

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

GÉROLD STAHL

Structure et connaissance scientifique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1980, fascicule 10
« Structure et connaissance scientifique », , p. 6-91

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1980__10_A1_0

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,
1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE I

STRUCTURE ET CONNAISSANCE SCIENTIFIQUE

1. INTRODUCTION

Le mot "structure" s'utilise dans plusieurs significations différentes, non seulement en Français mais aussi dans d'autres langues. Avec une signification spéciale il s'est transformé en terme de mode, qui apparaît en diverses doctrines réunies sous le nom "structuralisme". Ces doctrines philosophiques, ethnologiques, linguistiques, etc., outre qu'elles font référence à des structures, développent des sujets spécifiques qui quelquefois n'ont pas véritablement affaire aux structures. Notre analyse ne s'occupe pas de ces sujets spécifiques ni des détails des considérations proprement structuralistes dans ces disciplines. Elle essaiera, par contre, de donner une vision générale du type de structures qu'on utilise habituellement en mathématique et logique mathématique et d'étendre ensuite ces idées à la théorie de la connaissance scientifique en général.

Avec la position indiquée, il est douteux que ce travail puisse être qualifié de structuraliste. Cependant, en tenant compte du fait que beaucoup de structuralistes ont subi l'influence directe ou indirecte du terme "structure" dans la signification mathématique, ce qui suit intéresse, peut-être, les partisans et les adversaires du structuralisme.

2. QU'EST-CE QU'UNE STRUCTURE ?

Les structures, au sens où elles seront traitées ici, sont un type spécial de k-uplet, où par k-uplet on entend une suite de k membres, c'est-à-dire k membres mis en ligne, un en première place, un en deuxième place, etc., et finalement un en k-ième place. Fréquemment les k-uplets sont symbolisés de la façon suivante :

$$\langle \dots \rangle$$

en posant, au lieu des points suspensifs, les symboles des différents membres dans l'ordre établi. Ainsi le triplet dont le premier membre est d , le deuxième a et le troisième e est symbolisé par :

$$\langle d, a, e \rangle$$

Nous avons vu que les k-uplets ne sont pas tous des structures. Les structures ont une forme très spéciale. Comme premier membre on a une classe (une collection) avec au moins un élément. Cette classe est symbolisée par " V " et ses éléments s'appellent "individus" ; les individus dans l'étude présente sont des objets quelconques pas nécessairement réels, de façon que le premier membre des k-uplets est une collection d'objets réels ou imaginaires. Les autres membres d'une structure sont des sous-classes de V ou des relations entre les éléments de V .

Il faut mentionner qu'il y a des relations non seulement entre deux individus (ces relations s'appellent "relations binaires" ; par exemple : ... est le double de...) mais aussi entre trois individus

(les "relations ternaires" ; exemple : ... *est l'addition de... et de ...*), entre quatre individus, etc. Au lieu de parler de relations binaires, ternaires, etc., nous parlerons aussi de *fonctions propositionnelles* binaires, ternaires, etc.

Les sous-classes de V , par exemple : tous les éléments de V qui sont faits de plâtre (... *est fait de plâtre*), ou tous les éléments de V qui mesurent moins de 30 cm (... *mesure moins de 30 cm*), peuvent être traités comme des fonctions propositionnelles unaires ; car par analogie aux fonctions propositionnelles binaires qui ont deux places libres (représentées par *deux* trous avec des points suspensifs), les sous-classes ont *une* place libre (représentée par *un* trou avec des points suspensifs).

En considération de tout cela nous pouvons dire que dans le k -uplet après la classe V on a des fonctions propositionnelles qui font référence aux éléments de V et qui peuvent être unaires ou binaires, etc. Ces fonctions propositionnelles sont symbolisées ici par " F ", " G ", " H ", " K ", etc., de façon à ce que les structures soient symbolisées par :

$$\langle V, H, K, \dots \rangle$$

Dès maintenant nous pouvons voir déjà quelques caractéristiques du traitement structural en général. Pour commencer on ne considèrera pas des objets (individus) isolés. On ne travaille non plus purement avec des classes ou des totalités ; une classe V prise isolément, aussi pauvre ou riche qu'elle soit en individus, ne constitue pas une structure. Uniquement si V

apparaît ensemble avec une ou plusieurs fonctions propositionnelles, lesquelles de leur côté font référence exclusivement aux individus de V , alors nous pouvons parler d'une structure. Cette combinaison d'une classe avec des fonctions propositionnelles qui font référence aux individus de la classe, est un des points fondamentaux du traitement structural.

Afin de donner un exemple, considérons le triplet dont le premier membre V est la classe des nombres entiers (les positifs, 0 et les négatifs), F est la fonction propositionnelle ternaire ... *est l'addition de...* et G est la fonction propositionnelle binaire ... *est le double de...* On voit qu'on ne s'intéresse ici ni à des nombres entiers déterminés ni à la classe des nombres entiers, mais aux nombres entiers ensemble avec les fonctions propositionnelles de l'addition et du double, c'est-à-dire à toutes les connexions établies entre les nombres entiers grâce à ces deux fonctions.

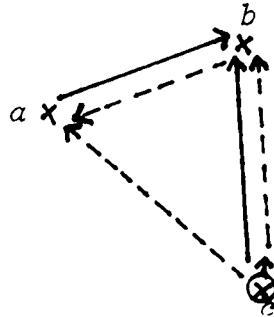
Dans tout traitement structural les fonctions des k -uplets s'appliquent uniquement aux individus de la classe V correspondante (dans l'exemple, aux nombres entiers). Si l'on veut travailler avec des fonctions propositionnelles plus étendues, qui de plus s'appliquent à d'autres individus, rien ne l'empêche. On forme simplement une nouvelle structure avec une nouvelle classe V plus étendue et avec des fonctions propositionnelles plus étendues qui s'appliquent maintenant exclusivement aux individus de la nouvelle classe V . En mathématique et en logique mathématique, les extensions de structures constituent un sujet très intéressant ; par exemple, on souhaiterait voir quelles caractéristiques de l'ancienne structure sont maintenues dans la nouvelle structure plus étendue.

