Séminaire de philosophie et mathématiques

Dirk Van Dalen

L'identité en mathématiques constructives

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1989, fascicule 2
« L'identité en mathématiques constructives », , p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1989___2_A1_0>

L'IDENTITE EN MATHEMATIQUES CONSTRUCTIVES

D. VAN DALEN

Il y a deux aspects de la théorie de l'identité un aspect philosophique et un aspect technique. Les deux aspects sont intimement liés. C'est une des faiblesses de la pratique classique que l'usage de la logique classique obscurcit les distinctions raffinées.

Je décrirai simultanément les effets du point de vue classique et constructif. Remarquons d'abord que les doctrines de Frege, concernant les notions de référence et identité sont parfaitements acceptables pour les constructivistes. Enfin, il s'agit des objets mathématiques qu'on veut décrire en un langage mathématique, et "sens" et "référence" sont aussi fondamentaux qu'en cas de la théorie classique. Je considère les mathématiques constructives comme une discipline comme tous les autres -et pas en le sens de Brouwer comme un phénomène sans langage.

Cependant, la théorie constructiviste de "dénotation et sens" est plus ésotérique, parce que l'introduction de "être construit" ajoute un caractère modal. Par conséquence, les considérations de Kripke sur "Naming and Necessity" sont applicables ici.

Les objets mathématiques constructivistes sont des choses construites, soit par des hommes comme processus mental, soit par des machines abstraits ou non.

On peut rappeler des détails historiques : pour Kronecker et Bishop les nombres naturels sont donnés auparavant, pour Brouwer les nombres naturels sont créés par l'homme lui-même, et en plus l'homme fait encore des objets abstraits comme "suite de choix" et "espèces" (ensembles).

Des propriétés des objets mathématiques sont constatées par des moyens effectifs, en général ce sont des constructions. Par exemple : on obtient l'identité de 7 et 5 + 2 en faisant une construction qui ajoute 5 et 2 et qui compare le résultat avec 7.

En général on ne sait pas auparavant qu'une construction réussit, en particulier on ne sait pas toujours si l'objet qu'on veut construire existe ou non. Si on calcule l'inverse d'un nombre réel; donné par une suite de Cauchy $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$, la construction es simple : on construit la suite $a_1^{-1}, a_2^{-2}, \ldots$ en prenant $0^{-1} = 1$. Sans aucune condition cela ne conduira pas à une suite de Cauchy. Alors, il n'est pas certain que a^{-1} existe.

Résumons encore les modes principaux de construction des objets mathématiques.

1. **Construction des nombres naturels**, soit par des actes mentaux, soit par une méthode objective comme l'itération des barres (comme en théorie des algorithmes, ou chez l'école Russe de Markov ou comme le fait M. Lorenzen), soit par une machine éventuellement abstraite, comme machine de Turing).

2. **Constructions des objets discrets combinatoires**, comme triplets de nombres naturels, nombres rationels, triangles, graphes finis, etc. Tous ces objets peuvent être codés dans les nombres naturels, telles que l'étude des objets discrets (finis) pouvant être réduits à l'étude des nombres naturels.

3. **Construction des objets infinis** et plus ou moins abstraits.

3a. **Les suites de nombres naturels données par une loi**. Alors on donne une loi, c'est une prescription finie qui détermine pour chaque n un nombre a_n. C'est dans le sens d'Emile Borel.

Le paradigme, bien entendu est l'exemple des suites récursives. Ils fournissent les études détaillées des problèmes d'indécidabilité.

3b. Les suites de choix des nombres naturels. Ces suites sont données par une information incomplète c'est-à-dire il n'y a aucune prescription algorithmique ou mécanique pour générer les nombres a_n.

3c. **Les sous ensembles d'ensemble des nombres naturels**.

3d. **Itérations de 3a, 3b, 3c,** en particulier des ojbets de types finis.

En s'éloignant des objets primitifs fondamentaux la relation d'identité devient peu à peu plus compliquée.

Notons que le point de départ pour chaque école philosophique des mathématiques est la collection des nombres naturels, une collection d'objets discrets pour laquelle on peut décider l'identite. Les objets derives discretement des nombres naturels héritent la décidabilité de l'identité des nombres naturels. Si on veut comparer deux triples (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3), on compare les nombres a_i, b_i deux à deux.

Il est une conséquence de cela que l'identité pour les nombres entiers, et rationnels est décidable.

