Séminaire de philosophie et mathématiques

GEORGES GLAESER

Une science naissante : la didactique expérimentale des mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 14
« Une science naissante : la didactique expérimentale des mathématiques », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___14_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Une science naissante :

LA DIDACTIQUE EXPERIMENTALE DES MATHEMATIQUES

Georges GLAESER

C'est plusieurs fois par an, que je fais des conférences portant à peu près ce titre. Ce fut notamment le cas aux récentes journées de l'A.P.M. (Amiens - Septembre 1981) : Le texte de cette intervention paraîtra dans l'un des prochains bulletins de l'A.P.M.

Il était donc tentant de reprendre l'un de mes exposés anciens, ou de venir improviser, sans notes, sur un sujet qui m'est familier, puisque je m'y consacre - à temps complet - depuis près de 10 ans. Ce soir, cependant, au Séminaire de Philosophie et Mathématiques je ne désire pas céder à de telles facilités, mais je pense qu'il faut essayer de s'adapter à l'auditoire auquel on s'adresse.

Or, je soupçonne - à tort ou a raison - que je rencontrerai ici quelques collègues chez qui l'expression "de didactique des mathématiques" ne déclenche pas immédiatement un irrésistible élan de curiosité. Ils n'ont ni le temps, ni l'envie de s'informer sur ce sujet. Cela ne les empêche pas - bien au contraire - de formuler des opinions tranchées sur la didactique. Mais, même s'ils ne viennent pas aux réunions de travail où des chercheurs exposent leurs travaux j'ai peut être une chance de me confronter à certains d'entre eux, au cours de cette soirée.

Je voudrais donc profiter de cette circonstance unique. Je m'excuse auprès des autres auditeurs, mais je vais être obligé de commencer par le B-A-BA, et essayer de dissiper quelques idées fausses qui circulent parmi ceux qui savent sans jamais avoir appris.

<u>I - De la pédagogie à la didactique</u>. Depuis que l'enseignement des mathématiques est institutionalisé, et répandu dans une large fraction de la population scolaire (pour préciser, cela se situe entre 1820 et 1900), on a songé à former des professeurs, non seulement

pour leur donner une compétence concernant la Science qu'ils enseignent, mais aussi au sujet du contact humain (rapport maître-élève) que constitue l'acte éducatif.

Il n'a pas été difficile de rédiger des circulaires ministérielles pour décréter que les futurs enseignants recevraient une formation dans leur discipline et aussi la fameuse "formation pédagogique".

Après cette phrase bureaucratique triviale, il restait à aborder les questions sérieuses : "Que pouvait-on enseigner aux élèves-maîtres ?".
En ce qui concerne la compétence mathématique de ses enseignants, la France s'est longtemps classé au premier rang jusqu'à la seconde guerre mondiale. Vers 1950, la situation a commencé à se détériorer jusqu'à ce que René HABY entreprenne une énergique action de <u>déqualification des maîtres</u>, dont l'ampleur n'a pas été perçue par le grand public. Mais , on avait beau prêcher la nécessité d'une formation pédagogique, nul ne pouvait faire de propositions sérieuses sur ce qu'elle représentait. Il y a encore vingt ans, il n'y avait rien de sérieux à transmettre aux élèves-professeurs sur ce chapître. Les anciens traités de pédagogie (appelée alors "méthodologie de l'enseignement") ressemblait fort à des traités de médecine qui auraient été écrit au Moyen-Age par des rebouteux !
La <u>pédagogie</u> ne pouvait être alors qu'une <u>description des coutumes éducatives</u>, telles qu'elles s'imposaient, au gré des circonstances, selon les pays et les époques.

Parfois, on songea à étoffer un enseignement nécessairement rude, soit par un surcroît de mathématiques, soit par l'étude des oeuvres des "grands pédagogues utopistes". Et, on transmettait surtout le savoir faire des "bons professeurs". Leur enseignement comportait certes d'excellentes choses mêlées à des idées reçues et des erreurs grossières. On ne disposait d'aucun critère pour trier ce fatras. Ainsi, cette source du savoir, enseignée parfois au cours de stage selon la méthode "ostensive" n'aboutissait qu'à la reproduction.