Exercice 2. 1) Présenter quelques structures, en indiquant avec des indices si les fonctions propositionnelles sont unaires, binaires, etc. Exemple : $\langle ga, Mod_1, Pers_1, Voi_2, Ex_2 \rangle$, où ga est la classe des gares ferroviaires d'une région ; les Mod sont celles qui ont été modernisées selon un critère déterminé, les autres appartiennent automatiquement à $-Mod$; les $Pers$ sont celles destinées au transport des personnes ; Voi est la relation binaire de voisinage entre deux gares et Ex la relation binaire d'être connecté par trains express directs.

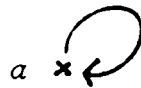
Exercice 2. 2) Fréquemment on a des structures avec une ou plusieurs relations d'ordre total (comme la relation *plus petit* entre nombres entiers) ou d'ordre partiel (comme la relation *est divisible par* entre nombres entiers positifs). Indiquer des structures avec relations de ce type. Exemple : $\langle el, Mas_1, Ag_2, Poi_2 \rangle$, où el est la classe des éléphants d'un jardin zoologique ; Mas sont ceux de sexe masculin ; Ag est la relation d'être plus âgé et Poi la relation d'avoir plus de poids.

Exercice 2. 3) Des structures avec un nombre restreint d'individus et fonctions propositionnelles (si ces dernières sont seulement unaires ou binaires) peuvent être représentées de la façon suivante : on symbolise les individus par de petites croix. Avec des signes ajoutés aux croix, on marque l'appartenance aux fonctions unaires et avec des flèches de divers types (flèche continue, flèche discontinue, etc.) entre les croix on indique les fonctions binaires. Représenter graphiquement une structure formée selon les exercices 1 ou 2. Afin de donner un exemple, supposons qu'il y ait trois éléphants ("a", "b", "c"), l'un d'eux est de sexe masculin et marqué par '♂'. La relation Ag est symbolisée par " $\longrightarrow$ " et Poi par " $---\rightarrow$ ".

On pourrait avoir alors (en supposant que a et c aient le même âge, mais non le même poids) :



Il peut arriver que l'individu a soit en relation F avec lui-même (un cas typique où on a toujours cela est la relation d'identité, de grande importance dans les structures mathématiques). Cette situation est représentée graphiquement par :



Il peut arriver que a soit en relation F avec b et vice versa (un cas qu'on a toujours avec les relations *Voï* et *Ex*). Représentation graphique :



Exercice 2. 4) Afin de former des structures avec des individus de deux types différents, comme personnes et objets physiques ou nombres entiers et ensembles de nombres entiers on choisit comme classe V celle qui contient les individus des deux espèces et on introduit ensuite une fonction unaire pour faire la distinction entre les individus. Exemples : $\langle p_{ob}, Pers_1, \dots \rangle$, où

*po*b contient les personnes et objets physiques, les *Pers* sont ceux des individus qui sont des personnes (les objets physiques seraient dans ce cas automatiquement -*Pers*) ; $\langle ene, En_1 \dots \rangle$, où *ene* contient les nombres entiers et les ensembles de nombres entiers, les *En* sont ceux des individus qui sont des nombres entiers (les ensembles de nombres entiers seraient automatiquement -*En*). On procède d'une façon analogue quand il y a des individus de trois espèces ou plus. Indiquer quelques structures de ce type.

Exercice 2. 5) Fréquemment on a des structures dont une sous-classe de *V* contient un seul individu. Indiquer une structure de ce type. Exemple : $\langle enp, Pet_1, \dots \rangle$, où *enp* est la classe des nombres entiers positifs et *Pet* est formé par ceux qui sont plus ou également petits que tous (il y a un seul qui est 1).

3. LES SYSTÈMES

Afin d'approfondir l'analyse des structures il faut parler un peu des expressions et des classes d'expressions, parce que certaines classes d'expressions sont étroitement liées aux structures.

Pour les logiciens mathématiques les expressions ne sont que des suites de signes typographiques¹, par exemple, l'expression "il fait chaud" est la lettre "i" suivie par "l", suivie par l'espace blanc, suivie par "f", suivie par "a", etc. Un exemple mathématique serait "x + y = y + x".

¹ Ici nous nous limitons aux suites *finies* de signes typographiques.

On peut former des classes d'expressions et quelques-unes de ces classes qui satisfont des conditions spéciales s'appellent "systèmes". Les expressions qui sont des éléments d'un système donné s'appellent "théorèmes" du système analysé. Le procédé habituel pour former un système est, en lignes générales, le suivant : pour commencer on écarte toutes les expressions qu'on ne considère pas comme significatives pour le système qu'on veut construire. En logique mathématique on fait cela moyennant des règles d'une manière aussi rigoureuse qu'aucune expression discutable n'est laissée de reste, c'est-à-dire il n'y a aucune expression de laquelle on ne peut pas déterminer d'une façon routinière si elle est ou n'est pas significative. Parmi les expressions significatives respectives qui restent, il y a, dans les cas normaux, quelques-unes qui sont des théorèmes du système et d'autres qui ne le sont pas. Afin de déterminer les théorèmes, on indique quelques expressions significatives qui s'appellent "théorèmes élémentaires" ou "axiomes" du système. En plus, par certaines règles indiquées explicitement on établit un mécanisme appelé "procédé démonstratif" qui permet d'introduire un par un de nouveaux théorèmes. La classe de tous les théorèmes respectifs, les élémentaires et ceux qui ont été introduits par démonstration constituent alors le système analysé.

Bien que seulement certains systèmes aient un intérêt pratique, en principe toute classe d'expressions, formée selon les critères indiqués, mais pour le reste avec un arbitraire total, est un système.

Actuellement on utilise un grand nombre de systèmes, spécialement en mathématique, mais aussi pour certaines parties de la physique, de la biologie et de

l'économie. Entre les systèmes qui traitent des secteurs de la mathématique il y en a plusieurs qui font référence aux ensembles, d'autres aux nombres naturels, aux nombres réels, etc. Il y a des systèmes géométriques, par exemple, de la géométrie euclidienne, et beaucoup d'autres systèmes. Habituellement tous ces systèmes sont construits de telle façon qu'ils ont une base logique commune. Cette base logique constitue de son côté un système qui s'appelle "système fonctionnel élémentaire" ou "système fonctionnel de premier ordre" avec des théorèmes comme "Si tous les individus x satisfont une condition (exprimée par l'expression "A"), alors au moins un x satisfait la condition".

