Séminaire de philosophie et mathématiques

MICHEL BLAY

Force, continuité et mathématisation du mouvement dans les Principia de Newton

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1996, fascicule 3
« Force, continuité et mathématisation des mouvements dans les Principia de Newton », ,
p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1996___3_A1_0>

Force, continuité et mathématisation du mouvement dans les *Principia* de Newton

---

Christiaan Huygens écrit dans son *Discours de la cause de la pesanteur*, publié à Leyde en 1690 à la suite du *Traité de la lumière*, mais rédigé, pour l'essentiel, une vingtaine d'années auparavant à l'occasion de discussions à l'Académie Royale des sciences de Paris :

> "L'on peut enfin trouver ici la raison du Principe que Galilée a pris pour démontrer la proportion de l'accélération des corps qui tombent : qui est que leur vitesse s'augmente également en des temps égaux. Car les corps étant poussés successivement par les parties de la matière qui tache de monter en leur place, et qui, comme on vient de voir, agissent continuellement sur eux avec la même force, du moins dans les chutes qui tombent sous notre expérience ; c'en est une suite nécessaire que l'accroissement des vitesses soit proportionnel à celui des temps"(1).

Huygens souligne par ailleurs, dans les premières pages de la deuxième partie de l'*Horologium oscillatorium* publié à Paris en 1673, que la mathématisation du mouvement de chute des corps implique que l'action de la gravité, indépendamment de toute considération explicite sur sa cause, doit être continue au cours de chacun des intervalles de temps égaux pris en compte. On lit, par exemple, dans la Proposition I : [...] et ce dernier [mouvement produit par la pesanteur] étant évidemment le même dans le deuxième temps que dans le premier, doit avoir donné *dans le cours du deuxième temps* [ideo decursu temporis secundi] au corps pesant une vitesse égale à celle qu'il avait reçue à la fin du premier" ; de même dans le paragraphe suivant : [...] la force de la gravité y a ajouté de nouveau *dans le cours du troisième temps* [...]"(2). Sur cette base continuiste de l'action de la gravité et en utilisant l'idée que le rapport des espaces parcourus reste le même quelque soit les temps égaux successifs considérés (3), Huygens parvient à la loi classique galiléenne des nombres impairs caractéristique du mouvement accéléré de chute des graves.

Il y a donc, d'un côté, la succession des impulsions, des chocs et, de l'autre, l'action supposée sans interruption, par exemple, de la gravité.

Comment passer d'une conceptualisation de l'action en terme d'impulsions ou de chocs à la mathématisation d'une action continue, sans interruption, comme celle, par exemple de la gravité ?

Ou, plus précisément,

Comment donner une rigueur mathématique au passage du discontinu au continu dans les modalités de l'action ?

La réponse à ces questions constitue, à notre avis, un enjeu central des *Principia* de Newton :

Comment donc Newton relève-t-il, ce que j'appelerai, le défit hugonien de la construction d'une action continue à partir d'une conceptualisation en terme d'impulsions ou de chocs ?

Dans un premier temps nous nous attacherons cursivement à l'étude de la loi II des *Principia*, nous nous tournerons ensuite vers le traitement newtonien des problèmes impliquant la considération d'une action continue, sans interruption. En dernier lieu, afin de préciser le sens de nos analyses, nous aborderons la question de la continuité dans le cadre de l'approche algorithmique varignonienne en rapport avec l'utilisation que celui-ci fait des textes newtoniens.

1) La loi II dans les Principia

> «Deuxième loi»
> «Le changement du mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée et se fait suivant la droite par laquelle cette force est imprimée»(4).

Il ne faut évidemment pas confondre cette loi avec celle exprimée en termes différentiels que nous connaissons aujourd'hui sous la dénomination de «loi de Newton» et qui s'écrit $F = ma$ ou $F = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$. En particulier, Newton parle ici de «changement du mouvement » sans aucune précision concernant le temps — pas même un *dato tempore* — pendant lequel s'effectue ce changement. Si l'on voulait absolument écrire cette loi en termes modernes, l'expression la plus proche serait sans doute celle-ci: $F = \Delta\ (m\upsilon)$ ou F est la force motrice imprimée, m la masse et υ la vitesse, sachant que $\Delta\ (m\upsilon)$ représente le «changement du mouvement». Dans cette perspective, on peut dire qu'une force motrice imprimée n'est pas une force, au sens moderne du terme mais une impulsion.

Ainsi dans la démonstration de la loi de chute des graves, que Newton donne comme un exemple de déduction à partir de la loi II, dans le Scholie qui suit l'énoncé des Lois et de leurs six Corollaires, la «force motrice imprimée» apparaît nettement, *via* le processus de totalisation mis en œuvre, comme une impulsion:

> «Lorsqu'un corps tombe, la gravité uniforme, agissant de façon égale en chacune des particules égales de temps, imprime en ce corps des forces

égales, et engendre des vitesses égales: et dans le temps total, elle imprime la force totale et engendre une vitesse totale proportionnelle au temps. Mais les espaces décrits en des temps proportionnels sont comme les vitesses et les temps ensemble; c'est-à-dire en raison doublée des temps»(5).

Par ailleurs deux références à la loi II données par Newton dans le cadre de démonstrations développées dans le Livre II éclairent dans le même sens le contenu de cette Loi. On lit dans la Proposition 3: «[...] seront comme les forces absolues par lesquelles le corps est pressé au commencement de chacun des temps, et par conséquent (par la seconde loi du mouvement) comme les incréments des vitesses [...]» et, un peu plus loin dans la Proposition 8: «[...] car l'incrément PQ de la vitesse (par la seconde loi du mouvement) est proportionnel à la force génératrice KC»(26).

Dans un cas comme dans l'autre, aucune précision concernant le temps n'est donnée. La loi II apparaît donc bien liée à un modèle impulsif (par choc) de l'action, modèle impliquant une conceptualisation discontinue de cette action.

