

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

P. V. GROSJEAN

Une théorie algébrique du syllogisme catégorique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 2
« Une théorie algébrique du syllogisme catégorique », , p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982__2_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,
1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE THEORIE ALGEBRIQUE DU SYLLOGISME CATEGORIQUE
=====

La présente conférence ne traitera que de développements et de résultats extraordinairement simples, élémentaires pour certains mais originaux pour d'autres.

Cependant, elle se situera parfaitement dans le cadre de ce Séminaire consacré à la fois à la Philosophie et à la Mathématique, puisqu'elle se proposera de jeter un pont entre, d'une part, une toute vieille théorie, la syllogistique, qui fut si longtemps chasse gardée des philosophes, et, d'autre part, une branche pas trop ancienne des mathématiques dites modernes, la théorie des relations et du produit relationnel (improprement appelé "produit relatif").

1. Eléments de syllogistique classique

De l'avis général, c'est Aristote le fondateur de la syllogistique et, partant, de la logique, encore qu'il soit clair que Platon connaissait déjà le raisonnement par syllogismes. Le terme même de "syllogisme" figure très tôt dans les oeuvres d'Aristote ; on le trouve dans les "Topiques", avec la définition :

"Un discours dans lequel, certaines choses étant données, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement, en vertu de ces mêmes données".

A vrai dire, c'est plutôt là une définition de la déduction en général ou de l'implication au sens strict. C'est dans les "Analytiques", du même Aristote, que l'on verra figurer le schéma et l'étude de ce raisonnement ternaire, très particulier, qu'on allait bientôt appeler le syllogisme hypothético-catégorique :

Les successeurs d'Aristote porteront plutôt leur attention sur le syllogisme catégorique, lequel procède par affirmations et non par suppositions, selon le schéma désormais classique ci-après (exemple d'un syllogisme dit "Barbara") :

f i g u r e 2

Selon la terminologie traditionnelle, le syllogisme est un raisonnement éliminant un moyen-terme (M) afin de relier un petit terme, le sujet (S), à un grand terme, le prédicat (P). La relation (SP) est fournie par la conclusion, laquelle résulte de deux prémisses, la majeure, où le moyen-terme est sujet, et la mineure, où ce terme est prédicat. Les fig 2 et 3 énoncent les 3 propositions, - ou "jugements", dans l'ordre canonique (que nous préférons renverser plus tard).

A côté du syllogisme catégorique, le seul qui nous intéressera ici, la logique ancienne étudiait aussi le syllogisme hypothétique et le syllogisme disjonctif, que nous ne mentionnons que pour mémoire :

f i g u r e 3

Selon l'ordre donné aux termes dans les prémisses, Aristote distingue 3 figures, auxquelles ses successeurs allaient ajouter une quatrième. En fait, il doit y avoir 4 figures et seulement 4, engendrées par l'action du groupe de Klein sur les paires (S,M) et (M,P). Notons qu'il n'est jamais question de permuter (S) et (P) dans la conclusion ; en effet, c'est celle-ci qui, par l'ordre immuable SP, définit ce qui est "sujet" et ce qui est "prédicat" pour le syllogisme.

On peut représenter par des graphes de relation les 4 figures traditionnelles. On voit que seul le premier graphe est transitif $S \rightarrow P$; il représente les syllogismes parfaits au sens d'Aristote. Les autres figures doivent se ramener à la première au moyen de règles de conversion qui ne nous intéresseront guère ici, mais sur lesquelles les Anciens et les Scolastiques s'étaient longuement penchés.

f i g u r e 4

2. Modes aristotéliens et carré logique

Pour Aristote, les "jugements" peuvent s'exprimer selon divers modes, notamment le mode de qualité (affirmatif, négatif) et le mode de quantité (universel, particulier). Mais il faut attendre le II^e siècle de notre ère pour voir s'ordonner les jugements modaux en une très célèbre figure, le carré logique, dû à un poète latin, Apulée :

f i g u r e 5

Si l'on emploie la notation moderne $x \in A$ pour dire que " x possède la ou les propriétés A ", on a alors la traduction symbolique du carré en logique de la compréhension :

f i g u r e 6

Sur cette figure, les voyelles entre parenthèses sont celles qui, depuis le Moyen-Age, servent à caractériser les 4 types de jugements du carré.

On observera que dans la syllogistique classique, le sujet d'un jugement est toujours énoncé affirmativement : on a $x \in S$ et jamais $x \notin S$. Une telle restriction n'a pas beaucoup de sens en logique de l'extension. Celle-ci en effet s'adresse à des ensembles, et, dans un même raisonnement, tous ceux-ci sont des parties d'un même universel U (ou univers du discours), qu'il importe de bien définir dans chaque cas ; dès lors, chacun possède un complément selon U , et le complément $\bar{S}$ de S a autant d'importance que S lui-même. En conséquence, on peut très bien admettre des jugements où l'on a $x \in \bar{S}$, c'est-à-dire $x \notin S$ (sujet exprimé négativement). Cette remarque, déjà formulée par De Morgan au siècle dernier, nous amènera, dans un moment, à compléter le carré logique.

En logique de l'extension, on aura les ensembles S, P , etc., reliés par des relations d'inclusion ou de non-inclusion. En logique des propositions, on aura une autre écriture, où la proposition " s " exprime $x \in S$. Enfin, en calcul booléen, on aura une troisième écriture, équivalente. Ceci est résumé par la

f i g u r e 7

Les propositions d'une même ligne du carré sont dites contraires ; celles d'une même colonne sont subalternes ; celles d'une même diagonale sont contradictaires, ce qui apparaît clairement sur la figure 7 : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$ d'une part, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ d'autre part sont des paires de jugements contradictoires (sur la fig 7 c, la contradiction traduit la loi de dualité d'Auguste De Morgan).

Dans chacune des 4 figures, chacun des 3 jugements peut revêtir l'un des 4 modes composés du carré logique ; on arrive ainsi à $4 \times 4^3 = 256$ types possibles de syllogisme. Ce dénombrement traditionnel n'a pas beaucoup de sens, puisqu'il reprend des syllogismes faux ou invalides ou non-concluants. Au prix d'une série de règles péniblement élaborées au cours de l'histoire de la logique, les Scolastiques sont arrivés à identifier 24 (et 24 seulement) syllogismes valides et concluants (parmi lesquels 5 sont triviaux). Nous arriverons à ce résultat par des procédés algébriques extrêmement simples, remplaçant les règles classiques de validité, lesquelles ne nous intéresseront guère ici.