C'est ainsi que s'imposèrent peu à peu diverses perversions pédagogiques, que je dénonce régulièrement dans mes écrits :

- la pédagogie des opinions qui transmet les jugements péremptoires, énoncés par d'éminentes personnalités, sans qu'elles apportent d'éléments de justification. Ces opinions sont le plus souvent contradictoires entre elles.

- la pédagogie sans élève se place systématiquement au niveau du contenu mathématique, sans aucune référence à ceux qui doivent s'approprier ce savoir. (Dans l'oeuvre "pédagogique" de Félix Klein, le mot "élève" n'apparait presque jamais, sauf lorsqu'il est pris dans un sens abstrait).

- la "pédagogie sans contenu", au contraire, ne se soucie guère de la matière enseignée, pour traiter de l'acte éducatif en soi. Mais de cette façon on risque d'avoir à parler d'un véritable élève, en chair et en os. Pour éviter cela, on se contente parfois de jeter un regard global sur le système éducatif, sans mentionner les détails de ce que l'on enseigne ni ce que font les élèves, et ce que font les enseignants.

- la pédagogie de ministère enferme dans une boîte noire tout ce qui a trait à la confrontation d'un véritable élève avec une matière enseignée, en présence d'un maître.

L'entrée de la boîte noire s'opère grâce à des fictions abstraites (par exemple : l'élève de 2ème D, le bachelier A, le professeur certifié recyclé en informatique, l'enseignant formé par Bac + 2) .

Je rappelle pour les non-initiés que cette dernière notion chère à Haby, peut s'appliquer à un bachelier-es-lettres, repêché à l'oral, et inscrit pendant deux ans en faculté en Droit. Elle caractérisait naguère une catégorie d'enseignant qui avaient vocation à l'enseignement bivalent dans n'importe quelle discipline ! (Par exemple, la géométrie euclidienne en 3^e ou la physique en 5^e). La sortie de la boîte est jugée à la lumière d'évaluation telles que des statistiques d'examen, de nombres d'élèves par classe, de carnets scolaires, d'avis de conseil d'orientation, etc. Bien entendu, ce sont des renseignements qui peuvent être traités par l'ordinateur, assimilé à une poubelle, mais qui ne nous renseigne en rien sur la capacité à lire, à compter ou à parler une langue vivante d'un élève particulier.

L'activité favorite de ces "pédagogues" là est de réformer les programmes scolaires, et d'en discuter, en se renvoyant des opinions.

Il n'est pas besoin d'être didacticien pour s'apercevoir que l'exégèse des programmes ne nous renseigne en rien sur ce qui se passe au niveau d'un élève, qui comprend ou ne comprend pas ce qu'on lui enseigne.

Il existe, certes des façons moins sottes de faire de la pédagogie, mais ce n'est pas le lieu ici de les analyser et les critiquer.

Vous avez sans doute compris, que lorsque je me présente comme mathématicien, spécialisé en didactique des mathématiques, et qu'on me répond "Ah oui ! Vous vous intéressez à la pédagogie" je ressens le propos presque comme une injure ! Je suis bien obligé de m'intéresser un peu à la pédagogie, d'analyser ces divers éléments pour apprendre à mieux m'en détacher.

En réaction à la pédagogie apparaît la didactique.

Celle-ci se développe actuellement dans de nombreuses directions qui n'ont pas du tout la même problématique... J'imagine déjà les sourires des détracteurs..." Les didacticiens se partagent en chapelles, qui se bouffent le nez !"
Eh! oui! la didactique est comme toute les sciences et la mathématique est aussi dans ce cas.

Je préfère ici exposer le point de vue que je désignerai par : Didactique expérimentale des mathématiques (D.E.M.). C'est celui de l'équipe qui assume le séminaire national de Didactique des mathématiques et édite la revue "Recherches en Didactique des mathématiques".