Si on passe des nombres naturels aux fonctions numériques, la décidabilité n'est pas préservée.

En effet, pour des fonctions récursives la décidabilité de l'identité des fonctions f et g entraîne la résolvabilité du "Halting problem" de Turing.

Et en cas des suites de choix la décidabilité est contraire au caractère continu inhérent à la mode libre de génération.

Pour les ensembles des nombres naturels on rencontre une situation comparable. Si on pouvait décider l'identité des ensembles quelconques A et B, on pourrait aussi résoudre toutes les problèmes de décisions mathématiques.

La question brûlante est alors, est-ce que la situation avec les objets généralisées est d'une anarchie désespérée. Ou est-ce qu'il y a des propriétés convenables, quoique la situation soit chaotique ?

Considérons les fonctions récursives; elles sont données par des instructions concrètes, par exemple une machine de Turing. Une telle instruction est une suite finie de mots dans un langage quelconque. Traditionnellement on code ces instructions par des nombres naturels, alors les instructions ont des propriétés semblables à ces nombres

naturels. En particulier, quand deux instructions sont données on peut simplement les comparer. C'est-à-dire, la relation d'identité pour les instructions des fonctions récursives et décidable. C'est une conclusion tres importante : la matière de base qui constitue les fonctions récursives sont les nombres naturels. Dans la théorie des fonctions récursives on parle de "nombres de Godel" ou "indices", au lieu de "constructions codés".

Ensuite l'identité extensionnelle pour les fonctions récursives est générée par une relation d'équivalence sur les nombres naturels :

a ~ b si {a} (n) - {b} (n) pour chaque n . En mots : on identifie toutes les instructions qui résultent en des fonctions numériquement identiques. Et on peut considérer les fonctions récursives comme des sous-ensembles de N - plus précisément, la partition induite par la relation d'équivalence donnée.

Il se présente une généralisation naturelle : bien qu'on ne peut pas espérer que l'univers mathématique consiste d'objets générés par une méthode effective quelconque, les collections d'objets mathématiques sont obtenues comme ensembles quotients (ou image) d'un ensemble raisonnable.

Ce point mérite une digression : un ensemble nous paraît fondamental quand les éléments sont reconnaissables individuellement; par exemple, l'ensemble des nombres naturels est de telle nature - ses éléments sont produits individuellement et on peut décider l'identité pour deux nombres quelconques. Un nombre naturel comporte toute l'information dont on a besoin pour le manipuler. Par contre un nombre réel (comme classe d'équivalence des suites de Cauchy) est insuffisant pour déterminer effectivement sa propre place au milieu du continu. On pourrait dire les nombres naturels sont générés immédiatement par nous et les nombres réels sont obtenus par un processus d'abstraction des suites de Cauchy. Mais qu'est-ce qu'on fait avec les suites infinies ?

Les suites des nombres naturels sont données par nous avec une certaine intention. C'est une pièce d'extra information qui confère une sorte d'individualité à la suite. Même, si on ne sait pas quand deux fonctions récursives sont numériquement identiques, on sait quand les instructions sont identiques. Et le même s'applique aux suites de choix. Si nous générons deux suites de choix a et b, nous savons qu'il s'agit de deux processus individuellement distingués, quoique nous ne savons pas si les processus de choix produisent des suites de nombres identiques.

Alors les objets mathématiques primitifs, générés directement par nous sont pourvus d'une information qui peut être utilisée pour les distinguer.

Il y a un critère extérieur, mathématique, qui démontre le caractère fondamental : l'axiome du choix (AC). AC est valide pour les nombres naturels et un ensemble quelconque : si on sait que pour chaque nombre naturel n, il existe un objet a de A, on a un certain degré d'information qui permet de construire a dépendant de n . Et ça fournit exactement la fonction de choix. Car, soit donné $\forall n \exists a\ A(n,a)$, nous savons qu'il y a une démonstration et cela entraîne que pour chaque n il y a une construction qui affirme que c'est un nombre naturel, il existe une construction K qui démontre $\exists a\ A(n,a)$, mais l'existence d'un objet a est démonstré par une construction implicite en K. Tout cela provient d'une fonctin de choix.

Alors $AC^{\mathbb{N},A}$ est valable.