3. Les implications

Aristote formule un principe qui est à la base de la théorie moderne de l'implication : Le vrai implique le vrai tandis que le faux implique n'importe quoi. Cet axiome se dégage sans peine d'exemples tel que celui de la fig 1 : Là, les prémisses impliquent le vrai parce qu'elles sont vraies ; le résultat serait le même si on les rendait toutes les deux fausses, par exemple en remplaçant le moyen-terme "vivants" par "cristaux". Mais si l'on fausse une des deux prémisses seulement, par exemple en remplaçant soit "hommes" soit "mortels" par "cristaux", on arrive visiblement à une conclusion fausse.

Désignons dorénavant le vrai par 1 et le faux par 0, et utilisons provisoirement le signe $\leq$ pour l'implication. Si l'on traduit ainsi l'axiome aristotélicien, on constate qu'il établit une relation d'ordre, ultra-élémentaire, sur l'ensemble binaire $\mathcal{B} = \{1, 0\}$

$$(1) \quad 0 \leq 0 \quad 0 \leq 1 \quad 1 \leq 1$$

On peut représenter cette relation par sa matrice d'incidence, laquelle n'est autre chose que la fonction caractéristique de ladite relation considérée comme une partie du produit cartésien $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$; cette relation est l'implication, bien connue, à laquelle nous restituons son signe $\Rightarrow$. La relation complémentaire de l'implication est la négation de celle-ci ; c'est un ordre strict (non réflexif), se réduisant à $1 \neq 0$, et dont le signe sera désormais $\nRightarrow$. Les matrices de ces deux ordres sont indiquées sur la

f i g u r e 8

En logique moderne bivalente, cette implication est dite matérielle au sens de Russell ; notée ici $p \Rightarrow q$, elle relie deux propositions logiques et bien formées, à valeurs dans $\mathcal{B}$, selon la matrice d'incidence ($\Rightarrow$) ci-avant. Réintroduite par Peirce en logique moderne, elle était cependant connue des Anciens, et Philon de Mégare (IVe siècle av. JC.) la définit comme une relation vraie si et seulement si "elle commence par le faux ou finit par le vrai". Comme telle, elle est choquante pour les débutants et elle a suscité bien des disputes entre logiciens depuis l'Antiquité.

A cette implication "matérielle" (adjectif mal choisi), les logiciens et les philosophes opposent l'implication formelle au sens de Russell, dite aussi l'implication stricte au sens de Lewis. Notée elle aussi $p \Rightarrow q$ (malheureusement !), elle correspond à la définition aristotélicienne rappelée ci-avant (page 1) à propos du syllogisme, - ou plutôt, de la déduction elle-même. Dans cette implication, la plus importante aux yeux des philosophes, q est relié à p d'une manière nécessaire, quelle qu'en soit la raison (logique, mathématique, expérimentale).

4. Treillis et trames

L'implication stricte est elle aussi un ordre, l'ordre déductif, existant sur un ensemble de propositions que nous noterons $\mathcal{P}$. L'existence de cet ordre est antérieure à toute valorisation des éléments de $\mathcal{P}$, que ce soit sur $\mathcal{B}$ (logique bivalente ordinaire) ou sur tout autre ensemble de valeurs (logiques plurivalentes et même calcul des probabilités).

Nous préciserons cette idée en admettant que l'ordre déductif donne à $\mathcal{P}$ une structure de treillis : toute paire (p, q) d'éléments de $\mathcal{P}$ admet un plus petit commun majorant, noté $p \vee q$, et un plus grand commun minorant, noté $p \wedge q$. Encore une fois, ceci est antérieur à toute idée de valorisation, binaire ou autre.

Si nous voulons valoriser $\mathcal{P}$, il faut choisir un ensemble ordonné de valeurs, dont l'ordre sera isotone à celui de $\mathcal{P}$. En logique bivalente, l'ordre des valeurs est l'ordre (1) aristotélicien, ou encore l'ordre de l'implication matérielle selon Philon de Mégare. Sur une maille dont la base est (p, q) , et qui est un sous-treillis de $\mathcal{P}$, on aura donc 4 valorisations possibles en logique bivalente ; on arrive ainsi aux diagrammes de Hasse de la

f i g u r e 9

Admettons enfin que $\mathcal{P}$ soit un treillis de Boole, c'est-à-dire distributif et complété : il y existe donc une opération involutive, appelée négation faisant correspondre à $p \in \mathcal{P}$ une et une seule proposition dans $\mathcal{P}$, notée $\bar{p}$.

Nous appellerons trame d'ordre n $\mathcal{T}_n$ tout sous-treillis de $\mathcal{P}$ engendré par n alternatives $(p_1, \bar{p}_1)$, $(p_2, \bar{p}_2)$, ..., dont les éléments sont combinés par les lois $\wedge$ et $\vee$. Il est facile de voir qu'une trame est un treillis de Boole dont la base (ensemble des éléments qui couvrent le minorant ultime) est elle-même un treillis de Boole ; le cardinal de la base est donc 2^n et celui de la trame $\mathcal{T}_n$ est 2^{2^n} .

La structure de "trame" est la structure fondamentale de la logique formelle et du calcul des probabilités. Ses éléments seront appelés des événements ; son minorant ultime est l'événement impossible (la contradiction), noté $\perp$; son majorant ultime est l'événement nécessaire (la tautologie), noté $\top$. Comme pour tout treillis de Boole, son diagramme de Hasse est la perspective d'un cube à N dimensions, avec ici $N = 2^n$. Le diagramme de $\mathcal{T}_1$ est donné par la fig. 9, avec $\bar{p}$ à la place de q, et avec $p \vee \bar{p} = \top$ et $p \wedge \bar{p} = \perp$. Celui de $\mathcal{T}_2$, le plus important de tous en logique, est donné par la

f i g u r e 10

En logique binaire, on valorise isotoniquement T_n sur l'ensemble des relations n-aires sur $\mathcal{B}$, ou plus exactement sur l'ensemble des fonctions caractéristiques de ces relations, fonctions qui sont des 2^n -uples à valeurs dans $\mathcal{B}$; ces fonctions sont ordonnées selon l'ordre (1) d'Aristote appliqué aux termes homologues de de ces 2^n -uples. Pour T_2 en particulier, la contradiction sera valorisée par la matrice-zéro $\mathcal{Z}$, et la base par les matrices n'ayant qu'un seul terme à valeur 1. De proche en proche, l'ordre d'Aristote reconstitue la trame A_2 des 16 relations binaires, dont le diagramme de Hasse est donné par la

f i g u r e 11

5. Les 16 compositions-relations binaires

D'habitude, en littérature, le tableau A_2 (fig 11) est présenté comme l'ensemble des tables de Pythagore des 16 compositions internes possibles, appliquant $\mathcal{B}^2$ sur $\mathcal{B}$. Et ceci nous amène à une constatation fondamentale, presque jamais signalée dans les traités de logique :

En logique binaire, toute composition interne n-aire sur $\mathcal{B}$ est aussi une relation n-aire sur $\mathcal{B}$, et vice versa. Toute matrice d'incidence est une table de Pythagore, et vice versa. En particulier, les relations marquées $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{O}$, sont celles du carré d'Apulée ; ce sont aussi des compositions, ainsi que la fig. 7 le rappelait anticipativement.