II - La D.E.M. apparaît lorsqu'on adopte la plupart des préceptes ou postulats suivants .

1°) La D.E.M. cherche à se doter de moyens scientifiques pour trancher les débats pédagogiques.

2°) Son objet est essentiellement l'étude des phénomènes de compréhension ou d'incompréhension chez tout individu confronté à une question mathématique. Dans la suite un tel individu sera appelé "étudiant" (en allemand "Lernende") sans que cela implique des restrictions d'âge ou de statut scolaire (comme, en allemand "Student"). (Accessoirement, elle étudie d'autres phénomènes d'apprentissage, par exemple ceux qui concernent la fixation des habitudes et les dressages qui complètent parfois la compréhension).

3°) a) Elle fait intervenir trois sortes de personnages, dont elle étudie les intéractions

- des "étudiants"

- des segments de matière à apprendre, (empruntés à la mathématique)

- des agents éducatifs (enseignants, environnement scolaire ou culturel, livres, etc.) faisant office de catalyseurs.

b) Ces "personnages interviennent avec leurs finalités propres. Celles-ci se heurtent constamment. Les conflits se résolvent parfois, en équilibres provisoires et précaires.

c) La tension est parfois atténuée par ce que l'on nomme contrats didactiques.

Ce sont des accords, généralement tacites, qui règlent le jeu scolaire (ou plus généralement toute situation d'apprentissage) : En classe, ils prévoient ce que les maîtres attendent des élèves et ce que les élèves exigent du maître. C'est d'abord un savoir-vivre qui fixe les limites de ce qui est souhaité, toléré ou interdit.

En fait, le contrat didactique n'est pas tout à fait un contrat au sens usuel, puisqu'il est rarement formulé explicitement dans sa totalité, ni soumis à une approbation préalable.

(Par exemple, le contrat didactique entre un lecteur de Bourbaki et cet ouvrage ne se réduit pas au fameux "Mode d'emploi").

d) L'objet étudié principalement par la D.E.M. est la situation didactique : c'est une confrontation de courte durée de personnages tels que ceux énumérés en a), conformément à b) et c).

4°) La D.E.M. est la <u>didactique d'une discipline</u> (la mathématique). Mais elle ne l'embrasse pas dans toute sa globalité pour s'intéresser à la compréhension de questions plus limitées. De plus, il lui arrive d'investiguer quelques situations interdisciplinaires, à condition qu'elles soient reliées aux mathématiques.

D'autre part, elle n'envisagera pas l'"étudiant" abstrait, dans toute sa généralité, en précisant son âge, ainsi que d'autres variables.

A titre d'exemple, la D.E.M. pourrait patronner une recherche sur "la lecture des cartes routières par des écoliers de CM_1, dont les parents possèdent (on ne possèdent pas) une automobile".

5°) La recherche en D.E.M. est soumise à la <u>méthode expérimentale.</u> En gros, pour juger, si une expérience a été conduite proprement et si les conditions qu'on en tire sont justifiées, nous nous en tenons aux principes que Claude BERNARD a formulé dans "L'introduction à l'étude de la médecine expériemntale", adaptée à des situations didactiques.

6°) Dans l'avenir rapproché la D.E.M. s'intéressera exclusivement à des questions spéciales qu'elle cherchera à investiguer à fond. Pour le moment elle rejette la prétention à brosser prématurément ces larges fresques, qui ne font que synthétiser notre ignorance.

Un de mes amis jugeant il y a quelques années un travail didactique (qu'il n'avait d'ailleurs pas bien lu) lui reprochait de se perdre dans l'analyse d'une catégorie trop spéciale d'erreurs commises par des élèves "Ah! s'écriait-il, si vous étiez parvenu à une belle typologie des erreurs...!"