Dans les expressions des systèmes mentionnés apparaissent certains signes ou suites de signes qu'on appelle "symboles". Les *symboles individuels* qui symbolisent des individus déterminés (qui font référence à des individus déterminés) et les *symboles fonctionnels* (qui symbolisent des fonctions propositionnelles déterminées) présentent un intérêt spécial pour ce qui suit.

4. MODÈLES ET SYSTÈMES APPROPRIÉS

En prenant comme point de départ les sections antérieures, on peut indiquer maintenant une connexion fondamentale entre les systèmes et les structures. Pour faire cela, il est utile de procéder en deux étapes.

Première étape : Ayons, d'un côté, un système S . Soit C la classe de tous les symboles individuels qui apparaissent dans les expressions de S . Supposons, en plus, que dans les expressions de S apparaissent seulement (avec beaucoup de répétitions) deux symboles fonctionnels, un de fonction propositionnelle unaire et un de fonction

propositionnelle ternaire. Ayons, de l'autre côté, un structure E , par exemple $\langle V, F, G \rangle$ avec F unaire et G ternaire. Maintenant faisons correspondre à chaque symbole individuel de C un individu de V , au symbole fonctionnel unaire la fonction F et au symbole fonctionnel ternaire la fonction G . Cette correspondance pourrait être considérée comme un type de symbolisation ou de dénotation, de façon à ce que les symboles individuels de C symboliseraient certains individus de V et que les symboles fonctionnels symboliseraient les fonctions F et G .

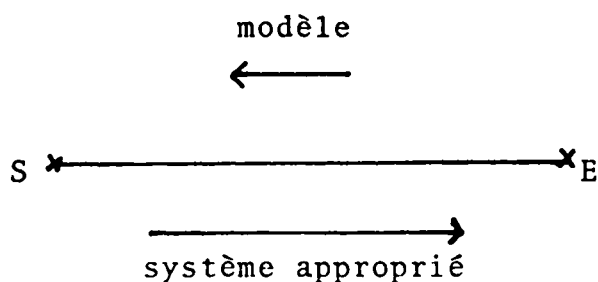
En résumant, nous avons d'un côté un système, quelque chose qu'on peut considérer comme linguistique, et de l'autre côté, une structure, quelque chose qui normalement n'a rien de linguistique. Nous avons, d'un côté, des symboles individuels et fonctionnels, et de l'autre côté, des individus et des fonctions. Finalement nous sommes arrivés à établir un type de relation de symbolisation entre les symboles, d'un côté, et les individus et fonctions propositionnelles, de l'autre côté.

La relation de symbolisation peut être établie seulement si la structure E est suffisamment riche ; c'est-à-dire, si dans le système S il y a des symboles fonctionnels n -aires, il doit y avoir dans la structure E au moins une fonction propositionnelle n -aire. Cette exigence est assez raisonnable, parce que d'une autre façon, le symbole fonctionnel, à quelle fonction de E fait-il référence ? Par contre, on n'exige pas que différents symboles individuels ou fonctionnels symbolisent toujours des individus ou fonctions différents ; il est parfaitement admissible que, par exemple "IV" et "4" symbolisent le même individu, et de façon analogue pour les fonctions

propositionnelles. Quoique ainsi deux ou plusieurs symboles puissent symboliser la même chose, néanmoins un symbole du système analysé symbolise un seul individu ou une seule fonction d'une structure, de façon que (par rapport à un système et à une structure donnés) il n'y ait pas d'ambiguïté possible.

Deuxième étape : Dans ce qui suit on traitera seulement la connexion entre systèmes et structures s'il est possible d'établir une relation de symbolisation du type indiqué dans la première étape. Il pourrait arriver alors que ce qui est affirmé par un théorème de S se présente dans la structure E. Par exemple, on pourrait avoir dans S le théorème " $5 > 3$ ", et il pourrait arriver que dans la structure E, 5 est plus grand que 3 (c'est-à-dire, qu'on ait la relation binaire *plus grand* entre 5 et 3). Il pourrait même arriver que ce qui est affirmé par *tous* les théorèmes de S se présente dans la structure E. Alors nous dirons que la structure E est un *modèle* de S ou, inversement, que S est un *système approprié* de E.

Une représentation graphique de cette connexion est :



Une structure est scientifiquement intéressante seulement si le savant dispose d'un système approprié pour la structure ou est en train d'en construire un. S'il

a un système approprié, alors automatiquement ce que dit un théorème se présente dans la structure ; connaître des théorèmes signifie être capable d'indiquer des connexions entre les éléments de la structure.

Pour démontrer concrètement qu'un système est approprié il suffit de démontrer que ce qui est affirmé par les axiomes se présente dans la structure. Avec cela, ce qui est affirmé par les autres théorèmes du système se présente aussi dans la structure, toujours quand il s'agit des systèmes ici analysés qui ont le système fonctionnel élémentaire comme base. Ainsi la démonstration qu'un système est approprié est plus facile qu'il ne paraît à première vue.

Ce qui est affirmé par quelques théorèmes se présente dans toutes les structures. Il s'agit des théorèmes qui appartiennent à la base logique commune, c'est-à-dire au système fonctionnel élémentaire. Ce système est donc approprié à toutes les structures ou, inversement, toutes les structures sont des modèles du système fonctionnel élémentaire.

Exercice 4. 1) Afin d'illustrer la relation de symbolisation on pourrait coller de petits objets dans une feuille de papier et écrire une ou plusieurs lettres latines minuscules à côté de chacun, mais de telle façon qu'aucune lettre ne soit à côté de deux objets ou plus. Malheureusement ce procédé n'est pas applicable à tous les individus, soit à cause de leur taille (éléphant), soit à cause de leur caractère abstrait (le numéro 7), etc. Il est encore moins applicable aux fonctions propositionnelles. Ainsi, en général, on procède d'une manière abstraite, exemple : le chiffre "0" symbolise le numéro 0,

le chiffre "1" symbolise le numéro 1, ..., l'expression "Pair" symbolise la classe des nombres pairs, le signe " $<$ " symbolise la relation *plus petit*, etc. Faire une liste de symboles individuels et fonctionnels et indiquer (en mots) ce qu'ils symbolisent.

Exercice 4. 2) Indiquer en français quelques théorèmes généraux dont ce qui est affirmé par eux se présente dans toutes les structures. Exemples : "Quelques individus satisfont la condition A, ou ce n'est pas le cas que quelques individus satisfont A", "Si tous les individus qui satisfont la condition A satisfont B et tous ceux qui satisfont B satisfont C, alors tous les individus qui satisfont A satisfont C".