Comment résoudre alors les problèmes dans lesquels est impliquée une action continue ?

Deux situations doivent être distinguées suivant que l'on a affaire, pour surmonter les difficultés de la continuité, à des infiniment petits du premier ordre ou du deuxième ordre. Dans le premier cas Newton va recourir à des passages à la limite reposant sur la manipulation des intervalles ou des particules de temps successifs ; dans le deuxième cas il va mettre en œuvre les lemmes IX, X et XI de la première section du Livre I.

2) Continuité et infiniment petit du premier ordre

2-1) La Proposition II de la Section I du Livre II

Dans les trois premières Sections du Livre II Newton examine en particulier le mouvement des projectiles dans les milieux dont la loi de résistance est proportionnelle à la vitesse, puis au carré de la vitesse, puis enfin à une combinaison des deux.

Nous limiterons notre propos, celui-ci n'étant pas de présenter la théorie newtonienne dans toute son extension mais seulement de faire sentir les enjeux de la construction d'une physique mathématique, à la seule Proposition 2 relative au mouvement uniforme des projectiles dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à la vitesse(7).

«Si un corps éprouve une résistance en raison de sa vitesse, et qu'il se

> meuve dans un milieu homogène par la seule force qui lui a été imprimée[(8)], je dis, qu'en prenant des temps égaux, les vitesses au commencement de chacun de ces temps seront en progression géométrique, et que les espaces parcourus pendant chacun de ces temps seront comme les vitesses»[(9)].

Dans la première phrase qui ouvre la démonstration, Newton s'attache principalement à conceptualiser, en s'appuyant sur le modèle de la percussion, le mode d'action des forces de résistance:

> «Soit divisé le temps en particules égales (*particulas aequales*), et soit supposé au commencement de chacune de ces particules (*ipsis particularum initiis*) une force de résistance qui soit comme la vitesse et qui agisse par un seul coup (*impulsu unico*), le décrément de la vitesse à chacune de ces particules de temps sera comme cette vitesse»[(10)].

Newton suppose donc tout d'abord que le temps est divisé en particules égales[(11)] et qu'«au commencement»[(12)] de chaque particule de temps la force de résistance agit «par un seul coup». A ce mode d'action discontinue de la force de résistance, Newton va substituer quelques lignes plus bas, comme nous le verrons, à l'aide d'un passage à la limite — sur le nombre et la grandeur des parties de temps d'un intervalle donné de temps — une action continue.

Par ailleurs, la force de résistance est, d'une part, conformément à l'hypothèse, «comme la vitesse» et, d'autre part, étant la seule force en jeu et en raison des lois du mouvement, comme «le décrément de la vitesse à chacune de ces particules de temps»[(13)]. Par conséquent, puisque le mouvement perdu à chaque particule de temps l'est dès le commencement de cette particule de temps, la vitesse pendant chaque particule de temps devra être considérée comme constante et le mouvement uniforme; et donc, au début de chaque particule de temps, le décrément de la vitesse devra être, conformément à l'hypothèse, proportionnel à la vitesse du projectile au cours de la particule de temps précédente, ou bien encore, la différence des vitesses (leur décrément) entre deux particules de temps devra être proportionnelle à la vitesse du projectile[(14)]. Newton ayant préalablement démontré dans le Lemme I, placé entre les Propositions 1 et 2 du Livre II, que «les quantités proportionnelles à leurs différences sont en proportion continue»[(15)], parvient alors facilement à établir une relation caractérisant l'évolution de la vitesse, à savoir que «les vitesses au commencement de chacun de ces temps seront en progression géométrique»[(16)]. Cela étant, il précise que les particules de temps, constituant un certain intervalle de temps, peuvent être prises aussi petites que l'on veut et leur nombre être augmenté à l'infini, de telle sorte que de discontinue l'action de la force de résistance devient continue sans pour autant que soit modifiée la relation caractéristique d'évolution de la vitesse:

> «Maintenant soient diminuées ces particules égales de temps, et soit leur nombre augmenté à l'infini, en sorte que l'impulsion de la résistance devienne continue (*eo ut resistentiae impulsus reddatur continuus*) ; et les vitesses qui sont toujours en proportion continue dans les commencements des temps égaux le seront encore dans ce cas»(17).

Dans ce texte l'usage du terme d'*impulsus* est révélatrices, à travers le passage du discontinu au continu des difficultés conceptuelles qui sont attachées à la construction newtonienne du concept de force dans son acception d'action continue.

Cette continuité de l'action, obtenue par un passage à la limite se retrouve également dans le traitement newtonien de la loi des aires.

2-2) La loi des aires

La Proposition 1 - Théorème 1 du Livre I stipule:

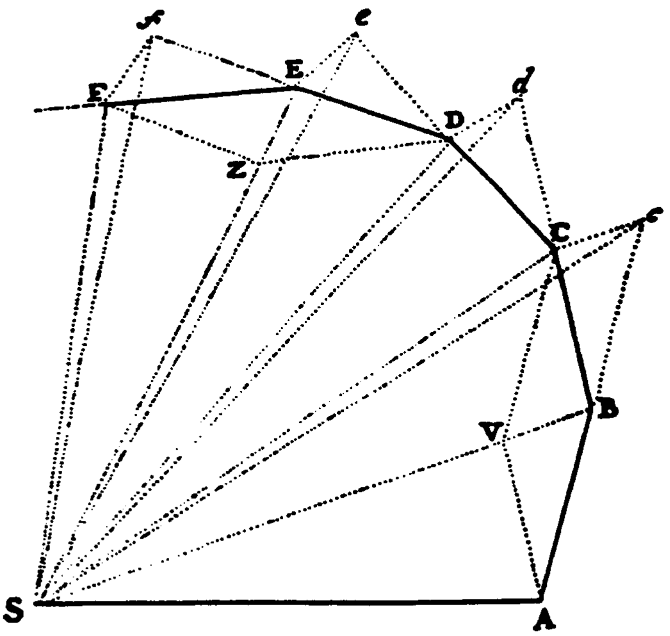
> «Les aires, que les corps animés de mouvements curvilignes décrivent par des rayons menés au centre immobile des forces, sont incluses dans des plans immobiles, et sont proportionnelles aux temps»(18).