Dès lors, on voit que l'ensemble A_2 est doté d'une loi de composition interne binaire, le produit relationnel (ou relatif), pour lequel nous adopterons le signe $\circ$. On sait que ce produit est un produit matriciel en calcul booléen : le OU est pris comme addition (somme logique $\vee$) et le ET comme multiplication (produit logique $\wedge$). Dans ce même calcul les matrices de A_2 sont des opérateurs linéaires pour l'ensemble A_1 des relations d'ordre 1, lesquelles vont être considérées comme des vecteurs de dimension 2 à valeurs en $\mathcal{B}$.

Parmi les 16 relations de A_2 , nous distinguons :

- deux équivalences, l'équivalence proprement dite $\mathcal{U}$, purement réflexive, et l'équivalence triviale $\mathcal{C}$, tautologique.
- deux ordres, l'implication $\mathcal{L}$ et sa symétrie $\mathcal{L}^*$; ils sont visiblement antisymétriques, et réflexifs-transitifs puisque l'on a :

$$(2) \quad \mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

- deux ordres stricts, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^*$, négations des ordres $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ respectivement ; ils sont antisymétriques, non réflexifs mais transitifs ($\mathcal{O} \circ \mathcal{O} \leq \mathcal{O}$; en fait, $\mathcal{O} \circ \mathcal{O} = \mathcal{I}$)
- deux projecteurs supplémentaires, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^*$ (idempotents, de produit nul $\mathcal{I}$, et de somme unité $\mathcal{U}$) ; $\mathcal{J}$ applique les vecteurs $p = (1,0)$ et $t = (1,1)$ sur p , les autres vecteurs sur le vecteur zéro $z = (0,0)$; $\mathcal{J}^*$ applique $\bar{p}$ et t sur $\bar{p}$, et les autres vecteurs sur z .
- deux bijections, l'affirmation $\mathcal{U}$ et la négation $\mathcal{N}$, lesquelles forment un groupe binaire, la négation étant involutive ($\mathcal{N} \circ \mathcal{N} = \mathcal{U}$) ; l'affirmation applique p sur p et $\bar{p}$ sur $\bar{p}$; la négation permute p et $\bar{p}$.

Si maintenant on considère A_2 comme l'ensemble des compositions binaires (fonctions dyadiques) de la logique bivalente, on retrouve les compositions bien connues ET (quatre fois), OU (quatre fois), l'addition sur le corps $\mathbb{Z}/2$ et la négation de celle-ci, soit donc les 10 fonctions dyadiques proprement dites (les 6 autres sont des redondances de fonctions mono ou zéro-adiques). Ce point de vue ultra-classique ne nous intéressera pas dans le présent exposé.

6. Symétries et automorphismes de A_2

Le cube de la fig 11 possède un groupe de $2^4 \cdot 4! = 384$ opérations de symétrie, dont seules quelques unes nous intéresseront ici. D'abord, pour mémoire, la symétrie centrale, qui est la négation (ou complémentation) dans la trame ; on a $\mathcal{R} := \mathcal{R} + \mathcal{C}$ et en particulier $\mathcal{L} + \mathcal{O} = \mathcal{C} = \mathcal{L}^* + \mathcal{J}$.

Plus intéressante pour nous sera la réciprocité, transformant la matrice $\mathcal{R}$ en sa transposée $\tilde{\mathcal{R}}$; celle-ci est la matrice de la relation réciproque, appelée parfois l'inverse. La réciprocité établit un anti-automorphisme sur $\mathcal{A}_2$:

$$(3) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{I}} \circ \tilde{\mathcal{P}}$$

Les invariants de la réciprocité sont les relations symétriques ($\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$), parmi lesquelles on a $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*, \mathcal{J}, \mathcal{J}^*$. C'est la symétrie de $\mathcal{E}$ et celle de $\mathcal{J}$ qui permettait aux anciens logiciens de faire les conversions de $S \subset \bar{P}$ en $P \subset \bar{S}$, et de $S \not\subset \bar{P}$ en $P \not\subset \bar{S}$ respectivement (voir fig 7).

Le groupe $\{\mathcal{U}, \mathcal{P}\}$ définit deux symétries, l'identité banale ($\mathcal{U} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{U} = \mathcal{R}$) et une conjugaison que nous qualifierons de simple ; $\mathcal{R}^*$ sera la conjuguée de $\mathcal{R}$ si :

$$(4) \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{P} = \mathcal{R}^*$$

Si donc $\mathcal{R}$ caractérise $S \subset P$, alors $\mathcal{R}^*$ caractérise $\bar{S} \subset \bar{P}$. Les relations "étoilées" de la trame $\mathcal{A}_2$ n'étaient pas prise en considération par les anciens logiciens. La conjugaison est, sur la fig 11, une symétrie par rapport à la médiane verticale ; les invariants en sont donc $\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{I}$, déjà invariants pour la réciprocité (matrices symétriques). Cette conjugaison établit un automorphisme sur $\mathcal{A}_2$:

$$(5) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}^* = \mathcal{P}^* \circ \mathcal{I}^*$$

Par analogie avec la théorie des matrices complexes, nous appellerons conjugaison hermitique le produit d'une réciprocité et d'une conjugaison simple. La conjuguée hermitique de $\mathcal{R}$ sera notée $\mathcal{R}^\dagger = (\tilde{\mathcal{R}})^* = (\mathcal{R}^*)^\sim$. Cette symétrie laisse invariante les relations hermitiques ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^\dagger$), à savoir les 4 ordres : $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*, \mathcal{O}, \mathcal{O}^*$, (ainsi que $\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{I}$). Si $\mathcal{R}$ caractérise $S \subset P$, alors, par hermiticité, elle caractérisera aussi $\bar{P} \subset \bar{S}$; mais cette conversion n'a pas été utilisée par les anciens logiciens, jusqu'à De Morgan. La conjugaison hermitique établit un anti-auto-

morphisme sur A_2 :

$$(6) \quad R = P \circ I \Leftrightarrow R^\dagger = I^\dagger \circ P^\dagger$$

On a alors deux théorèmes simples :

Th.1 : Si deux relations hermitiques ont un produit hermitique, alors elles commutent, et réciproquement (démonstration élémentaire).