Exercice 4. 3) Indiquer en français quelques théorèmes spécifiques dont ce qui est affirmé par eux se présente dans une des structures indiquées dans les exercices de la section 2. Exemples possibles : "Toutes les gares destinées au transport des personnes sont modernisées", "Quelques gares ne sont pas voisines de toutes les gares", "Quelques éléphants ne sont pas en relation A_g avec quelques éléphants".

5. COMPLÉTUDE ET ISOMORPHIE

On peut démontrer que, étant donné une structure, il existe toujours un nombre infini de systèmes appropriés à elle. C'est la tâche du savant, spécialement du mathématicien, d'en trouver un et de préférence un qui donne beaucoup d'information, parce que (selon la définition indiquée) il y a des systèmes appropriés constitués uniquement par des théorèmes qui ne donnent pas d'information spécifique sur la structure (exemple, le système fonctionnel

élémentaire). L'idéal serait un système approprié qui donne le maximum d'information, c'est-à-dire, pour chaque connexion, simple ou complexe, qui se présente dans la structure, il y a un théorème du système qui exprime la connexion. Il existe une définition formelle de "système qui donne le maximum d'information" ; le système qui fait cela s'appelle "système complet par rapport à la validité".

Pour certaines structures il y a des systèmes complets, pour d'autres il y a des systèmes appropriés de plus en plus informatifs, mais il n'y en a aucun qui donne le maximum d'information, parce qu'on peut démontrer qu'il y en a toujours d'autres avec encore plus d'information.

De même que pour chaque structure il y a un nombre infini de systèmes appropriés, ainsi, inversement, pour chaque système du type ici traité *qui est libre de contradiction* il y a un nombre infini de structures qui sont ses modèles.

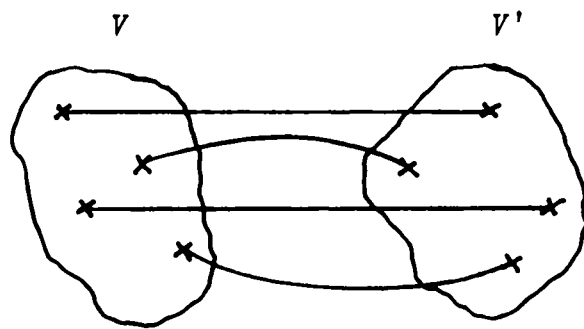
Il peut arriver que beaucoup de ces structures aient une certaine ressemblance spéciale entre elles, ressemblance qui en mathématique s'appelle "isomorphie". Afin d'éclaircir un peu cette ressemblance considérons deux structures E et E', plus explicitement :

$$\langle V, F, G \rangle$$

et :

$$\langle V', F', G' \rangle$$

Supposons qu'on puisse établir une correspondance biunivoque entre V et V', c'est-à-dire qu'à chaque élément de V on puisse assigner exactement un élément de V' et vice versa.



Si a, b, c , etc. sont des éléments de V , alors symbolisons par " a' ", " b' ", " c' ", etc., les éléments correspondants de V' . Supposons que toujours quand F se présente entre a et b alors F' se présente entre a' et b' et de façon analogue par rapport à G et G' et qu'on ait la même situation pour tous les éléments de V en général et leurs éléments correspondants de V' . Dans ce cas nous dirons que E et E' sont isomorphes.

En utilisant des mots simples, nous dirons que isomorphie signifie qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les classes V de telle façon à ce que les éléments correspondants satisfassent toujours les fonctions propositionnelles correspondantes.

L'isomorphie est fondamentale pour la mathématique actuelle et en général pour le traitement structural. En analysant un secteur on détermine une de ses structures et on utilise ensuite les résultats obtenus par rapport à cette structure non seulement dans le secteur même mais dans tous les secteurs, peut-être très éloignés, où il y a des structures isomorphes à la première. Dans l'utilisation de l'isomorphie, le caractère spécifique des éléments de V et des fonctions propositionnelles est sans importance ; la seule chose importante est que ces éléments soient relationnés de la même façon.

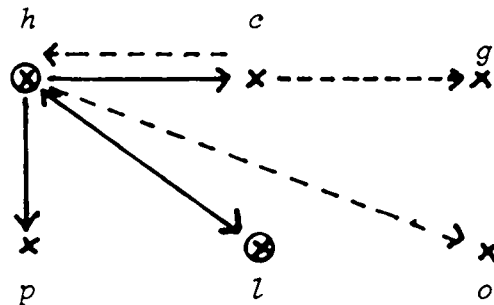
Selon la définition indiquée chaque structure est isomorphe à elle-même, et si E est isomorphe à E' alors E' est aussi isomorphe à E . De plus, si E est isomorphe à E' et E' à E'' , alors E est isomorphe à E'' . Si E est un modèle du système S et E' est isomorphe à E , alors E' est aussi un modèle de S (on change de manière correspondante la relation de symbolisation ; par exemple, ce qui auparavant était symbole de F est maintenant symbole de F').

Quelquefois on ne fait pas de distinction entre des structures isomorphes, on les traite comme si elles étaient une seule structure ; mais selon la terminologie de ce texte, E et E' , quoique isomorphes, sont différentes, à moins que la classe V et les fonctions propositionnelles de E soient identiques à celles de E' .

Exercice 5. 1) Indiquer une suite S, S', S'' , etc., de systèmes appropriés à une structure, où S' est plus informatif que S , S'' plus informatif que S' etc. Exemple par rapport à la structure $\langle el, Mas_1, Ag_2, Poi_2 \rangle$ de l'exercice 2.2 : S est la classe des théorèmes du système fonctionnel élémentaire avec Mas_1, Ag_2 et Poi_2 ; S' a en plus "Quelques éléphants sont masculins" et tout ce qu'on peut déduire à partir de cet axiome ; S'' a, à part les théorèmes de S' , l'axiome "Quelques éléphants ne sont pas masculins" et tout ce qu'on peut déduire à partir de cette expression, etc.