Aucune précision n'est donnée par Newton sur le type de courbe plane décrit par le corps; il n'est pas spécifié, en particulier, si cette courbe doit être fermée (Newton envisagera dans la Proposition 12 de la Section III le cas de l'hyperbole).

Puisque le corps décrit une courbe, une force, d'après la loi I, doit lui être continuellement imprimée. Newton suppose donc qu'une force centripète agit et que son centre est un point immobile et mathématique. Dans le cas où l'on aurait affaire à un point non plus mathématique mais matériel, Newton serait conduit à résoudre un autre problème, celui des deux corps, problème qui fait nécessairement intervenir la troisième loi du mouvement.

Dans cette Proposition 1, il faut donc démontrer tout d'abord que la trajectoire curviligne est plane, et ensuite que les «rayons - vecteurs» balaient des aires proportionnelles aux temps.

La difficulté de la démonstration réside principalement dans le traitement mathématique de l'action supposée continue de la force centripète. Comment rendre raison d'une action continue alors que la force imprimée est conceptualisée en s'appuyant sur le modèle fondamentalement discontinu de la percussion ou du choc?



«Supposé que le temps soit divisé en parties égales, et que dans la première partie de ce temps, le corps, par sa force d'inertie, décrive la droite AB. De même, dans la seconde partie, si rien ne l'empêchait, il irait en ligne droite jusqu'à c (par la loi I) décrivant la ligne Bc égale à AB; de sorte qu'en tirant au centre S les rayons AS, BS, cS, il se ferait des aires égales ASB, BSc»(19).

L'égalité des aires des triangles ASB et BSc découle de ce que ces triangles ont une base égale (AB = Bc) et une même hauteur (la perpendiculaire issue de S et tombant sur ABc). Cependant, loin de poursuivre son trajet rectiligne de B en c, suivant la loi I, le corps se dirige vers C:

«En vérité quand le corps parvient en B, la force centripète agit sur lui par un coup unique mais grand ([...] *impulsu unico sed magno* [...]) de sorte que le corps dévie de la droite Bc et continue suivant la droite BC»(20).

Le temps étant divisé en parties égales, c'est au commencement de chacune de ces parties et de façon instantanée que la force agit comme dans la Proposition II du Livre II. En outre, ce mode d'action instantané, impliqué par le modèle sous-jacent du choc, renvoie très précisément à la loi II dans l'énoncé de laquelle il n'est fait, comme nous l'avons déjà dit, aucune allusion explicite au temps :

«Que l'on mène cC parallèle à BS et qui rencontre Bc en C; et à la fin de la seconde partie du temps, le corps (par le Corollaire I des lois) se

> retrouvera en c, dans le même plan que le triangle ASB»[21].

La coplanarité du mouvement résulte de ce que cC est parallèle à BS et de ce que c est dans le plan défini par ASB. Le mouvement à force centrale est un mouvement plan.

> «Joignez SC; et le triangle SBC, à cause des parallèles SB, Cc sera égal au triangle SBc, et aussi, de ce fait, au triangle SAB. Par le même raisonnement, si la force centripète agit successivement en C, D, E, etc. faisant que le corps décrive en chacune des particules de temps, chacune des droites CD, DE, EF, etc., celles-ci se situeront dans un même plan [...]»[22].

Ce premier point acquis, Newton en vient au second concernant l'expression de la loi des aires.

> «[...] et le triangle SCD sera égal au triangle SBC, et SDE à ce même SCD, et SEF à ce même SDE. Donc, des aires égales seront décrites en des temps égaux, dans un plan immobile: et en composant ([...] *componendo* [...]) les sommes quelconques d'aires comme SADS, SAFS sont entre elles, comme sont les temps employés à les décrire»[23].

L'égalité des aires des différents triangles découle, comme précédemment, de ce qu'ils ont même base et même hauteur. A cette étape de la construction rationnelle, la continuité de l'action de la force et corrélativement l'engendrement de la courbe sont loin d'être acquis. En effet, ce qui est engendré par cette succession d'actions s'exerçant au début de chaque particule de temps, c'est un polygone de sommets A, B, C, D .... Comment passer de cette figure polygonale à une figure curviligne engendrée par une action, supposée continue, de la force centripète ?

> «Que maintenant le nombre des triangles augmente à l'infini (*in infinitum*) et que leur ampleur diminue à l'infini; et leur périmètre ultime ADF (*ultima perimeter*), (par le Corollaire quatrième du troisième Lemme) sera une ligne courbe: et pour cette raison la force centripète, qui retire perpétuellement le corps de la tangente de cette courbe, agit sans interruption (*indefiniter*); quant aux aires quelconques décrites SADS, SAFS, toujours proportionnelles aux temps employés à les décrire, elles seront, dans ce dernier cas, proportionnelles aux mêmes temps»[24].

La proportionnalité des aires aux temps étant «toujours» réalisée, cette proportionnalité est conservée à la limite et, par conséquent, un mouvement à force centrale décrit nécessairement des aires égales, dans un même plan, et dans des temps égaux. C'est par un appel au Corollaire IV du Lemme III de la première Section, relatif à la convergence de suites de figures inscrites(25), que Newton introduit la courbure continue de la trajectoire et de cela conclut à une action «sans interruption» de la force centripète. On ne perçoit cependant pas très bien comment doit être comprise rigoureusement la relation entre «les coups uniques mais grands», et la force centripète agissant «sans interruption». La tâche de la physique mathématique est loin d'être accomplie; il manque, à strictement parler, une analyse du continu dégagée des intuitions géométriques.