Th.2 : Par négation à droite, ou bien à gauche, d'une relation hermitique $\mathcal{H}$, on obtient une symétrique I , ou bien respectivement la symétrique I^* conjuguée de I . En effet, l'hermiticité de $\mathcal{H}$ se traduit par $\mathcal{H} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ \mathcal{H}$ et par $\mathcal{P} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{P}$ on en tire immédiatement que $I := \mathcal{H} \circ \mathcal{P} = I^*$ et que $I' := \mathcal{P} \circ \mathcal{H} = I^* = I^\dagger$.

7. La pyramide logique des jugements

Un "jugement" (au sens de la terminologie traditionnelle), un jugement "prédicatif" est, pour nous une relation basique de la trame A_2 , c'est-à-dire une relation appartenant soit à la base inférieure (I, O, O^*, I^*), - auquel cas le jugement est particulier, - soit à la base supérieure (I^*, R^*, R, E , complémentaire de la précédente), - auquel cas le jugement est universel. De ces 8 jugements, la logique traditionnelle n'avait donc retenu que ceux notés ici sans astérisque.

Dans chacune de ces bases, les 4 jugements s'enchaînent par les opérations d'un groupe de Klein qui sont : l'identité, la négation à droite, la négation à gauche, la conjugaison simple. De ce groupe, la logique ancienne n'avait retenu que le sous-groupe formé par les deux premières de ces opérations. Toute une base sera donc connue dès qu'on se sera donné un jugement-repère, par exemple pour l'une et R pour l'autre, et qu'on aura laissé jouer le groupe.

Par définition, les deux repères R et I sont dits affirmatifs. Les autres jugements seront affirmatifs ou négatifs

selon qu'ils sont issus du repère par un nombre pair ou par un nombre impair de négations, respectivement. Ainsi est donc défini le mode de qualité.

Quant au mode de quantité, il est évidemment défini par l'appartenance à telle ou telle base de la trame. On passe du repère universel $\mathcal{R}$ au repère particulier $\mathcal{J}$ en projetant le premier au moyen du second agissant à gauche du premier :

$$(7) \quad \mathcal{J} \circ \mathcal{R} = \mathcal{J}$$

De même, $\mathcal{O}$ résulte de la "projection" de $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{J}$:

$$(8) \quad \mathcal{J} \circ \mathcal{Z} = \mathcal{O}$$

Par conjugaison, on obtient les projections à gauche par $\mathcal{J}^*$, et par symétrie, les 4 formules de projections à droite. On notera que (8) résulte de (7) par négation à droite.

Revenant au carré logique d'Apulée, on peut dire que cette figure est mal choisie et incomplète. En effet a) un carré possède 8 symétries, alors que le carré logique n'en a que 2, l'identité et la négation à droite, qui permute les deux rangées verticales ; le changement de qualité n'est pas une symétrie, puisqu'elle est visiblement irréversible ; la figure à adopter serait plutôt un trapèze ; b) il existe d'autres trapèzes logiques, obtenus par conjugaisons, et ignorés de la logique d'avant De Morgan.

Aussi proposons-nous, à la place du carré d'Apulée, la pyramide logique, représentée par la

f i g u r e 12

La pyramide est à base rectangulaire, et non carrée, car ses sommets se permutent par le groupe de Klein, ainsi que nous venons de le voir. Les plans de symétrie verticaux représentent les symétries notées "n.d" (négation à droite) et "n.g" (négation à gauche). Le sommet est, symboliquement, un "centre de projection", d'où partent les "projetantes" appliquant les jugements universels

sur les jugements particuliers.

8. Les 15 syllogismes ternaires classiques

Par définition, la relation (2) d'idempotence de $\mathcal{R}$, - c'est-à-dire de réflexivité-transitivité de l'implication matérielle, - est le syllogisme fondamental. Nous l'écrirons désormais comme suit, en renversant l'ordre canonique majeure-mineure-conclusion :

$$(9) \quad \text{BARBARA} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{conclusion}) = (\text{mineure}) \circ (\text{majeure}) \\ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \end{array} \right.$$

En langage ensembliste, la conclusion est $S \subset P$; elle s'obtient par transitivité à partir de la mineure $S \subset M$ et de la majeure $M \subset P$. L'écriture relationnelle (9) est évidemment supérieure au schéma classique parce que plus abstraite, les "termes" n'étant même pas mentionnés.

Le mot "Barbara" avait été forgé au Moyen-Age, ainsi que d'autres, par les Scolastiques, pour caractériser les syllogismes valides. Les voyelles sont celles du carré logique, dans l'ordre canonique (que nous avons donc inversé, le produit relationnel s'exécutant d'habitude vers la droite).

Ces mots jouaient avant tout un rôle mnémotechnique ; ainsi, l'initiale (B,C,D ou F) désigne à quel syllogisme de la première figure peut se ramener le syllogisme considéré. On en connaît quelques variantes ; celle que nous utiliserons ici semble avoir été fixée par le pape Jean XXI au 13e siècle.

Le Barbara appartient visiblement à la 1ère figure ; celle-ci compte 3 autres syllogismes que nous déduisons de (9) par négation à droite ou par projection à gauche :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \text{CELARENT : } \mathcal{E} \circ \mathcal{N} = (\mathcal{E} \circ \mathcal{E}) \circ \mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{E} \\
 & \text{DARII : } \mathcal{I} \circ \mathcal{E} = \mathcal{I} \circ (\mathcal{E} \circ \mathcal{E}) \quad " \quad \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{E} \\
 & \text{FERIO : } \mathcal{I} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{P} = \mathcal{I} \circ (\mathcal{E} \circ \mathcal{E}) \circ \mathcal{P} \quad " \quad \mathcal{O} = \mathcal{I} \circ \mathcal{E}
 \end{aligned}$$

Passons aux autres figures, et pour cela convenons que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ caractérisent respectivement une mineure SM et une majeure MP, alors $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ caractériseront respectivement une mineure MS et une majeure PM. Dès lors, les 4 figures classiques seront représentées par les produits relationnels :

$$(I) \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{R} ; \quad (II) \quad \mathcal{P} \circ \tilde{\mathcal{R}} ; \quad (III) \quad \tilde{\mathcal{P}} \circ \mathcal{R} ; \quad (IV) \quad \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{R}}$$