Exercice 5. 2) Indiquer une structure où les individus sont les personnages principaux d'un drame ou d'un roman ; comme minimum la structure devrait avoir une fonction unaire et deux binaires. Exemple : $\langle ham, Veng_1, Tu_2, Res_2 \rangle$ où ham est la classe des personnages principaux

de HAMLET, c'est-à-dire, Hamlet (h), le roi Claude (c), la reine Gertrude (g), Polonius (p), Laërte (l) et Ophélie (o) ; *Veng* est la classe de ceux qui projettent une vengeance, *Tu* est la relation de tuer (physiquement) et *Res* est la relation d'être indirectement responsable de la mort. La représentation graphique serait :



Les cercles indiquent ceux qui projettent une vengeance.

Exercice 5. 3) Décrire une situation qui constitue une structure isomorphe à celle de l'exercice 5. 2, mais concernant une matière très différente. Il faut démontrer point par point que les deux structures sont isomorphes. Exemple : Dans une chambre il y a deux lampes allumées (h' et l') qui s'éclairent mutuellement. De plus, la première lampe (h') éclaire une chaise (p') et une table (c'). Sur la table on a mis la lampe h' et dans un de ses tiroirs le livre (g'). Dans le tube de la lampe on a mis un ressort (o') qui permet de monter et descendre la lampe. Nous avons ainsi la structure $\langle cha, Lam_1, Ec_2, Mis_2 \rangle$, dont les individus sont les objets de la chambre, c'est-à-dire h' , c' , g' , p' , l' , o' , *Lam* est la classe des lampes, *Ec* la relation *éclaire* et *Mis* la relation *être mis au-dessus ou à l'intérieur*. En utilisant les lettres de l'exercice 5.2 avec des primes (" h' ", etc.) on voit qu'il y a une correspondance biunivoque entre *ham* et *cha* ($h - h'$, $c - c'$, etc.). Tandis que h et l appartenaient à la classe *Veng*,

maintenant h' et l' appartiennent à la classe Lam . Là où il y avait la relation Tu (" $\rightarrow$ ") on a maintenant la relation Ec et où il y avait la relation Res (" $\rightarrow$ ") on a maintenant la relation Mis . La représentation graphique est la même que celle de l'exercice 5.é, il faut seulement changer les lettres simples (" h ", etc.) par les lettres correspondantes avec une prime (" h' ", etc.).

6. CLASSES DE STRUCTURES

Dans la section 5 on a vu que pour chaque système libre de contradiction il y a un nombre infini de structures qui sont ses modèles. Beaucoup de ces structures peuvent être isomorphes entre elles, mais les systèmes habituels ont aussi, comme modèles, des structures qui ne sont pas isomorphes entre elles.

La classification la plus utilisée des structures est réalisée justement en faisant référence aux systèmes dont elles sont des modèles. Concrètement, à une classe appartiennent toutes les structures qui sont des modèles du système S_1 , à une autre, toutes les structures qui sont des modèles de S_2 , et ainsi successivement.

Pour commencer, la classification mentionnée produit des classes beaucoup plus étendues qu'une classification par isomorphie. Mais elle n'est pas exclusive. Par exemple, une structure E peut être un modèle non seulement du système S_1 , mais aussi du système S_2 et peut-être du système S_3 et encore d'autres systèmes (on a vu que toute structure est modèle du système fonctionnel élémentaire). Malgré le manque d'exclusivité, on préfère, dans le traitement structural à l'intérieur et à l'extérieur de la mathématique, la classification par rapport aux systèmes à toute autre classification possible.

Ainsi en mathématique nous avons la classe des structures qui sont des modèles de systèmes comme celui de groupes, celui des anneaux, celui des algèbres de Boole etc. Les structures qui sont des modèles du système de groupes (qui appartiennent à la classe correspondante de structures) s'appellent simplement "groupes" ; celles qui sont des modèles du système des anneaux s'appellent "anneaux" ; celles qui sont des modèles du système des algèbres de Boole s'appellent "algèbres de Boole", etc. Nous avons de cette façon une longue liste de structures mathématiques avec des noms spéciaux² et rien ne nous empêche d'étendre ce type de classification à d'autres matières.

Afin de donner un exemple mathématique, soit V la classe des nombres entiers, F la fonction propositionnelle binaire d'égalité et G la fonction propositionnelle ternaire d'addition ; dans ce cas $\langle V, F, G \rangle$ est (parmi d'autres choses) un groupe, parce que ce qui est affirmé par les axiomes (et les autres théorèmes) du système des groupes se présente dans cette structure. Il y a un nombre infini d'autres groupes, quelques-uns de ceux-ci sont isomorphes à $\langle V, F, G \rangle$, d'autres ne le sont pas.

7. STRUCTURE ET RÉALITÉ

Jusqu'ici on a établi une corrélation entre quelque chose de non linguistique, les structures, et quelque chose de linguistique, les systèmes. Cependant il y a une exception ; ce sont les structures dans lesquelles la classe V de son côté est formée entièrement ou partiellement par des expressions, de façon que déjà la structure

² Dans cette section et dans les sections antérieures on a vu que la science mathématique s'occupe des *divers* systèmes et de *diverses* structures. Cette conception moderne n'a rien d'extraordinaire si on la compare, par exemple, avec la zoologie qui s'occupe de divers animaux.

même a des traits linguistiques. Dans ce cas on attribue un caractère spécial aux systèmes appropriés ; on dit, en terminologie de la logique mathématique, qu'ils sont formulés en "langue de deuxième niveau", ou en "métalangue", de façon que les structures (partiellement) linguistiques seraient en corrélation avec des systèmes métalinguistiques.

En revenant aux structures non linguistiques (les autres indiquées précédemment n'en sont pas fondamentalement différentes), on peut se demander si, ou jusqu'à quel point, elles constituent la réalité. Sont-elles, au moins en partie, le monde objectif ?

La réponse est plutôt négative, mais tout le sujet est assez complexe. Pour commencer il faut envisager les structures comme des constructions mentales élaborées par des savants, comme des produits de l'activité humaine de rationalisation, qui reflètent peut-être plus ou moins fidèlement certains aspects de la réalité. On ne peut pas prétendre plus. On ne sait même pas si la réalité possède un caractère structural. De plus il y a des structures différentes qui correspondent à un système ou à des systèmes également bien appuyés sur l'expérience. Dans ce cas il est possible que la réalité exclut toutes les structures à l'exception d'une. Cependant, il est aussi possible que diverses structures reflètent également bien certains aspects de la réalité ; car il faut tenir compte du fait que tout travail scientifique constitue une simplification et que, dans cette simplification, une structure peut refléter, jusqu'à un certain point, les aspects A et une autre les aspects B de la réalité.

