_+^\uparrow$ agit unitairement dans Z . Plus précisément, pour tout $g = (a\ ,\ \Lambda) \in G$, l'action (3.10) de g dans les fonctions sur M , induit, vu (3.16), l'action suivante dans Z .

$$z(p) \xrightarrow{g} \exp(iap)\ z({}^t\Lambda p) \tag{3.44}$$

qui est notée abusivement g . Plus précisément, si cette transformation unitaire de Z était notée $U(g)$, l'application $g \longrightarrow U(g)$ est une représentation unitaire de G .

4. Relations de commutation.

On définit à présent des "observables" s'exprimant à l'aide du produit scalaire dans Z .

(4.1) DEFINITION. - A tout $f \in Z$, on associe les formes linéaires et antilinéaires suivantes sur Z .

$$z \xrightarrow{af} (af)(z) = \int zf\ d\mu \quad \text{et} \quad z \xrightarrow{\bar{a}f} af(z) = \int \bar{z}f\ d\mu . \tag{4.2}$$

Ces formes ne sont pas des observables au sens du paragraphe 1, car ils ne sont pas à valeurs réelles. Cependant, ce sont des combinaisons linéaires à coefficients complexes des observables q_f et p_g définis en (2.16 (b)). On peut donc définir le crochet de Poisson de deux observables du type (4.2), par prolongement bilinéaire des crochets de Poisson d'observables du type q_f ou p_g .

(4.3) PROPOSITION. - Soient $z = (\varphi\ ,\ \pi_0)$, $z_1 = (\varphi_1\ ,\ \pi_1)$, $z_2 = (\varphi_2\ ,\ \pi_2)$ trois éléments de Z . Soit L l'opérateur de $S'(\mathbb{R}^s)$ correspondant à la multipli-

cation de la TF par $(m^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}}$. Alors

(a) $$2\bar{a}(z_1) = q_{L\varphi_1} + iq_{\pi_1} + p_{L^{-1}\pi_1} - ip_{\varphi_1} .$$

(b) $$2a(\bar{z}_2) = q_{L\varphi_2} - ip_{\pi_2} + p_{L^{-1}\pi_2} + ip_{\varphi_2} .$$

(c) $$\{\bar{a}(z_1) , \bar{a}(z_2)\} = \{a(z_1) , a(z_2)\} = 0 .$$

(d) $$\{a(\bar{z}_2) , \bar{a}(z_1)\} = \int \bar{z}_2 z_1 \, d\mu = \bar{z}_2 z_1 .$$

En effet, vu (3.37), on a

$$z\bar{z} = \tfrac{1}{2}(L\varphi_0 , \varphi_0) + \tfrac{1}{2}(L^{-1} \pi_0 , \pi_0) .$$

D'où, par polarisation,

(*) $$2 \operatorname{Re} \bar{z}z_1 = z_1 \bar{z} + \bar{z}_1 z = \langle L\varphi_0 , \varphi_1 \rangle + \langle L^{-1} \pi_0 , \pi_1 \rangle .$$

D'autre part,

(**) $$2 \operatorname{Im} \bar{z}z_1 = \sigma(z , z_1) = \langle \varphi_0 , \pi_1 \rangle - \langle \pi_0 , \varphi_1 \rangle .$$

Ce qui entraine

(4.4) $$\begin{aligned} 2\bar{z}z_1 &= \langle \varphi_0 , L\varphi_1 + i\pi_1 \rangle + \langle \pi_0 , L^{-1} \pi_1 - i\varphi_1 \rangle \\ &= \langle \varphi_1 + iL^{-1} \pi_1 , L\varphi_0 - i\pi_0 \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire (4.3 (a)). On montre de même (4.3 (b)). Ces deux relations entrainent, vu (2.18),

$$\begin{aligned} 4\{a(\bar{z}_2) , a(z_1)\} &= \{q_{L\varphi_2} - iq_{\pi_2} , p_{L^{-1}\pi_1} - ip_{\varphi_1}\} - \{q_{L\varphi_1} + iq_{\pi_1} , p_{L^{-1}\pi_2} + ip_{\varphi_2}\} \\ &= 2\langle L\varphi_2 - i\pi_2 , L^{-1} \pi_1 - i\varphi_1 \rangle . \end{aligned}$$

Vu les relations (*) et (**), où l'on a remplacé z par z_2 , on a

$$4\{a(\bar{z}_2) , \bar{a}(z_1)\} = 4\bar{z}_2 z_1 = 4 \int \bar{z}_2 z_1 \, d\mu .$$

Ce résultat permet de calculer le commutateur de deux observations du champ à des instants différents.