Pour qu'un syllogisme de la lère figure en engendre un ou plusieurs autres dans les autres figures (ou inversement), il faut qu'il contienne une ou des relations symétriques. Le Barbara n'a que des hermitiques, et ainsi il n'engendre rien par symétrie ; mais d'après le théorème 1 page 10, les autres syllogismes de la lère figure contiendront des symétries. D'où la Règle 1 : Si un syllogisme de la première figure contient k prémisses symétriques, il engendre 2^k syllogismes. Or, on a pour Barbara, Celarent, Darii, Ferio, respectivement $k = 0, 1, 1, 2$. Par ailleurs, on a la Règle 2 : Si la conclusion est symétrique, alors le syllogisme en engendre un autre, son transposé ; tel est le cas du Celarent et du Darii. En conclusion, nous aurons dénombré $2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^1 + 2^2 = 13$ syllogismes classiques, nécessairement valides. Ils figurent dans la

f i g u r e 13

Celle-ci compte deux autres syllogismes classiques, le Baroco et le Bocardo, échappant au dénombrement que nous venons d'effectuer. Leur initiale "B" indique que, pour les Scolastiques, ils se ramenaient au Barbara ; le procédé employé était la "réduction par l'absurde", - ce dont nous n'aurons nul besoin ici :

Tout syllogisme en engendre un autre lorsque l'on nie à gauche la relation majeure et à droite la relation mineure, ce qui laisse la conclusion inchangée $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \circ \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{R}$. En général, ce procédé conduit à des syllogismes non classiques,

sauf précisément dans le cas du Baroco et du Bocardo ; ceux-ci (voir fig. 13) sont, avec le Barbara, les seuls syllogismes classiques dont les trois jugements sont des ordres, donc des relations hermitiques. D'après le Théorème 1 page 10, leurs prémisses sont commutables.

9. Les 9 syllogismes quaternaires classiques

La logique classique connaît 24 syllogismes valides ; parmi les 9 non encore cités ici, 5 sont triviaux en ce sens qu'ils résultent de syllogismes ternaires dont on particularise la conclusion universelle. Ce sont ainsi des raisonnements quaternaires, des syllogismes à 4 relations, la 4e étant la "projection" $\int$ agissant à gauche sur le produit de la mineure et de la majeure. Ces syllogismes apparaissent dans le tableau de la

f i g u r e 14 ,

avec des noms de fantaisie, et la mention "3°" .

Les 4 derniers syllogismes, non triviaux, sont : 1°) Bama-lip et 2°) Darapti Felpaton, Fesapo. Leurs noms comprennent tous la consonne "p" , ce qui signifie, selon les conventions des Scolastiques qu'il faut procéder à une "conversion par limitation", autrement dit faire passer un des jugements du mode universel au mode particulier. En conséquence, il s'agit ici aussi de raisonnements quaternaires où $\int$ est la 4e relation.

Pour le Bamalip (4e figure), marque d'un "1°" sur la fig. 14, la projection par $\int$ se fait à droite. Pour les 3 autres cités en (2°) ci-avant, et marqués d'un "2°" sur la fig. 14, le projecteur $\int$ s'intercale au milieu du produit relationnel. Ces syllogismes quaternaires se classent donc selon la place de la 4e relation ; totalisant les cas (1°) (2°) et (3°), nous arrivons à $1 + 3 + 5 = 9$ syllogismes quaternaires. Soit au total 24 syllogismes, dont 5 triviaux ; reste donc ainsi les 19 syllogismes valides, tels que connus et classés par l'ancienne logique.

10. Théorie moderne du syllogisme

Nous avons dit, après De Morgan et d'autres, qu'en logique

de l'extension, il n'y avait aucune raison d'exclure les jugements où les sujets sont exprimés négativement. Si on lève cette interdiction, on se voit obligé de prendre en considération les 8 jugements de la pyramide logique, c'est-à-dire les 8 relations basiques de la trame $\mathbb{A}_2$. Le problème qui se pose alors est celui du classement et du dénombrement des syllogismes valides, qu'ils soient classiques ou non classiques.

Nous appellerons syllogisme fondamental tout énoncé de deux relations d'ordre (les prémisses) dont le produit relationnel est une relation d'ordre (la conclusion). Ces ordres, stricts ou non stricts, étant des relations hermitiques $\mathcal{H}$, le schéma d'un syllogisme fondamental sera donc

$$(11) \quad \mathcal{H}_{co} = \mathcal{H}_{mi} \circ \mathcal{H}_{ma}$$

Or, très peu de produits répondront à ces critères :

1°) Les deux prémisses ne peuvent être des ordres stricts (selon les anciens logiciens : "de deux prémisses particulières on ne peut rien conclure"). En effet, les deux ordres stricts σ et $\tilde{\sigma}$ sont à carré nul et ont un produit symétrique.

2°) Si les deux prémisses sont des ordres non stricts, alors cet ordre doit être le même dans chacune d'elles. En effet, le produit de $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}$ est symétrique. Il n'y aura ainsi que deux fondamentaux de ce type, le Barbara et son conjugué.

3°) L'une des prémisses pourra être stricte, mais non l'autre ; alors la conclusion sera stricte (selon les anciens logiciens : "si une prémisses est particulière, alors la conclusion doit être particulière"). Toutefois, l'ordre non strict $\hat{\mathcal{P}}$ de l'une ne peut être que $(\mathcal{P} \vee \mathcal{U})$, où $\mathcal{P}$ est l'ordre strict de l'autre. En effet, la transitivité de $\mathcal{P}$ se traduit par $\mathcal{P}^2 \vee \mathcal{P} = \mathcal{P}$, d'où $\hat{\mathcal{P}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$; par contre le résultat de $(\hat{\mathcal{P}} \vee \mathcal{U}) \circ \mathcal{P}$ n'est pas un ordre. Les fondamentaux de ce type seront alors uniquement le Baroco et le Bocardo, ainsi que leurs conjugués.