Bien que nous ne puissions pas affirmer qu'une structure soit la réalité ou une partie de la

réalité ou une copie fidèle de la réalité, cela ne signifie pas que les structures soient totalement détachées de la réalité. Si les systèmes appropriés correspondants s'appuient directement ou indirectement sur l'expérience, alors les structures modèlent ou simulent l'expérience déjà obtenue et éventuellement aussi des expériences futures, au moins avec une certaine approximation. De cette façon la raison et l'expérience ensemble nous guident dans la présélection des structures, nous aident dans leur construction par des étapes et nous font écarter certaines structures en faveur d'autres.

Mais tout cela ne constitue pas une justification suffisante pour parler de structures naturelles (indépendantes des hommes théorisants) qui se trouvent dans les choses. D'autre part, la question concernant l'existence d'une tendance mentale spéciale à former des structures ou à préférer certaines structures à d'autres intéresse la psychologie et ne sera pas traitée ici.

Exercice 7. 1) Indiquer une structure purement linguistique où *ex* est une classe déterminée d'expressions et où l'on considère des relations comme *être une expression plus longue* (avec plus de signes) et *être synonyme*.

Exercice 7. 2) Indiquer (en métalangue) quelques théorèmes de la structure de l'exercice 7.1.

8. ANALYSE STRUCTURALE D'OBJETS ET ENTITES SIMPLES

Il est intéressant d'appliquer les considérations structurales non seulement à des sujets relativement étendus mais aussi à des objets qui se présentent comme quelque chose de simple aux sens, tels une pierre, une

pomme, une mélodie ou à des entités pas très complexes, comme une famille.

Dans quelques cas spécialement simples, même une analyse ensembliste est suffisante, tandis qu'en d'autres une analyse structurale est plus avantageuse. Par exemple, pour une collection donnée de timbres, il peut être suffisant de considérer quels sont les timbres-poste qui appartiennent à la collection et quels sont ceux qui n'y appartiennent pas. Peut-être on ne s'intéresse pas à l'ordre dans lequel les timbres-poste sont placés dans l'album, ni quel timbre est une variante de quel autre, quel timbre a plus de valeur que quel autre, etc. Dans ce cas, une analyse ensembliste suffit ; la collection est traitée simplement comme la classe ou l'ensemble des timbres-poste. Si, au contraire, on souhaite tenir compte des relations mentionnées ou d'autres similaires, il faudrait considérer une structure comme $\langle tim, Ant_2, Var_2, \dots \rangle$, où *tim* (c'est-à-dire *V*) serait la classe des timbres, *Ant* la relation binaire *apparaître antérieurement dans l'album*, *Var* la relation binaire *être une variante de*, etc.

Dans beaucoup d'autres cas, l'analyse ensembliste est de prime abord insuffisante ; il ne suffit pas de traiter un mur comme une classe de briques, une pierre comme une classe de molécules, une pomme comme une classe de cellules, une mélodie comme une classe de sons. Dans tous ces cas on doit considérer un nombre déterminé de fonctions propositionnelles, outre la classe qu'on choisit pour former la base de la structure respective.

Ici pour un mur déterminé fait seulement de briques, sans mortier, nous aurions quelque chose comme

$\langle bri, Tous_2, Toug_2, \dots \rangle$, où *bri* serait la classe correspondante des briques, *Tous* la relation binaire *toucher dans le plan supérieur*, *Toug*, *toucher dans le plan gauche*, aussi avec des relations comme *toucher dans une ligne*, *toucher dans un point* et peut-être encore d'autres. En appliquant le même traitement à tout ce que, en principe, on veut considérer comme mur de briques, on peut former en général les structures correspondantes. Il n'est pas difficile de construire un système appelé peut-être "théorie des murs de briques" qui indique, dans des axiomes et théorèmes démontrés, les caractéristiques communes de toutes ces structures en un sens très large (en incluant, par exemple, les structures isomorphes). Les modèles du système seraient, alors, les murs de briques (traités comme des structures) et les structures isomorphes aux murs de briques, tout cela en pleine analogie aux groupes, anneaux et algèbres de Boole.

Des considérations similaires, bien que plus complexes, s'appliquent aux pierres, aux pommes, etc. ; on construit des systèmes correspondants et on considère ensuite les modèles de ces systèmes.

Une mélodie jouée (c'est-à-dire interprétée tel jour à telle heure) pourrait être traitée, dans une analyse très primitive, comme $\langle son, Ant_2, \dots \rangle$, où *son* serait la classe des sons respectifs (qui de leur côté sont complexes et incluent aussi le manque de son, c'est-à-dire le silence), *Ant* la relation d'antériorité et quelques autres relations, selon le degré dans lequel on veut approfondir l'analyse. Un musicologue procéderait probablement d'une façon différente ; d'une part, il ne partirait pas de *son* mais d'une classe de sons élémentaires dans un sens ; d'autre part il n'analyserait pas les mélodies

jouées mais les mélodies d'un type général qui sont communes à des interprétations diverses. Ces détails, bien que très intéressants en soi, ne sont pas essentiels pour un traitement général des structures. En tout cas, on se met, ensuite, à la construction des systèmes correspondants, ce qui permet, postérieurement, d'analyser les modèles de ces systèmes.

Une famille aussi ou un régiment sont plus qu'une classe de personnes, de même qu'une forêt est plus qu'une classe d'arbres. Pour une famille déterminée au sens biologique (sans considérer les aspects légaux) nous avons quelque chose comme $\langle pers, Mas_1, Pem_2, Cop_2, Cod_2, \dots \rangle$ où *pers* est la classe des personnes qui constituent la famille, *Mas* la fonction unaire *être du sexe masculin*, *Pem* la relation binaire *être père ou mère de*, *Cop* la relation binaire *être le premier conjoint* (dans l'ordre temporel) *de*, *Cod* la relation binaire *être le deuxième conjoint de*. D'une façon analogue un régiment déterminé peut être traité comme $\langle pers, Sa_2, Li_2, \dots \rangle$, où *pers* est la classe de personnes qui constituent le régiment, *Sa*, la relation binaire *être sergent de*, *Li* la relation binaire *être le lieutenant de*. Sans difficulté on forme les systèmes correspondants qui ont comme modèles les familles (les régiment et les structures isomorphes aux familles (régiments)).