Cette Proposition 1 est prolongée par six Corollaires. Il importe de donner ici les contenus des Corollaires II, III et IV car leur rôle est essentiel dans la démonstration, qui va nous occuper par la suite, de la Proposition 6 de cette Section, donnant l'expression générale de la force dans le cas des mouvements à force centrale:

> «Corollaire II. Si les cordes AB, BC, de deux arcs décrits successivement par le même corps en des temps égaux, dans des espaces non résistants, sont complétées en un parallélogramme ABCV; et si la diagonale BV dans la position qu'elle a ultimement quand ces arcs sont diminués à l'infini, est prolongée de chaque côté, elle-même passera par le centre de force»(26).

Ce Corollaire exprime simplement une conséquence géométrique du mode d'action de la force, soulignant que BV reste toujours, «ultimement», dirigée vers S.

> «Corollaire III. Si les cordes AB, BC et DE, EF, d'arcs décrits en des temps égaux dans des espaces non résistants, sont complétées en les parallélogrammes ABCV, DEFZ; les forces en B et E sont l'une à l'autre dans l'ultime raison des diagonales BV, EZ, quand ces arcs sont diminués à l'infini. Car les mouvements BC et EF du corps sont composés (par le Corollaire I des lois) des mouvements Bc, BV et Ef, EZ; or, BV et EZ, égales à Cc et Ff, étaient engendrées dans la démonstration de cette Proposition par les impulsions en B et E de la force centripète, aussi sont-elles proportionnelles à ces impulsions»(27).

Le Corollaire II a permis, à l'aide des diagonales, d'étudier, lors du passage à la limite, («ultimement»), la direction des forces; ce nouveau Corollaire a pour objet de déterminer leur grandeur, c'est-à-dire, au cours du même passage à la limite, la grandeur des forces. Ce résultat, du moins si l'on ne pousse pas trop loin l'analyse du passage à la limite, ne présente pas de difficultés. En effet, Newton, en considérant que, dans des temps égaux, les mouvements suivant BC et EF sont composés (Corollaire I des lois) du mouvement inertiel suivant d'une part Bc et d'autre part Ef, et des mouvements suivant Cc et Ff, en conclut, puisque BcCV et EfFZ sont des parallélogrammes, que BV et EZ, égaux à cC et fF, sont comme les impulsions en B et E.

> «Corollaire IV. Les forces par lesquelles des corps quelconques, dans des espaces non résistants, sont retirés des mouvements rectilignes et détournés sur des orbes courbes, sont entre elles comme les flèches des arcs décrits en temps égaux, lesquelles convergent vers le centre des forces, et bissectent les cordes quand ces arcs sont diminués à l'infini. Car ces flèches sont les moitiés des diagonales dont il a été question dans le Corollaire III»(28).

Les diagonales introduites dans le Corollaire III sont remplacées ici par leurs moitiés appelées «flèches».

Cela étant, la force est donc supposée agir de façon continue et sans interruption ; il faut maintenant déterminer son expression : les infiniment petits du deuxième ordre entrent en jeu.

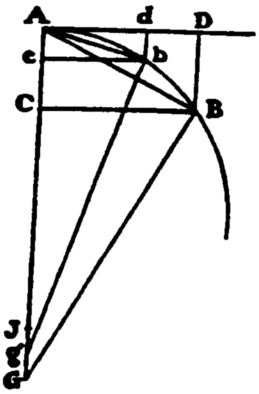
3) Continuité et infiniment petits du deuxième ordre

C'est donc dans la Proposition 6 de la deuxième Section du Livre I que Newton donne l'expression générale de la force centrale:

> «Proposition 6. Théorème 5. Si un corps tourne sur un orbe quelconque autour d'un centre immobile, dans un espace non résistant, et s'il décrit quelqu'arc tout juste naissant dans le temps le plus petit possible, et s'il est entendu que soit menée la flèche de l'arc qui bissecte la corde, et que, prolongée, elle passe par le centre de force: la force centripète au milieu de l'arc sera comme la flèche directement et deux fois inversement comme le temps»(29).

La démonstration qui suit fait intervenir deux résultats obtenus précédemment, d'une part le Corollaire IV de la Proposition 1 que nous avons déjà mentionné, et d'autre part les Corollaires II et III du Lemme XI de la Section I.

> «Lemme XI. La soustendante évanouissante de l'angle de contact, sur toutes les courbes ayant une courbure finie au point de contact, est ultimement dans la raison doublée de la soustendante de l'arc contigu»(30).



La démonstration de ce Lemme, qui s'appuie principalement sur l'existence d'un cercle osculateur, conduit à considérer, qu'ultimement, les dernières raisons de AB^2 à Ab^2 (les soustendantes de l'arc) et de BD à bd (les soustendantes de l'angle de contact) «sont les mêmes». En termes plus modernes, ce résultat revient à dire que si la corde est prise comme infiniment petit principal, alors BD est un infiniment petit du second ordre.

Il s'ensuit alors:

> «Corollaire I. Comme les tangentes AD, Ad, les arcs AB, Ab, et leurs sinus BC, bc sont ultimement égaux aux cordes AB, Ab; leurs carrés sont aussi ultimement comme les soustendantes BD, bd»(31).

Ce Corollaire signale seulement, entre autres, que dans l'énoncé de la Proposition 1, la corde (ou la soustendante de l'arc) peut être remplacée par l'arc AB ou par la tangente AD ou bien encore par le sinus BC. Dans le Corollaire V du Lemme XI, Newton précisera, comme cela est déjà clair, que la courbe à courbure finie est ultimement une parabole de sommet A.

> «Corollaire II. Et ces carrés sont aussi ultimement comme sont les flèches des arcs, lesquelles bissectent les cordes et convergent vers un point donné; car ces flèches sont comme les soustendantes BD, bd»(32).