La lecture de la belle monographe du didacticien allemand Radatz "Fehleranalysen in Mathematik Unteirecht" (Vieweg. ed) montre à l'évidence qu'un tel point de vue est encore tout à fait utopique. Lorsque Pasteur "perdant son temps" à étudier des détails marginaux, comme les maladies du vers à soie, les disciples du sinistre Broussais pouvaient lui reprocher de ne pas brosser une belle typologie des maladies !

7°) La D.E.M. donne parfois l'impression de ne s'intéresser qu'aux petits enfants. C'est là un accident historique. Comme, les pionniers de la D.E.M. ont d'abord été des psychologues, dont la culture mathématique était faible, ceux-ci ont préféré investiguer des situations didactiques dont ils pouvaient, croyaient-ils dominer le contenu mathématique. C'est d'ailleurs une illusion, car les programmes scolaires ne sont d'aucune façon ordonnés par difficulté mathématique croissante ! On trouve, en grattant certaines notions dites élémentaires, des fondements mathématiques très difficiles.

Mais de plus en plus, la D.E.M. explore des situations faisant intervenir des adultes. Je me bornerai à signaler la remarquable thèse de 3° cycle de madame E. PAEZ-SANCHEZ, où sont comparés (entre autres) le développement de la représentation picturale des polyèdres chez de très jeunes enfants et chez des vieillards analphabètes ! (L'intéressant est qu'on y retrouve les mêmes étapes, à 60 ans d'écart).

Je pense que la D.E.M. s'occupera aussi de plus en plus des mathématiciens de haut niveau, soit en observant des contemporains, soit au travers d'études épistémologiques.

Les 7 principes qui viennent d'être énumérés n'épuisent pas la liste des principes de la D.E.M. Ils résument assez bien, les points de départ de notre science. D'ailleurs ils sont sans doute reconnu par d'autres écoles didactiques (sauf peut être 3° et 5°)

Mais les résultats obtenus après plusieurs décennies de recherche conduisent à formuler en plus, quelques postulats qui semblent encore plus spécifiques de la D.E.M.

III - Quelques postulats et résultats

1°) La conclusion la plus surprenante à laquelle aboutit nos recherches est que la construction et le développement des connaissances mathématiques est un processus très long, beaucoup plus long que ce que laisse entendre les commentaires des programmes scolaires.

Pour la plupart des notions de bases, telle que volume, probabilité, démonstration, paramètre, symbole etc. les durées se chiffrent en dizaines d'années. Le processus commence beaucoup plus tôt qu'on ne le croit, généralement hors du contexte scolaire, et se poursuit jusqu'à un âge adulte avancé.

En fait, chaque individu dispose à chaque étape, d'une compréhension partielle, suffisante pour venir à bout des circonstances usuelles. De temps en temps, cependant il se heurte à des circonstances inédites, et à la suite de situations didactiques tendues, il apparaît que les visions antérieures étaient imprécises, incomplètes ou même franchement fausses ! Ainsi se construit un nouveau palier, stable, de compréhension partielle, jusqu'à la prochaine révision déchirante.

Plutôt que d'illustrer cela par des faits expérimentaux, qui utilisent un appareil méthodologique long à exposer, je m'en tiendrai à mon cas personnel. Comme tout le monde, j'ai commencé à comprendre ce que c'est qu'un nombre entier, à partir de 2 - 3 ans, et je ne doutais pas que ce fut un domaine depuis longtemps assuré dans mes connaissances.

Or, je me souviens bien de deux révisions déchirantes à propos de l'idée que je me faisais de la construction récurrente de N . Les deux ont été provoquées par Georges Reeb. Le lecteur curieux trouvera des traces du premier choc à la page 136 de "Mathématiques pour l'Elève Professeur" (L'événement s'est donc situé vers 1968). Le second choc a été provoqué il y a deux ans lorsque je me suis aperçu qu'il existait des entiers "non naïfs".