Par contre $AC^{\mathbb{R},\mathbb{N}}$ n'est pas valable : on peut déterminer pour chaque nombre réel a un nombre naturel n tel que $a < n$. Mais il est consistant de supposer que toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sont continues, on obtient une contradiction : les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{N}$ sont constantes, et l'axiome de choix donne une fonction F telle que pour chaque nombre réel a, F(a) est un nombre naturel et $a < F(a)$, mais comme F est nécessairement constant on a une contradiction.

En terminologie de la théorie des ensembles, introduite par P. Aczel, on dit qu'un ensemble A tel que $AC^{A,B}$ est valable pour chaque B est une base. On utilise les ensembles B pour essayer et confirmer le caractère fondamental de A .

$\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels est une base, parce que $AC^{\mathbb{N},A}$ est valable pour tout A, et nous avons vu que $\mathbb{R}$ n'est pas une base - $AC^{\mathbb{R},\mathbb{N}}$ faillit. Au contraire l'ensemble des suites de Cauchy est une base.

validité de l'axiome du choix est dû au fait que les éléments de la base sont fortement distinguables. C'est l'argument traditionnel pour la validité de l'axiome du choix en mathématiques constructives.

Nous résumons l'argument pour l'axiome du choix : si nous avons une construction α (épreuve) pour

$$\forall a \in A \exists b \in B\ R(a,b)$$

nous avons une construction pour

$$\forall a(a \varepsilon A \rightarrow \exists b \varepsilon B\ R(a,b)),$$

alors pour chaque a $\alpha(a)$ épreuve $a \varepsilon A \rightarrow \exists b \varepsilon B\ R(a,b)$, c'est-à-dire pour chaque épreuve β de $a \varepsilon A$ on a une construction $(\alpha(a))\beta$ de $\exists b \varepsilon B\ R(a,b)$. Et cela implique que nous avons une construction $|(\alpha(a))\beta|_1$ de $R(a,|(\alpha(a))\beta|_0$ et de $|(\alpha(a))\beta|_0 \varepsilon B$. Est-ce que $|(\alpha(a))\beta|_0$ est la fonction de choix ? Il manque un petit détail: la condition " est une épreuve de $a \varepsilon A$ " n'est pas satisfait automatiquement; la fonction de choix F(a) aussi dépend de β, et ça n'est pas permis. Mais les constructivistes c est important, parce que $a \varepsilon A$ n'est pas décidable en général. Pour certaines structures "est une épreuve de $a \varepsilon A$" est trivial, par exemple pour $\mathbb{N}$, le nombre naturel n est sa propre épreuve qu'il est un élément de $\mathbb{N}$ - par conséquent l'axiome de choix pour les nombres naturels est vrai, mais pas pour les nombres réels.

Considérons un nombre réel a, comment trouve-t-on $n \varepsilon \mathbb{N}$ tel que $a<n$? On commence par prendre une suite de Cauchy (a_n) tel que $(a_n) \sim/= a$ et alors - car on sait la vitesse de convergence de (a_n) - on trouve n. Mais nous observons qu'il comporte un processus de choix non effectif de a $a(a_n)$. Cela explique pourquoi l'axiome du choix n'est pas vrai pour les nombres réels. Au contraire l'axiome du choix est valable pour l'ensemble des suites de choix, quoique l'identité pour les suites de choix n'est pas decidable.

Mais..., l'identité pour $P(\mathbb{N})$ est la plus mauvaise possible. Les éléments de $P(\mathbb{N})$ sont tellement indistinguables qu'on a une forme d'axiome de choix dégénérée : la propriété d'uniformité.

$\forall X \exists n\ A(X,n) \quad \exists n \forall X\ A(X,n)$, ou X est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Dans un univers obéissant à la thèse de Church cela implique que $P(\mathbb{N})$ est une base. Alors il me semble qu'on a un spectre des

Dans un univers obéissant à la thèse de Church cela implique que $P(\mathbb{N})$ est une base. Alors il me semble qu'on a un spectre des ensembles de base de la décidabilité jusqu'à l'indécidibilité extrême. On ne sait pas ce qu'il arrive entre les deux extrêmes.

Pour finir la remarque sur la contribution de Aczel à la théorie des ensembles constructivistes : il proposait que chaque ensemble est une image d'une base. C'est l'axiome de présentation.

Alors on n'a pas l'axiome du choix pour tous les ensembles, mais il y a un succédané.