Il n'est pas fait référence ici aux flèches des arcs AB et Ab mais à celles en A des arcs doubles, comme le confirmera le Corollaire I de la Proposition 6(33).

Le Corollaire III donne de ce résultat une interprétation cinématique:

> «Corollaire III. C'est pourquoi la flèche est en raison doublée du temps dans lequel un corps de vitesse donnée décrit l'arc»(34).

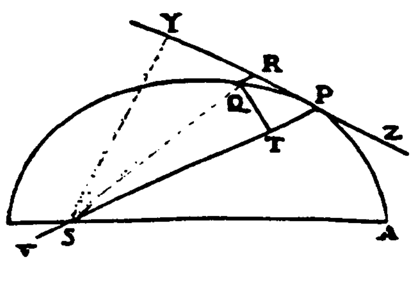
En effet, lorsqu'un arc est décrit par un corps avec une vitesse donnée constante, la longueur de cet arc est proportionnelle à la durée du trajet, or la flèche est ultimement comme le carré de l'arc (Corollaires I et II), elle est donc, ultimement, comme le carré du temps.

Ce travail préparatoire a rendu possible, du moins pour l'essentiel, la lecture de la démonstration de la Proposition 6(35):

> «Car la flèche, le temps étant donné, est comme la force (par le Corollaire IV de la Proposition 1) et, augmentant le temps dans une raison quelconque, à cause de l'augmentation de l'arc dans la même raison, la flèche est augmentée dans cette raison doublée (par les Corollaires II et III du Lemme XI) et c'est pourquoi elle est comme la force une fois et le temps deux fois. Retirons de chaque côté la raison doublée du temps, et il apparaît que la force est comme la flèche directement et inversement comme deux fois le temps. C.Q.F.D.»(36).

En raison des analyses précédentes, et sans vouloir entrer dans une étude minutieuse de la rigueur mathématique de cette démonstration, il suit que si t est le temps de parcours d'un arc, alors, ultimement, la flèche a (t) de cet arc est à la fois comme la force centripète dans le milieu de l'arc (voir supra Corollaire IV de la Proposition 1) et comme le carré du temps de parcours de l'arc (voir supra Corollaires II et III du Lemme XI), d'où la force centripète f dans le milieu de l'arc est comme la flèche et inversement comme le carré du temps ($f \alpha \frac{a(t)}{t^2}$).

Puis, par le Corollaire I de cette Proposition, Newton parvient, *via* la loi des aires, à l'expression générale, géométriquement manipulable, des forces centrales:



> «Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, et que cette courbe soit touchée par la droite ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe soit tiré QR parallèle à SP, et qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP: la force centripète sera

réciproquement comme le solide [la grandeur qui a la dimension d'un volume] qui devient ultimement $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P et Q coïncident. Car QR est égale à la flèche de l'arc double de QP dont le milieu est P, et le double du triangle SPQ ou SP × QT est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit; c'est pourquoi on peut l'écrire à la place de ce temps»(37).

En effet, ultimement, QR est égal à la flèche de l'arc double de QP dont le milieu est P. Par ailleurs, le double de l'aire du triangle SQP est égal à SP × QT; or, de par la Proposition 1 (loi des aires), cette aire est proportionnelle au temps au cours duquel l'arc double de QP a été décrit. Ainsi le temps peut être représenté géométriquement par cette aire et, en substituant, la force centripète en P peut s'exprimer, lorsque P et Q coïncident par : f (en P) $\alpha \frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$; c'est-à-dire que cette force est aussi «réciproquement comme le solide que devient ultimement $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P et Q coïncident».

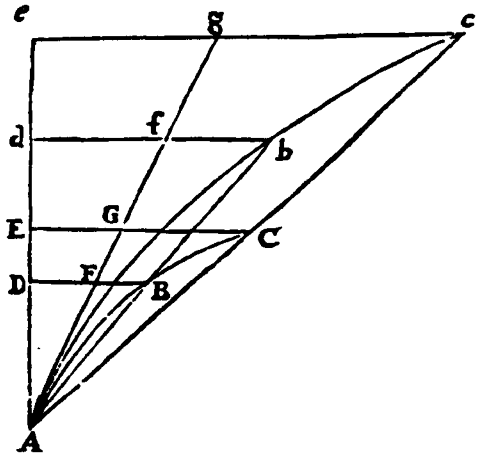
Newton dispose maintenant d'une expression géométriquement manipulable de la force centripète en un point, expression susceptible de lui permettre de résoudre de nombreux problèmes relatifs aux forces centrales; c'est-à-dire finalement d'obtenir l'expression de la variation de la force en fonction de la distance entre le corps en mouvement et le centre donné de force.

Il est remarquable de constater que Newton, dans cette démonstration, visant à déterminer l'expression générale de sa loi de force centrale, ne fait aucune référence à la loi II, bien au contraire référence est faite au Lemme XI dont le rôle est décisif en rapport avec l'action continue, d'un point de vue local, de la force.

Par ailleurs Newton intercale dans son texte, entre la démonstration de la Proposition 6 et le Corollaire I, la phrase suivante: «la même chose se montre facilement aussi par le Corollaire IV du Lemme X». Or le Lemme X de la Section I est le seul qui traite explicitement de la force: «Les espaces que décrit un corps poussé par une force finie quelconque, que cette force soit déterminée et immuable, ou qu'elle soit continuellement augmentée ou continuellement diminuée, sont, au commencement même du mouvement, en raison doublée des temps»(38).