On me rétorquera aimablement que je comprends vite quand on m'explique longtemps, et qu'il existe des esprits beaucoup plus agiles que le mien. Je viens d'interroger Pierre CARTIER sur les étapes de sa conversion à l'analyse non standard. Il date quelques ruptures décisives en 1952, 1956 et 1981. Vous pourrez lire dans le prochain numéro de "Recherche en didactique des mathématiques" un article où j'analyse le long processus de 1600 ans qui a abouti à une certaine compréhension de la règle des signes. Vousy verrez la preuve de l'existence de ces paliers de compréhension qui permettaient à des Euler ou Cauchy de faire d'excellentes mathématiques, sans avoir saisi la nature de la "trivialité" (-) x (-) = (+) . Les citations témoignent d'une incompréhension effarante !

2°) Cette lenteur s'explique par le mécanisme même de la compréhension, qui ne s'effectue pas progressivement, mais par saut brusque. La D.E.M. s'efforce de cerner de plus près la notion <u>d'obstacle</u> introduite par Gaston BACHELARD.

Les métaphores qui paraissaient les plus efficaces pour rendre compte des faits expérimentaux de cette nature, semblaient devoir utiliser le langage des catastrophes. Aujourd'hui, un examen plus fin des phénomènes révélés par des expériences me conduisent à proposer une variante, où le franchissement aléatoire d'un grand nombre de micro-seuils, (descriptibles en terme de catastrophes) déclencherait l'eureka . C'est ainsi que se modifie par exemple une opinion publique, où chaque individu change d'avis selon les schémas proposés par Zeeman, mais où la différence s'obtient par accumulation de beaucoup de changements individuels, accompagnée par des réactions de contagion.

3°) On est ainsi conduit à une <u>conception génétique</u> de l'apprentissage des mathématiques. A ce titre, la D.E.M. a contracté une grande dette envers Jean PIAGET qui est à l'origine de notre science. Mais, bien entendu, nous adoptons une attitude critique vis à vis de l'oeuvre du créateur de l'épistémologie génétique.

4°) Actuellement les résultats les mieux assurés (bien qu'incomplets) obtenus par la D.E.M. concernent le <u>repérage</u> et la <u>confirmation</u> expérimentale de quelques obstacles.

La région la mieux balisée concerne les premiers apprentissages.

On commence à bien connaître la complexité des premières notions concernant le dénombrement des "petits" et "grands" ensembles finis. Des discussions scientifiques assez passionnées portent encore sur l'importance relative des diverses difficultés de ces opérations. Il en est de même, du domaine des 4 opérations de l'arithmétique, de la mesure des volumes, de la proportionnalité etc. (cf. travaux de Vergnaud, Conati, Fischer, etc.).

On a aussi exploré la complexité de la notion de cercle, attestée par une étude épistémologique.

A l'autre extrémité de l'échelle des âges, on commence à confirmer chez des étudiants bacheliers l'existence d'obstacles concernant les limites et la continuité. Je les avais énumérés, sous forme d'opinion dans le n° 302 du Bulletin de l'A.P.M.

5°) Des recherches récentes attirent notre attention sur ce que je propose d'appeler les <u>aspects périmathématiques</u> à faire acquérir à nos élèves.

A côté des informations qui constituent l'essentiel de ce que transmet l'enseignement traditionnel l'"étudiant doit aussi acquérir des habitudes de pensée et d'action qui ne lui sont généralement transmises, par hasard, d'une façon "ostensive" que s'il voit son professeur ou ses camarades "faire des mathématiques".

Il est, par exemple, facile d'acquérir des connaissances sur l'algèbre linéaire ; mais c'est bien autre chose d'apprendre à <u>penser linéairement</u> ! Cela ne s'acquiert qu'en prenant conscience de l'efficacité de ce mode de pensée.

Autre exemple : un diplôme de D.E.A. récent, étudiait le <u>vocabulaire</u> d'un certain manuel de 5ème . Il apparaît que les malentendus constatés sur un échantillon d'élèves ne portaient pas exclusivement sur des termes mathématiques, mais aussi sur des mots périmathématiques tels que "comparer, vérifier, calculer, construire, problème, dessin ou figure" etc.