Nous appellerons générateurs des syllogismes ternaires

les 3 syllogismes classiques (et les 3 seuls) obéissant au schéma (11) :

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \text{Barbara} & \text{Baroco} & \text{Bocardo} \\ \mathcal{H} = \mathcal{A} \circ \mathcal{H} & \mathcal{O} = \mathcal{O} \circ \mathcal{H} & \mathcal{O} = \mathcal{H} \circ \mathcal{O} \end{array}$$

Chacun de ces syllogismes est générateur de 32 autres, et ce par le jeu de deux groupes d'opérateurs :

a) Groupe des symétries par négations, qui compte les 8 opérateurs obtenus en faisant agir sur (11) la négation à gauche, la négation à droite, la double négation au milieu. D'après le Théorème 2, ces syllogismes ne pourront rassembler que des relations hermitiques en nombre impair (1 ou 3) ou des relations symétriques en nombre pair (0 ou 2).

b) Groupe des symétries par figures dont les 4 opérateurs agissent dans une ou deux prémisses, remplaçant une hermitique $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}^*$ qui lui est égale (ex : $S \subset M$ est remplacé par l'expression équivalente $\bar{M} \subset \bar{S}$), ou remplaçant une symétrique $\mathcal{I}$ par $\mathcal{I}$ qui lui est égale (ex : $S \subset \bar{M}$ est remplacé par $M \subset \bar{S}$)

En conclusion : il existe $3 \times 8 \times 4 = 96$ syllogismes ternaires valides, classiques ou non, et 96 seulement .

Revenant à la définition généralisée des jugements affirmatifs et négatifs (p. 11 en haut), nous constatons que les négatifs sont en nombre pair dans les générateurs. Cette parité est invariante pour les 32 opérations des groupes (a) et (b) ci-avant, puisque les négations agissent toujours deux fois et que les opérations de figure ne changent pas la parité. D'où :

Un syllogisme valide doit être pair, c'est-à-dire comporter un nombre pair (0 ou 2) de jugements négatifs (selon les Anciens : "deux prémisses affirmatives ne peuvent conduire à une conclusion négative" ; "si une prémisses est négative, la conclusion doit être négative"). Par contre, la règle ancienne : "de deux prémisses négatives on ne peut rien conclure", ne s'applique qu'aux syllogismes classiques, où les sujets des jugements ne sont jamais exprimés négativement.

En fait, toutes les anciennes règles de validité ne faisaient que traduire l'une ou l'autre propriété de l'algèbre de $\mathcal{A}_2$ muni du produit relationnel.

Le cas des syllogismes quaternaires se traitera de façon analogue. Puisque ces syllogismes introduisent une proposition supplémentaire de "projection" de l'universel sur les particulier, ils ne pourront dériver que de Baroco et de Bocardo : leur conclusion sera toujours particulière.

S'inspirant du tableau (fig. 14) des syllogismes quaternaires, on voit qu'on en obtient les générateurs en remplaçant, dans Baroco ou Bocardo, la prémisse σ par $\sigma \circ \tilde{E}$ ou $\tilde{E} \circ \sigma$. On arrive ainsi à 3 générateurs, qui dérivent l'un de l'autre par permutation de leurs facteurs :

$$(13) \quad \sigma = \sigma \circ \tilde{E} \circ \tilde{E} ; \quad \sigma = \tilde{E} \circ \sigma \circ \tilde{E} ; \quad \sigma = \tilde{E} \circ \tilde{E} \circ \sigma$$

Pour obtenir les autres syllogismes, on fera jouer, ici aussi, le groupe des négations, - qui compte maintenant 16 opérations, et le groupe des symétries par figures, - qui en compte 8. On arrive ainsi à $3 \times 16 \times 8 = 384$ syllogismes valides quaternaires. D'où enfin le total de $96 + 384 = 480$ syllogismes "morganiens", dont seulement 1 sur 20 classique.

11. En guise de conclusion

De nos jours, le syllogisme a perdu toute l'importance que lui attachaient les Anciens et les Scolastiques. La faute en est un peu à ceux-ci qui rendirent ridicules leurs discours par l'abus et la lourdeur de leurs raisonnements syllogistiques.

Certes, le syllogisme est encore d'un emploi courant, mais sous des formes allégées, utilisant des raccourcis et des sous-entendus. Mais la syllogistique traditionnelle, - et a fortiori morganienne, - est plutôt dédaignée, ne semblant plus intéresser que quelques professeurs, quelques érudits et, bien sûr, les historiens de la logique.

En fait, la syllogistique ne mérite ni ces excès d'honneurs scolastiques ni ces indignités modernes. C'est un chapitre de la logique formelle, ni plus ni moins, et le présent exposé a montré

comment on pouvait lui donner une allure algébrique, tout à fait moderne. L'essentiel de cet exposé tient en les deux dernières pages, ce qui est vraiment peu, - tout en étant complet, - en regard des développements classiques. Et la clé de notre théorie algébrique gît dans la constatation déjà formulée ci-avant, mais que nous répétons : En logique bivalente, toute composition est une relation; et vice versa. On ne peut que regretter l'absence de cette remarque dans la très grande majorité des articles et des traités de logique formelle.

P.V. GROSJEAN

Figure 1 : Syllogisme hypothético-catégorique

si les vivants (M) sont mortels (P)
 et si les hommes (S) sont vivants (M)
 alors les hommes (S) sont mortels (P)

Figure 2 : Syllogisme catégorique en "Barbara"

Prémisses	{	Majeure :	Tout M est P
		Mineure :	Or tout S est M
Conclusion :			Donc tout S est P

Figure 3 : Syllogismes non-catégoriques (p.m.)

Hypothétique :	si A alors B	{	or A donc B.
			or non-B donc nA,
Disjonctif :	S est B ou bien C	{	or S est B, donc..
			or S n'est pas B, donc ...

Figure 4 : Graphes modernes des figures d'Aristote

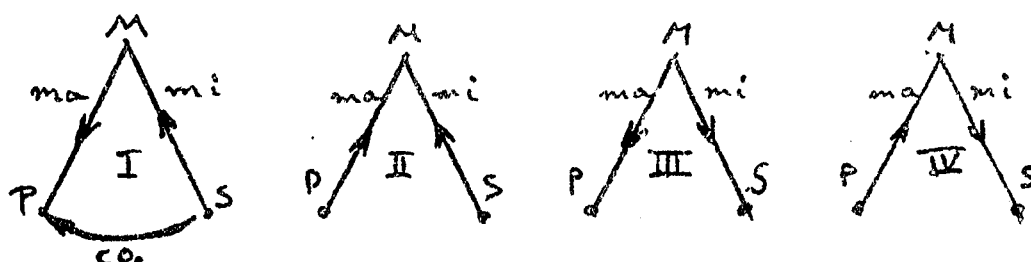


Figure 5 : Carré d'Apulée

	AFFIRMATIFS	NEGATIFS
UNIVERSELS :	Toute volupté est bonne	Aucune vol.n'est b.
PARTICULIERS :	Quelque vol. est bonne	Qq vol.n'est pas b.

Figure 6 : Carré logique, en logique compréhensive

(A) $\forall x \in S : x \in P$	$\forall x \in S : x \notin P$ (E)
(I) $\exists x \in S : x \in P$	$\exists x \in S : x \notin P$ (O)

Figure 7 : Carré logique, autres points de vue

ensembles en inclusion	propositions en implication	propositions en calcul booléen
$S \subset P$ $S \subset \bar{P}$	$s \Rightarrow p$ $s \Rightarrow \bar{p}$	$\bar{s} \vee p$ $\bar{s} \vee \bar{p}$
$S \not\subset \bar{P}$ $S \not\subset P$	$s \not\Rightarrow \bar{p}$ $s \not\Rightarrow p$	$s \wedge p$ $s \wedge \bar{p}$

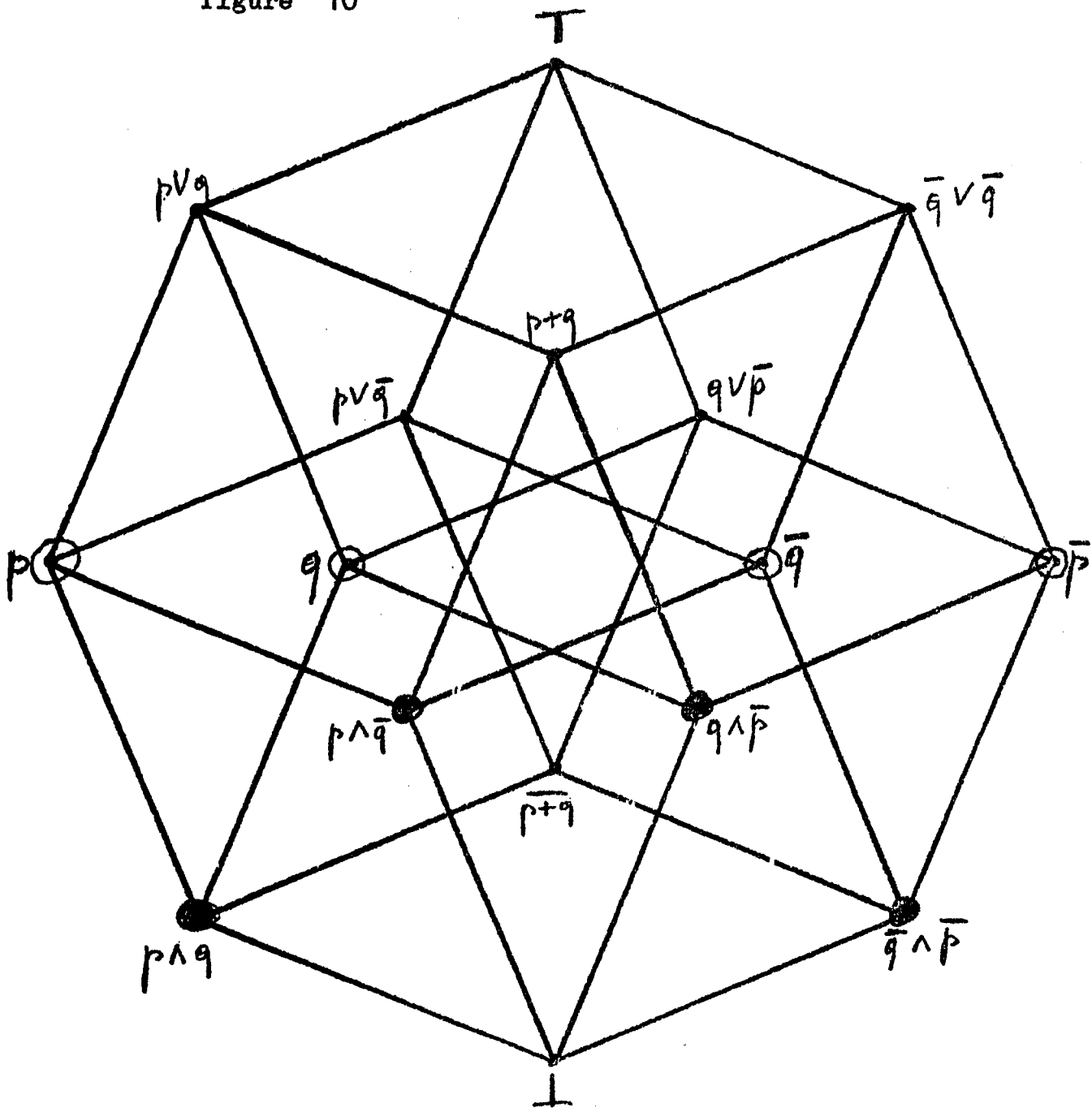
Figure 8 Matrices d'incidence	
relation d'ordre	relation d'ordre strict
$\begin{array}{c cc} \Rightarrow & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \curvearrowright$	$\begin{array}{c cc} \not\Rightarrow & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \curvearrowright$

Figure 9 : Diagrammes de Hasse de treillis-maillages	
ordre selon l'implication stricte	valorisations binaires possibles, les valeurs dans $\mathbb{B}$ étant ordonnées selon l'ordre d'Aristote (implicat.matériel)

TRAME ENGENDREE PAR DEUX ALTERNATIVES

$(p, \bar{p})$ et $(q, \bar{q})$

figure 10



○ : éléments générateurs

● : éléments de la base, elle-même treillis de Boole :

(ordre d'Aristote sur les points et les barres) :