Retournant à la matiere de l'existence, il parait que l'égalité de deux objets a et b entraîne l'existence de a et b, parce qu'il faut contrôler effectivement a = b, et il faut que a et b soient des objets existants. Cet idée parait déjà chez Heyting (1930), il disait "p = p n'est pas valable pour tout signe p, on l'emploie pour exprimer que p dénote un objet".

Puisque Heyting postulait $p = p \wedge q = q \to p = q \vee \neg p = q$, on peut conclure qu'il avait en vue l'égalité pour des objets primitifs, donnée avec toute information (par exemple la construction). Il introduisait un signe = pour l'identité générale, comme identité définie.

Les propriétés et la logique d'existence et de l'identité ont été étudiés par D.S. Scott. Ce n'est pas notre but de discuter cette théorie, mais il suffit de dire que la théorie est convenable pour étudier les théories des opérations partielles.

Rappelons que Keene désignait l'identité de deux termes t(x) et s(x) par t(x) s(x), c'est-à-dire - si t(x) existe alors s(x) existe et ils sont égaux au même nombre naturel.

Certains mathématiciens, notamment E. Bishop, sont de l'avis qu'il n'y a qu'une sorte d'identité : l'identité primitive, inhérente à la construction. Toutes les autres identités sont dérivées des identités primitives par une relation d'équivalence. La conséquence est qu'un ensemble est donné par sa collection des éléments et la relation d'équivalence, qu'il nomme "identité".

Exemples :

1) Le continu est la paire $(C,\sim)$, ou C est l'ensemble des suites de Cauchy et $\sim$ est la relation de la coïncidence $((a_n) \sim (b_n)$ si

$$\forall n \exists m \forall p(|a_{m+p} - b_{m+p}| < 2^{-n})$$

2) L'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est la paire

$(A, \neq)$ où $X \varepsilon A$ si $X \subseteq \mathbb{N}$ et

$X \neq Y$ si $\forall n \varepsilon \mathbb{N}\ (n \varepsilon X \leftrightarrow n \varepsilon Y)$

Le point de vue de Bishop est inspiré par l'aversion des notions abstraites. Car une telle relation d'équivalence induit une partition en classes d'équivalence qui sont d'un type supérieure aux objets primitifs. Sans doute la peur pour des notions abstraites peut ramener à la notion d'imprédicativité. Certainement, tout en introduisant l'identité par des classes d'équivalence on peut alors introduire des ensembles d'un caractrère inconstructif.

En plus on peut considérer une notion d'identité plus générale, qui concerne les objets partiels. L'identité qui résulte est une notion relative : "si a et b existent ils sont égaux". En formules : $Ea \wedge Eb \rightarrow a = b$.

Cette égalité, notons la par $a \equiv b$, est utile quand on considère des situations ou il s'agit d'opérations partielles. Par exemple, pour un nombre réel a, l'inverse n'existe pas nécessairement, alors il est raisonnable de considérer Ea^{-1}. Notons que $E1^{-1}$, mais $\neg E0^{-1}$.

La relation $\simeq$ de Kleene est un exemple de l'égalité partielle.

Pour ainsi dire, le caractère de $\equiv$ est déterminé par celui de $\neq$, et vice versa. Pour étudier le caractère logique ce n'est pas très important de considérer l'égalité partielle, mais c'est un instrument convenable, peut-être nécessaire, pour décrire la logique des topos.

Et maintenant, en regardant la logique, on peut proposer que les propriétés logiques des structures mathématiques sont les phénomenes extérieurs d'une philosophie qui fonde les mathématiques. En logique et mathématiques classiques l'influence de la matière sur la théorie d'identité est négligeable. On sait qu'on ne peut pas distinguer la cardinalite d'une manière superficielle : on peut exprimer la cardinalité est 1, 2, 3,... ou infinie, et c'est tout !

En mathématique constructiviste la théorie d'identité est plus riche. Sans les influences de la logique, en général il est possible que

Je veux dire, si la philosophie ne dicte pas les propriétes de l'identité (comme la decidabilité), c'est les mathématiques qui déterminent le caractère de l'identité.

C'est une affaire pour les fondements des mathématiques de découvrir des causes qui expliquent la relation entre les principes fondamentaux et l'espèce d'identité aux structures mathématiques.

Considerons un exemple de l'influence de la philosophie sur les mathématiques.