Cette relation des espaces aux temps, caractéristique d'un mouvement uniformément accéléré, montre la force sous un aspect bien différent de celui donné dans la loi II. Déjà dans le premier *De motu corporum* de l'automne 1684 Newton, dans le texte correspondant à la future Proposition 6 des *Principia* fait référence à l'hypothèse 4 suivant laquelle «l'espace que décrit un corps poussé par une force centripète quelconque est au commencement même de son mouvement en raison doublée des temps»[39]. Il importe donc d'examiner la démonstration qui suit ce Lemme X; cela requiert d'abord l'étude du Lemme précédent:

> «Lemme IX: Si la droite AE et la courbe ABC toutes les deux de position donnée, se coupent mutuellement selon un angle donné A; et si des ordonnées BD, CE sont appliquées à cette droite selon un autre angle donné, rencontrant la courbe en B et C; puis que les points B et C s'approchent ensemble continuellement du point A jusqu'à s'y rencontrer, je dis que les aires des triangles ABD, ACE seront ultimement l'une à l'autre dans la raison doublée des côtés»[40].



Dans la démonstration de ce Lemme, Newton considère la tangente AFG à la courbe ABC ainsi que les abscisses Ad et Ae auxquelles les abscisses variables AD et AE sont toujours proportionnelles, de telle sorte que, dans leur évanouissement AD et AE, restent proportionnelles à Ad et Ac. Par ailleurs les ordonnées db et ec qui sont «tirées parallèles aux ordonnées DB, EC, rencontrent en b et c les lignes AB, AC prolongées». Par A, b et c passe une courbe semblable à ABC et faisant avec elle un angle nul en A.

Lorsque les points B et C décrivent la courbe ABC de façon à, finalement, coïncider avec le point A, les aires curvilignes Abd et Ace coïncident à la limite avec les aires rectilignes Afd et Age. Par le Lemme V ces aires curvilignes ont des limites finies proportionnelles aux carrés des côtés Ad et Ae. Du fait de la similitude, les aires évanouissantes ABD, ACE sont, à la limite, en raison doublée des côtés AD et AE. En termes modernes on dirait que l'aire est un infiniment petit d'ordre 2, l'abscisse étant l'infiniment petit principal.

La démonstration du Lemme X repose sur la même figure:

> «Que les lignes AD, AE représentent les temps et les vitesses engendrées en ces temps le soit par les ordonnées BD, EC; les espaces décrits avec ces vitesses, seront comme les aires ADB, ACE décrites par les ordonnées, c'est-à-dire, au commencement même du mouvement (par le Lemme IX) en raison doublée des temps AD, AE. C.Q.F.D.»[41].

Bien que la force ne soit pas introduite dans la démonstration, il n'en reste pas moins que dans l'énoncé de ce Lemme, la force, qu'elle soit constante («déterminée ou immuable») ou qu'elle varie («augmente ou diminue continuellement»), n'est pas celle de la loi II (à laquelle il n'est d'ailleurs fait aucune référence), mais, bien plutôt à une force prise dans un sens renvoyant à un concept voisin du nôtre ou plus exactement, dans le cas présent, au concept d'une quasi-accélération (il s'agit, de notre point de vue, d'une quasi-accélération car l'algorithme de la cinématique n'est pas encore construit; cf la quatrième partie).

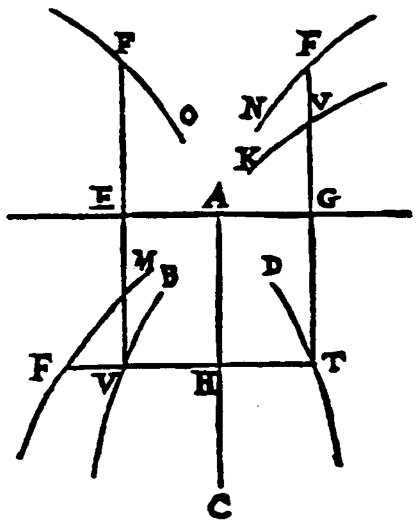
C'est donc très naturellement que pour parvenir à son résultat dans la Proposition 6, Newton, lorsqu'il ne fait pas appel au Lemme XI, fait appel au Lemme X. Dans un cas, comme dans l'autre, la force de la loi II est remplacée: par la force (accélération) dans un sens quasi moderne (Lemme X) ou par la mise en œuvre équivalente d'un cercle osculateur (Lemme XI). Lorsque Pierre Varignon va s'engager dans son analyse continuiste de l'action de la force, c'est également sur le Lemme X de Newton qu'il s'appuiera.

4) Le traitement algorithmique varignonien

Dans les pages qui suivent nous nous limiterons à donner cursivement les principales étapes de la construction du concept de «force accélératrice», et cela dans le seul cas des mouvements rectilignes.

Cette étude de Varignon, prolongeant celle du 5 juillet 1698[42] est présentée dans un Mémoire en date du 30 janvier 1700. Elle s'ouvre en ces termes dans les pages des Recueils annuels de l'Académie:

> «Tous les angles rectilignes étant droits dans la figure que voicy, soient six courbes quelconques TD, VB, FM, VK, FN, FO dont les trois premières expriment par leur abscisse commune AH, l'espace parcouru par un corps quelconque mû comme l'on voudra le long de AC. Soit de même le temps employé à le parcourir, exprimé par l'ordonné correspondante HT de la courbe TD; la vîtesse de ce corps en chaque point H, par les ordonnées aussi correspondantes VH, VG, des courbes VB, VK; ce qu'il a de force



vers C, à chaque point H, indépendamment de sa vîtesse (je l'appelleray dorénavant *Force centrale* à cause de sa tendance au point C comme centre), s'exprimera de même par les ordonnées correspondantes encore FH, FG, FE, des courbes FM, FN, FO»(43).