Un autre type de phénomènes exploré actuellement concerne l'attitude de l'"étudiant" face à une démonstration ou à une contradiction.

Les travaux de N. Balachef (Grenoble) examine sous quelles conditons un échange d'arguments verbaux entre élève arrache la conviction. Alors que la démonstration livresque est considérés comme une information à apprendre, en vertu du contrat didactique.

Une thèse de 3° cycle (Fernando Hitt - Strasbourg) porte sur les conduites de "<u>retour en arrière</u>" d'un étudiant, placé artificiellement en présence d'une contradiction.

C'est un palier important de l'éducation mathématique d'un individu, que d'acquérir le réflexe d'analyser les raisonnements fautifs.

Ce palier est d'ailleurs assez élevé : L'histoire nous enseigne que ce n'est que vingt ans après qu'ABEL ait proposé (1826) un contre-exemple à un faux-théorème de Cauchy que Seidel prit l'initiative de revenir sur le raisonnement fautif pour y découvrir la faille (1847). C'est donc Seidel, (et non Abel!) qui découvrit la convergence uniforme !

Fernando Hitt, après avoir ingénieusement provoqué chez 70 "étudiants" de 3^{e}, une contradiction mis en évidence le fait suivant :

Parmi ces étudiants, une vingtaine seulement se mirent à souffrir, à revenir en arrière, à raturer et à surcharger leur texte. Deux d'entre-eux seulement parvinrent à éliminer la contradiction (l'un, d'ailleurs au prix d'une nouvelle erreur). Mais l'analyse factorielle prouva que le seul fait de "souffrir" devant une contradiction, à propos d'une faute (même pas corrigée) situaient ces 20 étudiants du côté de la réussite générale à toute l'épreuve proposée.

Autrement dit une telle inquiétude mériterait à elle seule quelques points supplémentaires à un examen (lorsqu'elle est correctement détectée). Evidemment, ce jugement va à l'encontre des moeurs pédagogiques traditionnelles, qui pénalisent un candidat s'il ne parvient pas à corriger sa faute.

<u>IV - Conclusion</u> Le <u>volume</u> de la production de recherche pédagogique devient <u>énorme</u>. Sa qualité est, dans l'ensemble <u>médiocre</u>.

Encore faut-il distinguer divers niveaux. La situation est analogue en mathématique :

On peut se montrer sévère pour un travail subtil, portant sur un sujet ayant perdu aujourd'hui toute actualité (par exemple, la géométrie du triangle).

La condamnation sera d'une autre nature, si l'on examine un article portant sur un thème intéressant et actuel, mais contenant des erreurs grossières de raisonnement, et des énoncés faux.

De même, je rejette beaucoup de travaux de recherches pédagogiques, parce qu'elles relèvent de points de vue que je juge sans intérêt, et en particulier parce qu'elles s'inscrivent dans la perspective des perversions que j'ai critiqué au début de mon exposé.

Il n'en reste pas moins vrai qu'un trop grande masse de publications pèche par un laxisme expérimental évident.

Les fautes les plus graves concernent la production d'artifices grossiers, l'emploi illégitime de méthodes statistiques sur des données mal collectées, ou des échantillons trop petits, les calculs de moyennes effectués sur des variables qualitatives, ou de nature différente, le manque de précaution expérimentale élémentaire etc.

Mais je lis tout de même chaque année une dizaine de travaux auxquels je ne trouve rien à redire (même s'ils s'inscrivent dans l'idéologie d'une école, dont je critique les principes), et plusieurs centaines d'articles, critiquables sur de nombreux points mais apportant des éléments instructifs.

La proportion $\frac{\text{bon grain}}{}$ est analogue à celle qu'on peut trouver lorsqu'on feuillète les premiers numéros des journaux de Crelle, Liouville etc. de façon à apprécier la mathématique des temps passés.

Et c'est ce nombre suffisant de travaux sérieux, et les progrès visibles d'année en année qui me permette de vous annoncer que la didactique expérimentale des mathématiques a déjà commencé à se constituer, en science naissante !