Le continu intuitioniste est pourvu d'une relation d'egalité et d'écart, désigne par # , et la connexion est donnée par : $\neg x \# y \rightarrow x = y$.

De même c'est le cas en mathématiques récursives, mais en plus les mathématiciens de l'école russe adopte un principe regardant l'existence du principe de Marlov :

$\neg\neg \exists x\, A(x) \rightarrow \exists x\, (Ax)$ pour A(x) primitivement recursive

Ce principe est motive par l'argument suivant : supposons que nous ayons un algorithme et pour un "input" donné il est impossible que l'algorithme n'arrête pas c'est-à-dire qu'il n'y a un "output"), alors l'algorithme arrêt - parce qu'on met en marche l'algorithme (le calculateur/machine de Turing) et on attend simplement que la machine s'arrête. Ce raisonnement n'est pas acceptable aux constructivistes stricts, parce qu'il n'y a pas une limite supérieure effective indiquant le moment de l'arrêt. Neanmoins la logique et les mathématiques de l'école Russe sont basés sur ce principe, cf. T.D .

Bien entendu on accepte le principe de Markov et on montre simplement que la relation d'écart coincide avec la relation d'inégalité pour les nombres réels. Ceci indique que l'identité pour les nombres réels dépend des mathématiques et de la philosophie.

Voici une propriété valable en cas des mathématiques récursives (à la Russe) mais pas dans le cas des mathématiques intuitionistes.

$\forall xyz\, (x \neq y \quad x \neq z \vee y \neq z)$

En cherchant les structures constructivistes on agit comme un docteur qui diagnostique une maladie. Nous observons la structure et ensuite nous tâchons de formuler des principes valables pour cette structure - c'est le diagnostic - Et parce qu'il s'agit d'éléments, on voulait savoir leur position mutuelle - c'est-à-dire on recherche, les propriétés logiques de l'identité.

Notre expérience logique nous dit que c'est improbable qu'une structure/ensemble peuvent être cactériser par la logique. En effet deux structures non-isomorphes peut-être indistinguables par des propositions logiques. On dit que ces structures sont élémentairement équivalentes symbolisé comme $A \equiv B$.

En logique classique toutes les structures infnies sont élémentairement équivalentes dans le langage de l'identité, mais pas du tout en logique intuitioniste.

Exemples : $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z}$

$\neg\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}, \quad \neg\mathbb{R} \equiv P(\mathbb{N})$

Mais $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

et $\mathbb{R} \equiv B$ (espace de Baire)

Observons que les ensembles de nombres naturels, rationnels et entiers sont élémentairement équivalents parce qu'ils sont décidables. A cause de cette propriété les nombres réels ne sont pas élémentairement équivalent aux nombres rationnels.

Quels sont les problèmes qu'on veut poser et résoudre ? En premier lieu il y a le problème d'une classification des classes des ensembles élémentairement équivalents. En second lieu le problème de classifier les théories d'identité. Ce problème me semble trop vague, parce qu'on peut ajouter des principes logiques quelconques, et alors il n'y pas un but bien décrit. Peut-être doit-on se limiter aux théories saturées, c'est-à-dire théories qui ont les propriétés de disjunction et d'existence.

$T \vdash \exists x\, A(x) \Rightarrow T \vdash A(a)$ pour un terme a

et $T \vdash A \vee B \Rightarrow T \vdash A$ ou $T \vdash B$

Ces théories sont des théories de structures concrètes.

Si $\exists x\, A(x)$ est vrai dans une structure A, on sait qu'il y a un élément a tel que A(a) est vrai, et si $A \vee B$ est vrai, A est vrai ou B est vrai.

(Une extra condition technique est qu'on ajoute les noms des éléments au langage).

Les choses précédentes sont basées sur le point de vue naif constructif, il n'est pas question de théorie des modèles.

Il y a une collection modeste de résultats de l'identité en structures constructives, par exemple :

1. Pour $\mathbb{R}$ on sait que l'identité est stable : $\neg\neg a = b \to a = b$, et en plus on a une version généralisée de stabilité :

$\neg\forall c\, (a \neq c \vee b \neq c) \to a = b$ est valable pour $\mathbb{R}$

Cela est une conséquence de la définisabilité de la relation d'écart sur $\mathbb{R}$ [D1] .