Dans le cas des forêts un traitement simplifié pourrait se limiter aux arbres et aux relations entre eux. Naturellement rien ne nous empêche d'approfondir l'analyse en incluant, dans la classe *V*, les autres plantes de la forêt, les animaux et d'autres objets qui, selon l'opinion de celui qui fait l'analyse, ont de l'importance. Une fois prises les décisions préalables par rapport à *V* et les fonctions propositionnelles, on forme les structures et le système correspondant.

Ce qui a été indiqué ici par rapport aux objets et entités simples (et encore d'une façon très simplifiée) peut être étendu aussi aux cas plus complexes, comme les états psychiques, les langues, les économies et les sociétés. Mais alors le degré de difficulté augmente énormément, à moins qu'on ne se limite à tenir compte seulement d'un nombre réduit de fonctions propositionnelles.

9. PARTIE ET ENTIER

La relation *partie - entier* est un problème intéressant de la logique. On l'a analysé à fond dans quelques cas spéciaux comme celui de *sous-classe - classe* et de *sous-structure - structure*, tandis que, à ma connaissance la relation entre ce qu'on appellera ici "structure partielle" et la structure entière n'a pas été traitée d'une façon spéciale (voir, par exemple, [29] et [16] dans la bibliographie).

Supposons que nous ayons un triplet $\langle V, F, G \rangle$ qui est un groupe, c'est-à-dire une structure qui satisfait aux conditions indiquées dans les axiomes du système des groupes. Formons, en plus, un triplet $\langle V', F', G' \rangle$, où V' est une sous-classe (non vide) de V et F' et G' sont les restrictions de F et G à V' (c'est-à-dire F et G sont appliqués seulement aux éléments de V'). Supposons que $\langle V', F', G' \rangle$ soit aussi un groupe. Dans ce cas on dira que $\langle V', F', G' \rangle$ est un *sous-groupe* de $\langle V, F, G \rangle$. Par exemple, les nombres entiers (les positifs, 0 et les négatifs) forment, par rapport à l'égalité et à l'addition, un groupe $\langle \text{ent}, \text{Eg}_2, \text{Ad}_3 \rangle$. La même chose vaut pour les nombres pairs (les positifs, 0 et les négatifs) par rapport à l'égalité et à l'addition restreintes aux nombres pairs. Ainsi $\langle \text{pair}, \text{Eg}'_2, \text{Ad}'_3 \rangle$ est un sous-groupe de $\langle \text{ent}, \text{Eg}_2, \text{Ad}_3 \rangle$.

On peut appliquer exactement les mêmes considérations à une structure quelconque, de façon qu'on puisse parler de sous-murs de briques, de sous-pierres, de sous-pommes, de sous-mélodies, etc.

On exige que V' soit une sous-classe de V , en d'autres termes, que tous les éléments de V' soient des éléments de V . Il est possible qu'aussi tous les éléments de V soient des éléments de V' (dans ce cas on dit que V' est une *sous-classe impropre* de V), ou qu'il y a dans V des éléments qui n'apparaissent pas dans V' (dans ce cas on dit que V' est une *sous-classe propre* de V). En appliquant la définition de "sous-structure" aux sous-classes *impropres*, on voit que chaque groupe est un sous-groupe de lui-même, chaque pierre une sous-pierre d'elle-même.

Cependant, ces cas triviaux où V' est une sous-classe impropre de V intéressent moins que les cas où V' est une sous-classe propre de V (ainsi, dans l'exemple, *pair* est une sous-classe propre de *ent*).

On peut voir sans grande difficulté que beaucoup de groupes ont des sous-groupes propres. Etant donné un mur de briques d'une certaine extension, on peut trouver un sous-mur propre, c'est-à-dire une sous-classe propre de *bri* dont les éléments satisfont, par rapport aux relations de *Tous'*, *Toug'*, etc, les conditions caractéristiques des murs de briques. On a un résultat analogue aussi par rapport aux pierres d'une certaine étendue. Par contre, la seule sous-pomme d'une pomme donnée est cette pomme même, parce qu'il n'y a pas une sous-classe propre des cellules de façon que les éléments de cette sous-classe satisfont, par rapport aux fonctions propositionnelles correspondantes, les conditions caractéristiques

des pommes (au moins dans le cas idéal des pommes auxquelles il ne manque rien).

Pour les mélodies pas trop courtes il y a des sous-mélodies propres, et on arrive au même résultat pour les familles plus ou moins nombreuses. Il y a aussi des sous-régiments propres (par exemple un régiment après des combats par rapport au régiment avant les combats) et on a, de la même façon, des sous-forêts propres.

On dispose, ainsi, d'un type de relation *partie-entier* qui a été l'objet de recherches détaillées, au moins dans le cas des algèbres traditionnelles, comme les groupes, les anneaux et les algèbres de Boole. On a vu que l'extension de ce traitement aux murs, aux pierres et à d'autres objets ne présente pas de difficultés en principe.

Cependant, il y a des cas où la relation *partie-entier* n'est pas comprise dans le traitement des sous-structures. Ainsi un quart de pomme n'est pas une pomme, ou une tranche de pain n'est pas un pain. Dans tous ces cas il ne s'agit pas de sous-structures, parce que les cellules d'un quart de pomme ou les molécules d'une tranche de pain ne satisfont pas, par rapport aux fonctions propositionnelles correspondantes, les conditions caractéristiques des pommes ou des pains, respectivement.

Par contre, les cellules du quart de pomme satisfont *quelques* conditions caractéristiques des pommes. En d'autres mots, quoique $\langle cel', F', G', \dots \rangle$ ne soit pas une sous-pomme de $\langle cel, F, G, \dots \rangle$, les éléments de cel' satisfont, par rapport à $F', G', \text{etc.}$, au moins quelques-unes des conditions indiquées dans les axiomes et dans les

autres théorèmes du système qu'on pourrait appeler "théorie de pommes". Il faudrait indiquer quelles sont les conditions qu'on veut conserver et quelles sont les conditions additionnelles dont on exigera qu'elles soient satisfaites par les *parties de pommes*. Une fois qu'on a fait cela, on construit sans difficulté un système appelé peut-être "théorie des parties de pommes". Un de ses modèles serait alors $\langle cel', F', G', \dots \rangle$; si, de plus, cel' est une sous-classe de cel et si F', G' , etc. sont les restrictions de F, G , par rapport aux conditions conservées, alors $\langle cel', F', G', \dots \rangle$ pourrait être considérée comme une partie de $\langle cel, F, G, \dots \rangle$.