Dans la suite de son texte, Varignon nomme ces six courbes fondamentales TD, VB, FM, VK, FN et FO respectivement (nous rappelons que le corps décrit d'un mouvement rectiligne quelconque AC):

> «[...] la courbe TD, à laquelle les ordonnées HT se terminent en T, s'appellera la *courbe des temps*»(44). (Les abscisses sont AH).
>
> «Les deux courbes VB, VK, auxquelles les ordonnées correspondantes et égales VH, VG, se terminent en V, s'appelleront les *courbes des vitesses*»(45). (Les abscisses sont respectivement AH et AG ou HT).
>
> «Enfin les trois courbes FM, FN, FO, auxquelles les ordonnées correspondantes encore et égales FH, FG, FE, se terminent en F, s'appelleront les *courbes des forces*»(46). (Les abscisses sont respectivement AH, HT ou AG, et VH ou EA).

En résumé, nous pouvons dire, dans un langage légèrement modernisé, que la courbe TD exprime les variations de l'espace AH en fonction du temps HT; la courbe VB celles de l'espace AH en fonction de la vitesse VH; la courbe VK celles du temps AG en fonction de la vitesse VG; la courbe FM celles de l'espace AH en fonction de la force centrale FH; la courbe FN celles du temps AG en fonction de la force centrale FG; et enfin, la courbe FO celles de la vitesse EA en fonction de la force centrale FE .

Varignon associe alors à chacune des quatre variables, espace, temps, vitesse et force, un symbole algébrique déterminé:

> «[...] soient les espaces parcourus AH = x, les temps employés à les parcourir HT = AG = t, les vîtesses en H (que j'appelleray *finales*) HV = AE = GV = v, les forces centrales correspondantes HF = EF = GF = y»[(47)].

A l'issue de cette procédure d'algébrisation, Varignon est en mesure de mettre en place, dans un premier temps, les concepts cinématiques, déjà envisagés dans le Mémoire du 5 juillet 1698 et nécessaires pour la suite de son investigation des forces centrales dans le cas des mouvements rectilignes:

> «De là on aura dx pour l'espace parcouru comme d'une vitesse uniforme v, à chaque instant; dv pour l'accroissement de vitesse qui s'y fait; ddx pour ce qui se parcourt d'espace en vertu de cet accroissement de vitesse; et dt pour cet instant. A ce compte, la vitesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au temps employé à le parcourir l'on aura déjà $v = \frac{dx}{dt}$ pour une première Règle, laquelle donnera $dv = \frac{ddx}{dt}$ en faisant dt constante»[(48)].

Varignon se trouve donc maintenant en possession de deux expressions différentielles relatives au concept de vitesse:

— D'une part, celle de la vitesse dans chaque instant: $v = \frac{dx}{dt}$

— D'autre part, celle de l'accroissement de cette même vitesse pendant le même instant dt: $dv = \frac{ddx}{dt}$; cet accroissement étant acquis dès le début de l'intervalle de temps dt.

La mise en place des expressions différentielles relatives à la force centrale va s'appuyer sur le modèle galiléen de la chute des corps:

> «De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir; l'on aura aussi $ddx = y\, dt^2$ ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre»[(49)].

Varignon adopte ici la conceptualisation de la force accélératrice proposée par Newton dans le Lemme X de la Section I du Livre I des *Principia*. La comparaison de la première phrase du texte varignonien avec l'énoncé, que nous redonnons ici, du Lemme X de Newton est dans cette perspective tout à fait révélatrice(50):

> «Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps».

Le Corollaire 3 de ce Lemme stipule en outre:

> «Corollaire 3. Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps».

En conséquence, puisque pendant l'intervalle de temps dt la force, supposée «constante et continuellement appliquée», engendre l'accroissement d'espace égal à ddx, nous pouvons écrire alors en suivant strictement Varignon:

$ddx = ydt^2$ ou $\quad y = \frac{ddx}{dt^2}$

soit $y = \frac{ddx}{dt.dt}$, or $dv = \frac{ddx}{dt}$ d ' où $y = \frac{dv}{dt}$.

Varignon, tout en parvenant ici à une expression satisfaisante de la force centrale y, laisse cependant en suspens diverses questions newtoniennes relatives, en particulier, au mode d'action de la force. Celui-ci doit-il être compris comme continu ou discontinu par impulsions successives (modèle du choc)? Une certaine ambiguïté subsiste dans le cours des démonstrations de Varignon en raison, pour une large part, d'une absence de définition précise des concepts mathématiques de limite et de continuité(51).

Il énonce finalement ce qu'il appelle les «Règles générales des mouvemens en lignes droites»:

«1°. $v = \frac{dx}{dt}$, 2°. $y = \frac{dv}{dt}$ $(\frac{ddx}{dt^2})$»(52).

Ces règles nous révèlent que les expressions des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant peuvent être déduites l'une de l'autre par un simple calcul mettant en oeuvre les algorithmes leibniziens, et qu'en conséquence «d'après ces formules, comme l'écrit Auguste Comte dans la 17e leçon de *Philosophie première. cours de philosophie positive,* toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations ou, le plus souvent, dans des intégrations».

Dans le cas des trajectoires curvilignes, à l'issue d'une construction similaire présentée dans un Mémoire en date du 31 mars 1700, Varignon parvient à ce qu'il appelle les «Règles générales des mouvemens en lignes courbes»(53).

*

* *

Le travail newtonien est apparu dans toute sa profondeur. Si la loi II n'est pas au sens moderne du terme la "loi de Newton" et, a priori, elle n'avait aucune raison de l'être, si ce n'est au prix d'une lecture recurrente, Newton n'en propose pas moins de remarquables solutions pour les questions impliquant la continuité de l'action.

C'est finalement, comme tend à le prouver notre lecture des textes de Varignon, dans les Lemmes de la section I que réside le véritable moteur de la dynamique newtonienne, la cohérence des *Principia*(54).

Michel BLAY
CNRS Paris

ABRÉVIATIONS

Les textes des *Principia* cités et analysés dans ces pages s'appuient sur la troisième édition (Londres 1726).