2. Pour les extensions $\mathbb{R}^e$, $\mathbb{R}^{be}$, $\mathbb{R}^s$,... de $\mathbb{R}$ on a stabilité, mais pas stabilité d'ordre second : $\neg\forall c\, (a \neq c \vee b \neq c) \to$ ç $a = b$.

Les extensions mentionnées sont des généralisations de l'ensemble des nombres réels; on obtient $\mathbb{R}^e$ et $\mathbb{R}^{be}$ par la méthode des coupures de Dedekind ((T,D) , p270). Les nombres réels propres resultent des coupures qui sont déterminées localement, mais on peut relacher cette condition un peu en admettant des coupures non déterminées localement (par exemple la coupure à gauche $\{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0$ ou $(r^2 < 2$ et F)$\}$, où F est la conjecture de Fermat, alors la coupure contient les nombres négatifs, mais peut-être aussi les nombres moins que $\sqrt{2}$, c'est-à-dire nous ne savons s'il s'agit de 0 ou de $\sqrt{2}$). L'ensemble des nombres réles généralisés contient les nombres réles traditionnels, mais il est plus 'compact' . Comme nous avons dit, on peut distinguer les extension de $\mathbb{R}$ par des propriétes de l'égalité.

3. Il y a quelques théories mathématiques dont nous savons la théorie d'identité, (D2), (T,D), (S).

théorie d'écart,
théorie d'ordre lineaire,
théorie d'ordre dense
théorie d'une fonction de Skolem unaire.

Car les théories, et par conséquent les axiomes, dépendent du point de vue philosophique (rappelons-nous le choix entre mathématiques récursives ou mathématiques des choix) il est plus convenable de considérer théories au lieu de structures. Des théories sont données par des axiomes, impliquant des axiomes "philosophiques".

Plus précisément : dans une théorie on peut preciser exactement les conditions, mais en réalité (c'est-à-dire en structures) on ne peut pas contrôler les conditions, on doit les découvrir.

Alors il me semble plus faisable de considérer des fragments d'égalité des théories mathématiques. On a l'avantage de disposer de la machinerie de la théorie des preuves (proof theory).

Pour illustrer la situation curieuse dans les structures mathématiques par rapport à la relation d'identité, nous considerons quelques exemples.

La structure fondamentale en mathématiques est le continu - l'ensemble des nombres réels -.

Pouvons-nous mutiler le continu, en préservant les propriétés logiques ? Dans certains cas c'est possible.

Exemples :

$\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} - \{0\}$. On enlève un seul point.

$\mathbb{R} \equiv (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ici le trou est un peu plus grand. Nous avons omis plus de points que dans le cas précédent. (En plus notons que $(-\infty,0) \cup (0,\infty) \equiv (-\infty,0) \cup (1,\infty)$).

$\mathbb{R} \equiv$ espace de Baire (c'est-à-dire les nombres irrationnels).

Notons que les deux espaces sont fortement homogènes a l'opposé des cas précédents.

Mais $\mathbb{R} \not\equiv \mathbb{Q}$ parce que $\mathbb{Q}$ est discret : $\forall xy(x=y \vee x \neq y)$.

On pouvait penser que chaque ensemble intermediaire entre l'espace de Baire et le continu soit elémentairement équivalent a $\mathbb{R}$.

Ca n'est pas vraie. $\mathbb{R} \not\equiv (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, -\infty) = A$

parce que $A \vdash \exists x \forall y\ (x = y \vee x \neq y)$

Comme nous avons vu ci-dessus l'homogénéité n'est ni nécessaire, ni suffisante.

Dit populairement, l'égalité s'éloigne de plus en plus d'état décidable quand les éléments deviennent de plus en plus inséparables.

Cela c'est confirmé par une extension du continu, l'ensemble $\mathbb{R}^e$ des nombres réels étendus, s'obtient en admettant des coupures de Dedekind plus libérales, le résultat est une clôture de $\mathbb{Q}$ plus dense que $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^e$ on a encore la stabilité $\neg\neg a - b \to a - b$ mais pas $\neg\forall c(a \neq c \vee b \neq c) \to a-b$

Pour $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (comme groupe quotient) même la stabilite faillit.

On le voit en considérant un exemple Brouwerien. Soit a une suite de Cauchy définie par

$a^n = 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-k}$ si les decimaux de π montrant une suite de dix neuf au k-ième place

$2^{-1} + \ldots + 2^{-n}$ autrement

Comme nous n'avons pas trouvé une telle suite il est inconnu si $(a_n) = 1$, ou si $(a_n) < 1$.

Supposons que (a_n) est irrationnel, alors (a_n) n'est pas 2^{-1}, $2^{-1}+2^{-2}$, $2^{-1}+2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}$, $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}$ ..... et par conséquent il n'y a pas une suite de dix neuf pour π, et ça implique que (a_n) est 1 - un nombre rationnel. Contradiction.

Alors (a_n) n'est pas irrationnel, mais il est défendu de dire que (a_n) est rationnel.

La classe d'equivalence de (a_n) en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alors n'est pas inegale a 0, mais on ne sait pas si elle est égale à 0.

En général nous ne savons pas beaucoup de choses concernant l'identité, il y a plus de questions que de réponses.

Nous résumons quelques questions.

1. Déterminer des systèmes d'axiomes pour les structures fondamentales (comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^e$, $P(\mathbb{N})$ et les sous-ensembles divers).

2. Déterminer des classes de structures naturelles élémentairement équivalentes. Et je considère une structure (ou Théorie) naturelle si elle est dérivée des mathématiques réalistes. Evidemment on peut introduire dee théories arbitraires, mais il manque un critère pour choisir les théories raisonnables.

3. Déterminer, des axiomatisations pour des fragments d'identité des théories naturelles.

4. Résoudre la structure des théories d'identité ordonnée par inclusion. Par exemple

4a. Est-ce qu'il y a une série monotone des théories T_n tel que EQ_{dec} est la limite de T_n.

4b. Quelle est la structure des théories inférieures à l'identité stable ?

5. Est-ce qu'il y a une structure réaliste A tel que la théorie d'identité de A est exactement EQ_∞ (l'identité triviale infinie) ?

Pour 5 nous avons une conjecture P(w).

Signification de l'ecart

Enfin, nous remarquons qu'en mathématiques constructives il se présente une dualité absente dans le cas classique.

L'Egalité est fortement opposée à l'écart

En mathématiques classiques l'écart n'est pas intéressant parce que c'est simplement l'inégalité. Chez les intuitionistes l'écart est une notion primitive, indiquant que deux objets sont effectivement (ou fortement) distingué. Notation $a \neq b$.

La propriété de transitivité traditionnelle est $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$, et la contraposition est $a \neq c \rightarrow a \neq b \vee b \neq c$.

Cette propriété suggère une des propriétés fondamentales de l'écart : $a \# b \rightarrow b \# c \vee a \# c$, en plus on a $\neg a \# b \rightarrow a \# b$. "S'il est impossible de séparer a et b, alors a et b sont identiques".

Alors l'écart est la notion positive, et l'identité est une notion négative, dérivée

Cette dualité $\#$ ____ - est étendue aux structures avec des sous-structures spéciales, comme groupes et sous-groupes normaux , anneaux et idéaux.

Pour un anneau A on a des idéaux et des anti-ideaux l_a

Un idéal est caractériser par $x \in I$, $y \in I \rightarrow x + y \in I$

et $x \in I \quad xy \in I$

anti-idéal est caractérisé par $x + y \in l_a \rightarrow x \in l_a \vee y \in l_a$

$$xy \in l_a \rightarrow x \in l_a \wedge y \in l_a$$

Le complément d'un anti-idéal est un idéal et l'anti-idéal est nécessaire pour munir l'anneau quotient d'une relation d'écart.

En somme la dualité identité/écart est un aspect indispensable de l'algèbre constructive.

Enfin, nous remarquons que l'écart induit une topologie canonique - les ouverts sont générés par les ensembles $(x \mid x \# a)$ - et on ne peut pas introduire une topologie discrète sans violer la structure de l'ensemble.

Biographie

(D 1) D. van Dalen, Lectures on intuitionism. In H. Rogers, A.R.D. Mathias (eds.) *Cambridge Summer School in Mathematical Logic*, Springer, Berlin, 197, 1-94.

(D 2) D. van Dalen, *Logic and Structure* Springer, Berlin, 1983.

(T,D) A.S. Troeistra, D. van Dalen, *Constructivsm in Mathematics* Vol 1, North-Holland, Amsterdam, 1988.

(S) C.S. Smorynski, On axiomatising fragments. *Journal of Symbolic Logic* (42) 1977, 530-544.