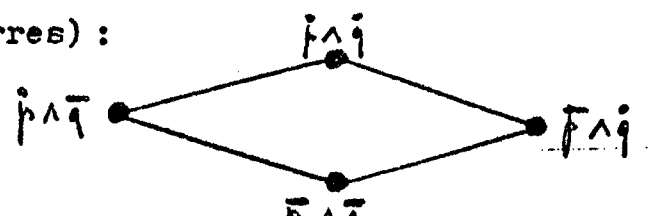


figure 11

La trame A_2 des 16 relations binaires sur $\mathbb{B}$

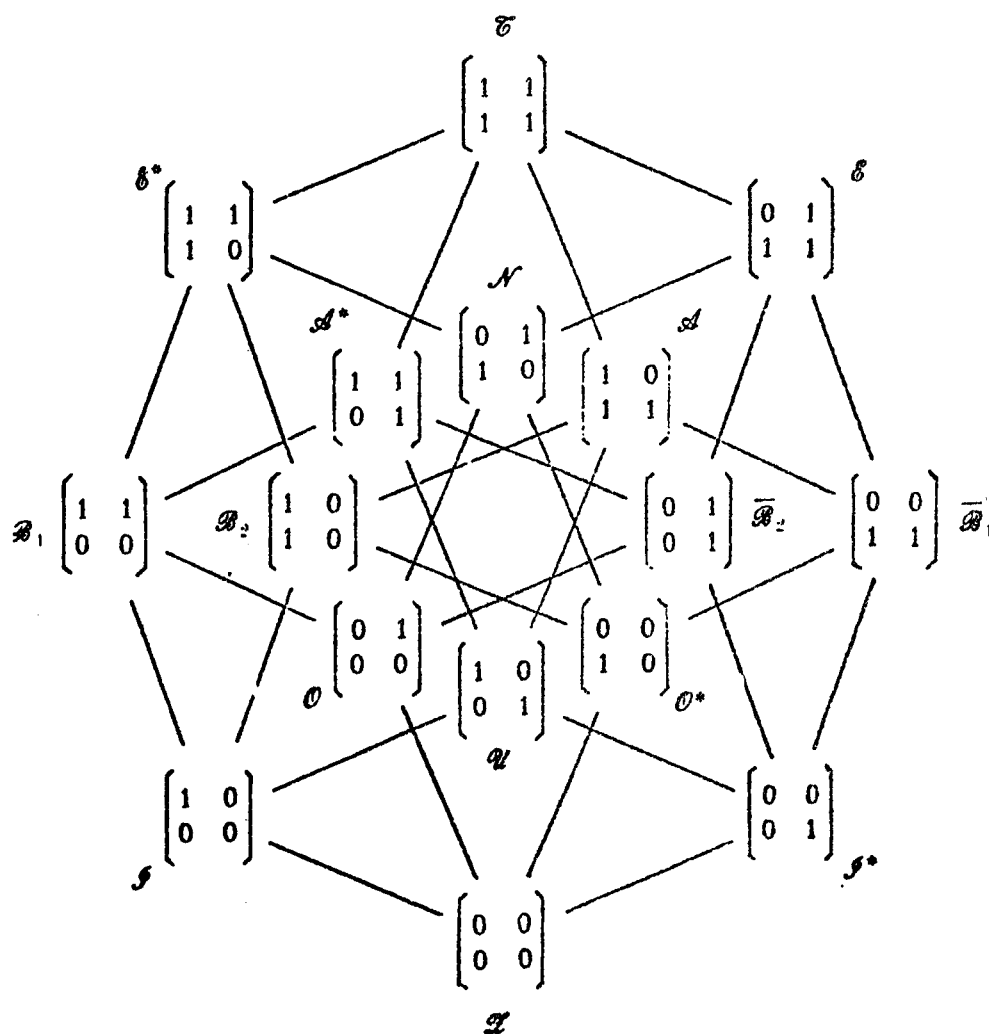
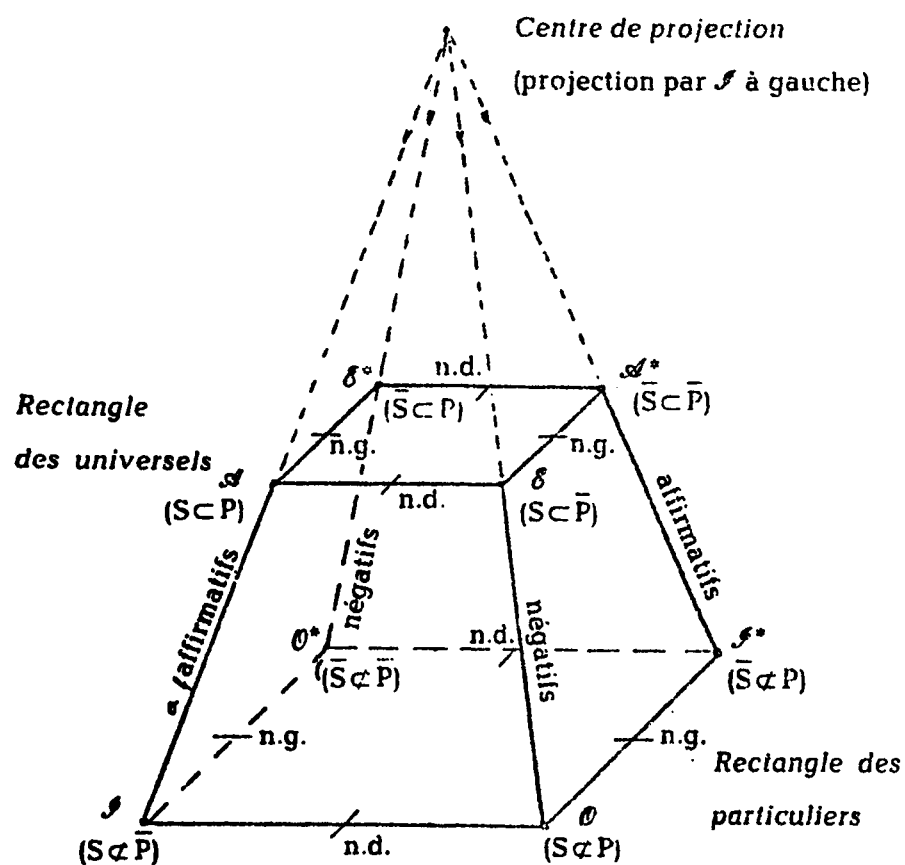


figure 12

La pyramide logique



face avant: trapèze logique

face arrière: trapèze conjugué

figure 13

Les 15 syllogismes ternaires classiques

Conclu- sions	1 ^{re} figure	2 ^e figure	3 figure	4 figure
$\mathcal{A} =$	$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ Barbara			
$\mathcal{E} =$	$\mathcal{A} \circ \mathcal{E}$ Celarent	$\mathcal{A} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Cesare		
		$\mathcal{E} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Camestres		$\tilde{\mathcal{E}} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Calemes
$\mathcal{I} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{A}$ Darii		$\tilde{\mathcal{I}} \circ \mathcal{A}$ Datisi	
			$\tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{I}$ Disamis	$\tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{I}}$ Dimatis
$\mathcal{O} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{E}$ Ferio	$\mathcal{I} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Festino	$\tilde{\mathcal{I}} \circ \mathcal{E}$ Ferison	$\tilde{\mathcal{I}} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Fresison
		$\mathcal{O} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Baroco		
			$\tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{O}$ Bocardo	