Nous utilisons la traduction française de la marquise du Chastelet : *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (Paris 1756-1759 ; rééd Blanchard 1966 ; Gabay 1989) ; par la suite *TMC* 56. Lorsque nous modifions cette traduction nous le signalons par la mention *TMC*56 *M*.

AM : Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année. Tirés des registres de cette Académie. AM : partie *Mémoires*

NOTES

(1) *Discours de la cause de la pesanteur,* (Leide, 1690, rééd Paris, Dunod 1992) p. 175-176. Sur les débats relatifs à la cause de la pesanteur à l'Académie Royale des Sciences, voir en particulier Michel Blay, *Les raisons de l'infini,* (Paris, Gallimard, 1992) p. 63 et sq.

(2) *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae,* (Paris, 1673) ; *Œuvres complètes de Christiaan Huygens,* 22 vols., (La Haye, Société hollandaise des Sciences, 1888-1950), Vol 18, p. 128-130.

(3) Dans son raisonnement Huygens groupe par deux les intervalles de temps et considère les rapports respectifs des espaces parcourus. Ce résultat est généralisable

(4) *TMC 56 M.*

(5) *TMC 56 M.*

(6) *TMC 56.*

(7) Pour une étude plus générale de ces questions voir Michel Blay, «Le traitement newtonien du mouvement des projectiles dans les milieux résistants» *Revue d'histoire des sciences* (1987) p. 325-355 et «Varignon ou la théorie du mouvement des projectiles 'comprise en une Proposition générale'», *Annals of Science* (1988) p. 591-618.

(8) *TMC 56.* Cette traduction n'est pas tout à fait exacte car le latin donne «[...] et idem sola vi *insita* per medium moveatur [...]» (c'est moi qui souligne). Le corps se meut donc bien ici du fait de sa seule force d'inertie au sens newtonien (voir supra deuxième partie).

(9) *TMC 56.*

(10) *TMC 56 M.*

(11) L'expression «particules de temps» désigne, comme cela sera confirmé par la suite du texte, non pas un temps de petite durée, mais des parties de temps destinées à tendre vers zéro.

(12) L'action de la force a donc lieu de façon instantanée au commencement même de la particule de temps.

(13) Nous renvoyons ici à nos analyses relatives à l'ambiguité newtonienne du concept de force.

(14) Si l'on appelle v_1, v_2, v_3, v_4.. les vitesses du projectile «à chacune des particules de temps» égales, et kv_1, kv_2, kv_3, kv_4... la résistance exercée par le milieu au début de chaque particule de temps, il s'ensuit que: $v_2 = v_1 - kv_1$, $v_3 = v_2 - kv_2$, $v_4 = v_3 - kv_3$..

(15) Ce Lemme a pour objet d'établir que: si $\frac{A}{A-B} = \frac{B}{B-C} = \frac{C}{C-D} = ..$ alors, $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$.

(16) *TMC 56.* D'après le résultat établi dans la note précédente nous avons: $\frac{v_1}{v_1 - v_2} = \frac{v_2}{v_2 - v_3} = \frac{v_3}{v_3 - v_4} = ...$ Par le Lemme I $\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_3}{v_4} = ...$ et $v_2 = (1-k)v_1$, $v_3 = (1-k)^2 v_1$, ... $v_{n+1} = (1-k)^n v_1$ ...

(17) *TMC 56.*

(18) *TMC 56 M.*

(19) *TMC 56 M.*

(20) *TMC 56 M.*

(21) *TMC 56 M.*

(22) *TMC 56 M.*

(23) *TMC 56 M.*

(24) *TMC 56 M.*

(25) «Et par conséquent ces dernières figures (quant à leurs périmètres acE) ne sont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes» *TMC 56 M.*

(26) *TMC 56 M.*

(27) *TMC 56 M.*
(28) *TMC 56 M.*
(29) *TMC 56 M.*
(30) *TMC 56 M.*
(31) *TMC 56 M.*
(32) *TMC 56 M.*
(33) Voir infra.
(34) *TMC 56 M.* Les Corollaires II et III du Lemme XI ne figuraient pas dans l'édition de 1687, ce qui évidemment induit quelques modifications dans la rédaction de la Proposition 6 en 1713 et 1726 par rapport à celle de 1687. Ces modifications, en renforçant l'importance des Lemmes, s'accordent parfaitement avec nos analyses relatives au statut newtonien de la «force».
(35) Pour une étude détaillée de cette Proposition voir Georges Barthélemy, *Concepts et méthodes de la mécanique rationnelle dans les Principia de Newton,* Thèse soutenue à la Sorbonne en 1985, exemplaires dactylographiés, deuxième partie.
(36) *TMC 56 M.*
(37) *TMC 56 M.*
(38) *TMC 56 M.*
(39) *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* 8 Vol, édité par D.T. Whiteside (Cambridge university Press, 1967-1981) Vol VI, p. 33.
(40) *TMC 56 M.*
(41) *TMC 56 M.*
(42) Pour l'analyse détaillée de ces questions et des manuscrits de Varignon, voir Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles,* (Paris, PUF, 1992).
(43) *AM,* année 1700 (1703) p. 22..
(44) *Ibid.*
(45) *Ibid.*
(46) *Ibid.*
(47) *Ibid.*, p. 23.
(48) *Ibid.*
(49) *Ibid.*
(50) Voir supra.
(51) L'introduction d'une part de $dv = \frac{ddx}{dt}$ qui implique une action discontinue et d'autre part de celle du modèle de l'action continue que Varignon met en place *via* le Lemme X de Newton engendre une ambiguïté qui doit être rapprochée de l'ambiguïté newtonienne concernant la conceptualisation de la force.
(52) *AM,* année 1700 (1703) p. 23.
(53) *Ibid.*, p. 83-101.
(54) J'ai donné des analyses plus détaillées de certaines questions traitées ici dans mon livre *Les "Principia" de Newton,* Paris, PUF, 1995.