(4.5) DÉFINITION. - Le commutateur de Pauli-Jordan $D(x)$ est la solution-distribution du problème de Cauchy.

$$KG \, D(x) = 0 , \quad D(0 , x') = 0 , \quad D^{\cdot}(0 , x') = \delta_0(x') .$$

D'après la formule (3.38)', il vient

(4.6) $$D(x^0 , \vec{p}) = (2\pi)^{-s/2} \frac{\sin(t\omega(\vec{p}))}{\omega(\vec{p})} .$$

D'où

(4.7) $$D(x) = 2(2\pi)^{-s} \int_{\underset{\sim}{R}^{1-s}} \frac{\sin t\omega(\vec{p})}{2\omega(p)} \exp(ipx) \, dp ,$$

et

(4.8) $$D(x) = i(2\pi)^{-s} \int_H sg(p^0) \exp(- ipx) \, d\delta(p^2 - m^2) .$$

Voir dans [2] une formule explicitant $D(x)$ en termes de fonctions de Bessel. Il est important de noter que D est portée par $H_0^{\uparrow}$ ce qui résulte aussi de la définition (4.5) de D, et du fait que les solutions d'une équation hyperbolique "se propagent à vitesse finie".

(4.9) PROPOSITION. - Pour tout $f \in S_r$ et tout instant t on définit l'observable $q_{\delta_t \otimes f}$ du champ libre par l'application

$$\varphi \xrightarrow{q_{\delta_t \otimes f}} \int \varphi(t , x)\, f(t)\, dt \ . \tag{4.10}$$

Alors deux observables de ce type sont crochetables et l'on a

$$\{q_{\delta_t \otimes f} , q_{\delta_{t'} \otimes g}\} = - i \iint_{\underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{R}^s} D(t - t' , x' - y')\, f(x')\, g(y')\, dx'\, dy'$$

ce que les physiciens notent

$$\{q_x , q_y\} = - iD(x - y) , \quad x \text{ et } y \in M \ .$$

Démonstration. - En utilisant la définition (4.10) de $q_{\delta_t \otimes f}$ et (3.38), il vient

$$\begin{aligned} q_{\delta_t \otimes f}\, \varphi &= \langle \varphi , \delta_t \otimes f \rangle \\ &= (2\pi)^{-s/2} \int f(x')dx' \Big[\int (\exp(-itp^0 + ix'p')z'(p) + \exp(+itp_0 - ix'p')\overline{z'(p)})d\mu(p)\Big] \\ &= \int [\exp(-itp^0)\tilde{f}(p')z'(p) + \exp(itp^0)\tilde{f}(p')\overline{z'(p)}]d\mu(p) \ . \end{aligned}$$

Soit

$$q_{\delta_t \otimes f} = a(\overline{\exp(itp^0)c^{-1}\, \tilde{f}}) + \bar{a}(\exp(itp^0)c^{-1}\, \tilde{f}) \ .$$

Vu (4.3 (a) et (b)), et (2.17), on en déduit que $q_{\delta_t \otimes f}$ et $q_{\delta_{t'} \otimes g}$ sont crochetables. Et vu (4.3 (d)), le crochet Cr de ces deux opérateurs est égal à

$$\begin{aligned} Cr &= \int_{H_t} [\exp(\overline{itp^0})c^{-1}\, \tilde{f}\, \exp(it'p^0)c^{-1}\, \tilde{g} - \overline{\exp(it'p^0)c^{-1}\, \tilde{g}}\, \exp(itp^0)c^{-1}\, \tilde{f}]\, d\mu(p) \\ &= \int_{\underset{\sim}{R}^s} (\exp(-i(t-t')\omega)\bar{\tilde{f}}\tilde{g} - \exp(i(t-t')\omega)\tilde{f}\bar{\tilde{g}})\, dp'/2\omega(p') \ . \end{aligned}$$

Introduisons les distributions C et S sur $\underset{\sim}{R}^s$ de la TF $\omega^{-1}\cos(t - t')\omega$ et $\omega^{-1}\sin(t - t')\omega$. D'où

$$(2\pi)^{s/2}.2.Cr = \langle C * g , f\rangle - i\langle S * g , f\rangle - \langle C * f , g\rangle - i\langle S * f , g\rangle \ .$$

D'où

$$Cr = - i(2\pi)^{-s/2}\, \langle S * f , g\rangle = - i \iint D(t - t' , x' - y')f(x')\, g(y')\, dx'\, dy' \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 187-214.

[2] BOGOLIOUBOV (N. N.) et CHIRKOV (D. V.). - Introduction à la théorie quantique des champs. - Paris, Dunod, 1960 (Travaux et Recherches mathématiques).

[3] CHERNOFF (P. R.) and MARSDEN (J. E.). - Properties of infinite dimensional hamiltonian systems. - Berlin, springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 425).

[4] MARLE (C. M.). - Quantification géométrique : Théorie et exemples, Séminaire Paul Krée : Équations aux dérivées partielles en dimension infinie et applications à la physique, 2e année, 1975/76, n° 2, 35 p.

[5] SOURIAU (J.-M.). - Structure des systèmes dynamiques. - Paris, Dunod, 1970 (Collection Dunod Université).

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS