Séminaire de philosophie et mathématiques

Jean-Yves Girard

Les démonstrations de cohérence de l'arithmétique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1980, fascicule 1
« Les démonstrations de cohérence de l'arithmétique », , p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1980___1_A1_0>

Les démonstrations de cohérence de l'arithmétique

Jean-Yves GIRARD

Le problème des démonstrations de cohérence a ceci de particulier qu'il s'agit d'un problème de nature philosophique qui peut s'énoncer en termes mathématiques précis. On va distinguer un peu arbitrairement

I - La signification philosophique

II - Le contenu et les conséquences mathématiques

des démonstrations de cohérence. L'exposé qui suit essaie d'être compréhensible, même au non-spécialiste.

I - Signification philosophique de la cohérence

1°) Cohérence et jeux formels

D'abord, il est peut-être nécessaire de donner une définition précise de la cohérence. Un système formel T est cohérent si et seulement si il existe des énoncés non démontrables dans ce système. Dans le cas de l'arithmétique qui nous intéresse, un système formel dans le langage de l'arithmétique est cohérent si et seulement si $0 \neq 0$ n'est pas démontrable. Autrement dit, $\mathrm{coh}(T) \leftrightarrow T \nvdash 0 \neq 0$. (Remarque : le mot cohérence est souvent remplacé par l'anglicisme "consistance" dans les textes en français).

Ce qu'affirme la cohérence, c'est que les mathématiques (ici l'arithmétique), considérées comme un jeu, sont parfaitement saines. Pourvu que l'on observe strictement les règles du jeu (les lois axiomatiques de la démonstration), on n'arrivera pas à une absurdité. Le point de vue formaliste le plus extrême, qui, on le sait, considère les mathématiques comme un jeu formel place donc le problème de la cohérence au centre de toute réflexion sur les fondements des mathématiques. Si l'on ne partage pas cette philosophie, c'est que l'on accorde plus ou moins de réalité aux expressions mathématiques et la question qui se pose alors est la suivante : si A est un énoncé dont je ne conteste pas qu'il ait un sens, et si A est démontrable, que puis-je dire ? Par exemple, est-ce que A est vrai ? Et de quelle manière puis-je, à partir de la démonstration A, m'en assurer ?

Pour en revenir au point de vue formaliste, si l'on est vraiment sincère en déniant toute objectivité aux notions mathématiques (du moins dès qu'elles font intervenir l'infini, c'est-à-dire des quantificateurs), on ne doit pas se poser la question abstraite de la cohérence, mais plutôt celle-ci : peut-on démontrer $0 \neq 0$

en moins de $10^{10\ 000}$ étapes ? Une réponse négative nous assurerait toute sécurité pour nous livrer à nos jeux mathématiques, avec l'assitance éventuelle des machines. Il ne semble pas que ce type de cohérence concrète ait beaucoup tenté les mathématiciens.

2°) Cohérence et vérité

A vrai dire, Hilbert et son école (aux alentours des années 20) ne déniaient pas toute réalité aux mathématiques. Ils distinguaient entre des énoncés réels (c'est-à-dire qui ont un sens) et des énoncés idéaux (de même, l'on plonge, pour la commodité, les nombres réels dans les nombres complexes), qui n'ont pas de sens en eux-mêmes, mais qui sont si commodes pour les démonstrations. Ce que Hilbert appelait énoncé réel, c'est un énoncé qui peut s'écrire $\forall n_1 \ldots \forall n_k \quad P(n_1 \ldots n_k)$, où les $\forall n_i$ sont des quantificateurs numériques et où P est une propriété calculable (c'est-à-dire exactement calculable mécaniquement par une machine, sans tenir compte des limitations de temps ou d'espace). On sait qu'on peut supposer depuis le résultat de Matiaseviv, que $P(n_1,\ldots,n_k)$ est de la forme $p(n_1,\ldots,n_k) \neq 0$ où p est un polynôme de $Z[X_1,\ldots,X_k]$.

Par rapport à la grande généralité des énoncés que l'on peut écrire en arithmétique, sans parler de la théorie des ensembles, il est clair que les énoncés réels au sens de Hilbert (et que nous appellerons purement universels) forment une classe en apparence assez pauvre. Ceci dit, cette classe contient la plupart des grandes conjectures, par exemple le théorème de Fermat, la conjecture de Goldbach, l'hypothèse de Riemann, la conjecture des quatre couleurs ... Bien entendu, il y a beaucoup d'énoncés qui ne sont pas de cette forme, par exemple celui qui dit que la conjecture de Goldbach est vraie pour des nombres suffisamment grands ...

Le programme que Hilbert se propose de mener à bien, c'est de montrer que l'on peut (du moins en théorie, car il ne conteste pas l'intérêt pratique des objets idéaux) éliminer les objets idéaux des démonstrations de propriétés réelles. Autrement dit, on a une démonstration de $\forall n P(n)$ par des méthodes abstraites, peut-on en donner une démonstration qui n'utilise que des principes élémentaires ? Il s'agit d'un principe de pureté des méthodes : puisque la conclusion ne fait pas intervenir les êtres abstraits, il doit être possible de les éliminer de la démonstration. Ce principe est à rapprocher de la préoccupation des théoriciens des nombres qui recherchent des démonstrations élémentaires de résultats déjà démontrés, comme par exemple le théorème des nombres premiers.

Le programme de Hilbert est équivalent à la recherche d'une démonstration de cohérence des méthodes abstraites par les méthodes réelles. Démontrons-le (pour fixer les idées) dans le cas de l'arithmétique.

1) On peut démontrer en trois lignes la cohérence de l'arithmétique (bien entendu, cette démonstration a très peu d'intérêt, surtout au point de vue philosophique).

On démontre tout simplement que, si A est un théorème de AP (l'arithmétique de Peano), alors A est vrai, ce qui se fait sans l'ombre d'un problème dans la théorie des ensembles. En particulier, $0 \neq 0$ ne peut pas être démontrable, puisqu'il est visiblement faux. Ceci constitue une démonstration de la cohérence de AP utilisant des objets abstraits (le prédicat de vérité d'un énoncé), mais l'énoncé Coh(AP) est un énoncé réel : il s'écrit $\forall d$ (d n'est pas une démonstration de $0 \neq 0$ dans AP), ce qui, au moyen d'une énumération des démonstrations peut s'écrire $\forall n P(n)$ avec P calculable. Si le programme de Hilbert est vrai, on peut certainement donner une démonstration de cohérence par des méthodes réelles.

2) Réciproquement, supposons que l'on dispose d'une démonstration de cohérence n'utilisant pas les méthodes abstraites et montrons comment on pourrait l'utiliser pour éliminer les énoncés abstraits des démonstrations de propriétés réelles. Pour rendre l'argumentation plus claire, nous supposerons avoir une démonstration (par des méthodes abstraites dans AP) du théorème de Fermat. On raisonnerait ainsi :

(i) On sait que $AP \vdash F$

(ii) Supposons que $\neg F$; cela veut dire qu'il existe $a,b,c \neq 0$ et $n > 2$ tels que $a^n + b^n = c^n$. Soient A, B, C et N les expressions formelles qui représentent respectivement a, b, c et n dans l'arithmétique (par exemple a est 10 et A est SSSSSSSSSO) il est évident (car il s'agit de quelque chose de calculable, donc de mécanique, donc à la portée d'un système formel) que $AP \vdash A^N + B^N = C^N$.

(iii) Comme $AP \vdash F$, il démontre tous les cas particuliers, donc aussi $A^N + B^N \neq C^N$, donc si l'hypothèse (ii) est vraie, AP est contradictoire. Par contraposition, F est vrai.

(iv) Si l'on met bout à bout tous les ingrédients de la démonstration, (la démonstration réelle de cohérence de AP, l'étape (i) qui n'est pas la démonstration de F, mais la démonstration que F est démontrable, puis (ii) et (iii)), on voit que la démonstration obtenue est parfaitement réelle.

On voit le rôle essentiel joué ici par des propriétés calculables (ou mécaniques) et la tentative de Hilbert, c'est de réduire les mathématiques à ce type de propriété.

Le programme de Hilbert s'est effondré comme on sait mais il reste quand même de ce qui précède la remarque que si AP est cohérente, alors tous ses théorèmes purement universels sont vrais, autrement dit, la cohérence a quelques conséquences sur la vérité, ce qui n'était pas évident a priori. Par contre, la cohérence pour d de longueur moins que N n'a aucune conséquence sur la vérité.

3°) Cohérence et fondements

Vous connaissez la suite : le deuxième théorème de Gödel (1931) établit l'impossibilité de donner une démonstration de Coh(AP) dans AP (sauf si AP est contradictoire) et, donc, a fortiori, il n'y a pas de démonstration réelle de la cohérence

de AP, ce qui sape complètement le programme de Hilbert. Sauf pour les théories pathologiques, il faut tout le temps plus que T pour démontrer Coh(T), et en particulier, le rêve naïf qui consisterait, partant de rien ou presque, d'établir la cohérence de T_0, puis dans T_0, d'établir la cohérence de T_1, ... ne tient pas : c'est au contraire T_{n+1} qui démontre la cohérence de T_n.

Il importe cependant de ne pas dramatiser à l'extrême les conséquences du second théorème d'incomplétude :

1) Bien que Coh(T) soit démontrable avec "plus que T", ce plus peut être plus simple à maints égards que T lui-même ; c'est d'ailleurs pourquoi il n'est pas absurde de rechercher des démonstrations de cohérence. Voir II.

2) Il existe des démonstrations de cohérence relative (surtout en théorie des ensembles) ; ces démonstrations font toujours partie des mathématiques réelles et ont des conséquences intéressantes en termes de vérité : par exemple les entiers naturels ne sont pas affectés par les constructions de Gödel ou de Cohen, ce qui montre que l'axiome du choix, l'hypothèse du continu, leurs négations, n'ont pas de conséquence en arithmétique, autrement dit, on dispose d'une procédure effective pour les éliminer des démonstrations. D'une certaine façon, ceci réalise le programme de Hilbert, si on pense à l'utilisation de l'axiome du choix comme une méthode abstraite.

3) Enfin, pour reprendre un mot de Kreisel : les doutes sur la cohérence sont infiniment plus douteux que la cohérence elle-même.

II - Les démonstrations de cohérence

A plusieurs reprises dans les années 30, Gentzen a donné des démonstrations de cohérence de l'arithmétique. Il y en a eu d'autres depuis, notamment une de Gödel en 1958. La production de démonstrations de cohérence n'a pas cessé depuis, mais seulement, à cause de leur caractère philosophique douteux, les auteurs préfèrent mettre l'accent sur un autre aspect du travail (comme par exemple un corollaire de la démonstration de cohérence qu'ils ont obtenue et qui soit d'un intérêt plus évident).

1°) Les démonstrations de cohérence

Les premières sont dues à Gentzen et elles utilisent comme principe extérieur à l'arithmétique de Peano l'induction transfinie jusqu'à ε_0, ε_0 étant le premier ordinal tel que $\omega^\alpha = \alpha$; c'est un tout petit ordinal dénombrable ; l'ordre sur ε_0 peut être décrit ainsi : le domaine est formé des polynômes exponentiels $(0,1,+,.,X^\circ)$ ordonné par $p < q$ si et seulement si, pour n suffisamment grand, $p(n) < q(n)$. La démonstration de Gentzen peut être vue comme une démonstration du programme de Hilbert mais quand la conclusion est la négation d'un énoncé réel (c'est-à-dire purement existentielle).

Grâce à la méthode de l'élimination des coupures introduites par Gentzen, on peut montrer par induction transfinie jusqu'à ε_0 que si $0 \neq 0$ est démontrable, il l'est aussi sans coupures. Il n'est pas possible de définir ici ce qu'est une démonstration sans coupures, disons seulement qu'on restreint les règles logiques de telle manière à garder, la conclusion de la règle étant connue, le contrôle sur les prémisses. Les démonstrations sans coupures satisfont à la pureté des méthodes.

Dans les années qui ont suivi, on a obtenu (Schütte, Ackermann,...) d'autres démonstrations de cohérence par induction transfinie jusqu'à ε_0. La démonstration de Gödel de 1958 utilise des fonctionnelles calculables de type fini, l'idée étant de remplacer une expression $\forall F \; \exists G \quad A(F,G)$ par $\exists H \; \forall F \quad A(F,H(F))$, ce qui n'est possible qu'avec la logique intuitionniste, du moins si l'on veut des fonctionnelles calculables.

J'ai moi-même produit, l'an passé, une démonstration de cohérence de l'arithmétique par une nouvelle forme d'élimination des coupures, en utilisant l'induction transfinie jusqu'à un ordinal M_0 beaucoup plus grand que ε_0.

2°) Intérêt mathématique des démonstrations de cohérence

Pour reprendre encore le mot de Kreisel, Gentzen est l'homme qui démontra la cohérence de l'arithmétique (c'est-à-dire de l'induction jusqu'à ω) au moyen de l'induction jusqu'à ε_0. En fait, on s'aperçoit que certainement Gentzen utilise l'induction transfinie jusqu'à ε_0 mais seulement sur une propriété décidable, alors que l'arithmétique admet l'induction sur tous les énoncés : si du point de vue de la prouvabilité formelle il n'y a pas de simplification, il est certain que l'induction sur des propriétés décidables (le long d'ordinaux transfinis) est une certaine façon de reformuler le programme de Hilbert. L'induction transfinie jusqu'à, disons, ω^2 peut s'écrire : de

(1) $P(0,y)$

(2) $P(a,y) \longrightarrow P(a+1,y)$

(3) $P(\omega.n + f(n,y),y) \longrightarrow P(\omega.(n+1),y)$

(4) $P(\omega.g(y),y) \longrightarrow P(\omega^2,y)$

où f est une fonction calculable, déduire

(*) $P(\omega^2,y)$.

La règle est restreinte à P sans quantificateurs. Si l'on applique le mot de Kreisel à la démonstration par induction jusqu'à M_0, la différence entre les principes utilisés et ce que l'on obtient est en apparence bien plus grande, mais en fait on a une démonstration de cohérence au moyen d'une induction transfinie beaucoup plus restrictive (dans le cas de ω^2, la restriction serait $f(n,y) = g(y)$). Ceci montre qu'on arrive à réduire les démonstrations abstraites d'énoncés réels à des démonstrations réelles utilisant l'induction transfinies et que plus cette induction transfinie est longue, plus l'étape de base est réelle.

3°) Signification de la démonstration de Gentzen

Le 2°) rattache davantage les démonstrations de cohérence au reste des mathématiques qu'il n'éclaire vraiment leur structure interne. Je voudrais terminer cet exposé en montrant que ce qui fait peut-être l'intérêt essentiel des démonstrations de cohérence non triviales, c'est qu'elles nous font découvrir un aspect totalement inattendu du sytème formel que l'on étudie, ou d'opérations que l'on croit bien connaître. Le théorème suivant est un ramassis de lieux communs de théorie de la démonstration mais il exprime à mon avis beaucoup mieux que des résultats plus compliqués la méthode de Gentzen :

Théorème :

On peut prouver (dans les mathématiques réelles) l'équivalence entre

(i) Si X est un sous-ensemble de N^2 , alors la projection de X existe.

(ii) Si α est un ordre bien fondé, alors 2^α est un ordre bien fondé.

(iii) On peut réduire les degrés de coupure de 1 dans les démonstrations infinies à la Schütte,

auquel on pourrait ajouter

(iv) Le lemme de König est vrai, c'est-à-dire 2^N est compact.

Ce qui fait l'intérêt de ces équivalences entre des propriétés qui sont toutes (sauf (iii)) familières, c'est qu'elles sont démontrables dans un système très faible.

(iii) est très proche de la méthode de Gentzen mais ce qui est le plus intéressant c'est l'équivalence (i) $\longleftrightarrow$ (ii). En effet, on a d'un côté l'existence problématique de la projection d'un ensemble (cette définition contient un quantificateur existentiel) et de l'autre exponentielle ordinale. Ce qui fait le côté simple de (ii), c'est que 2^α est effectivement calculable, étant donné α, alors que la projection de X ne l'est pas.

Comme une projection = un quantificateur, on comprend que l'on puisse éliminer un quantificateur au prix d'une exponentielle et tous au prix de ω exponentielles, ce qui donne précisément ε_0.