La relation *partie de pomme - pomme* serait alors un nouveau type de relation *partie-entier*. Exactement le même traitement peut s'appliquer à la relation *tranche de pain - pain* et à beaucoup d'autres cas. Le nouveau type de parties pourrait être appelé "structures partielles" (par rapport aux structures originales).

Il y a beaucoup de différences entre les sous-structures d'une part, et les structures partielles d'autre part. Ainsi, pour toute structure il est établi en principe quelles sont ses sous-structures (structures et sous-structures respectives sont de la même classe). Par contre, dans chaque cas il faut établir de nouveau quelles sont les structures partielles d'une classe donnée de structures; par exemple, on doit prescrire ce qui est une structure partielle par rapport aux pommes, ce qui est une structure partielle par rapport aux pains, etc.

Auparavant on a vu que chaque structure est sous-structure de soi-même. Par contre, une structure n'est pas structure partielle de soi-même (au moins elle

ne l'est pas si pour les structures partielles respectives on formule des conditions additionnelles qui ne sont pas satisfaites dans les structures originales).

Une question intéressante fait référence à la partie de la partie. Est-elle de son côté partie de l'entier ? Par rapport aux sous-structures nous avons (d'après la définition de "sous-structure") le résultat qu'une sous-structure d'une sous-structure est aussi directement sous-structure de la structure.

Ici non plus nous n'avons pas le même résultat pour les structures partielles. Supposons qu'une mie de pain soit structure partielle d'une tranche de pain (supposons qu'elle satisfasse les conditions caractéristiques des *parties de tranches de pain*, qu'on ait la relation de sous-classe entre les V respectives et qu'il s'agisse des restrictions des fonctions propositionnelles). Supposons, de plus, que la tranche de pain soit, de son côté, structure partielle d'un pain entier (en satisfaisant les conditions caractéristiques des *parties de pains* avec la relation de sous-classe et les restrictions). Cela ne signifie pas que la mie soit nécessairement structure partielle du pain entier, puisqu'elle ne satisfait pas automatiquement les conditions caractéristiques des *parties de pains*. Il dépend du système des parties de pains choisi si, en plus des tranches, aussi les mies soient considérées comme parties de pains. Quoique ainsi, en résumé, E_1 (la mie) soit structure partielle de E_2 (de la tranche) et E_2 soit structure partielle de E_3 (du pain entier), ce n'est pas pour cela que E_1 est automatiquement structure partielle de E_3 .

Les analyses indiquées présentent quelques données élémentaires sur deux relations bien différenciées, celle de la sous-structure et celle de la structure partielle. Les deux peuvent être traitées rigoureusement et sont, jusqu'à un certain point, représentatives de la relation non-formelle *partie-entier*.

Exercice 9. 1) Faire une liste d'exemples entier-partie, en soulignant celles des expressions des parties qui symbolisent des sous-structures.

Exercice 9. 2) Indiquer des expressions qui sont des théorèmes pour une structure et non pour une de ses structures partielles et vice-versa (il faut indiquer préalablement la structure partielle). Exemple par rapport aux pommes et aux parties de pommes (avec Pul_1 : *être cellule de la pulpe* et Ex : *être cellule qui est en contact avec l'extérieur*) : "Aucune cellule de Pul n'est Ex ".

10. LE TEMPS DANS LE TRAITEMENT STRUCTURAL

Dans l'introduction on a indiqué que ce travail, bien que consacré aux structures, n'est pas dans la ligne structuraliste. Généralement le structuralisme traite les structures en faisant abstraction du temps, ou bien il les envisage en un point temporel déterminé, sans tenir compte, ainsi, des changements temporels, c'est-à-dire du développement. Par contre, du point de vue de la logique mathématique, il n'y a aucune raison d'exclure les facteurs temporels, si ces derniers présentent un intérêt pour les sujets respectifs. Il n'existe pas non plus de difficultés en principe qui empêchent un traitement temporel.

Comme exemple simple on indiquera le cas des familles. On a vu que sans considérations temporelles

une famille peut être traitée comme k-uplet de la forme $\langle pers, Mas_1, Pem_2, Cop_2, Cos_2, \dots \rangle$. Dans cette structure il est bien établi qui est oncle de qui, de la même façon que dans un arbre généalogique ; mais on ne rend pas compte du fait que l'oncle et le neveu aient ou n'aient pas vécu comme contemporains pendant un temps, ni de savoir lequel des deux est né ou mort le premier.

Pour traiter donc certains aspects temporels, nous considérons une famille pendant un temps déterminé, supposons un siècle. Nous effectuons une coupe temporelle chaque fois qu'un membre de la famille est né, s'est marié, est mort et éventuellement ait pris part à d'autres événements considérés comme importants. Supposons que le nombre total des coupes temporelles soit 80, à part les dates-clés qui sont le commencement et la fin du siècle. Le siècle se décompose alors en 81 tranches temporelles.

Supposons que la naissance de Jonas ait marqué le commencement de la tranche 17 et qu'il soit mort à la fin de la tranche 60 (au commencement de la tranche 61). Au lieu de considérer Jonas comme un élément unique de *pers*, nous traiterons maintenant $Jonas_{17}$, $Jonas_{18}, \dots$, $Jonas_{60}$ comme des éléments d'une classe *pert*, c'est-à-dire d'une classe dont les éléments s'appelleront "personnes temporelles". On procède d'une façon tout à fait analogue avec les autres membres de la famille. De cette manière, *pert* a beaucoup plus d'éléments que *pers* (au lieu d'un seul Jonas elle a 44 Jonas). Maintenant, *pert* nous servira de classe de base pour une structure dans laquelle, à part Mas^* , Pem^* , Cop^* , Cos^* (les fonctions propositionnelles de la structure originale atemporelle modifiées de façon adéquate pour faire référence maintenant aux éléments de *pert*), apparaissent de nombreuses fonctions propositionnelles

comme se présenter dans la même tranche temporelle que (par exemple, Jonas₂₂ et Paul₂₂), être connecté évolutivement avec (par exemple, Jonas₂₂ avec Jonas₄₇), etc.

On peut appliquer des considérations analogues à toutes les structures, par exemple, aux pierres, ou, pour mentionner un cas où le temps est très important, aux noyaux des atomes pendant un temps déterminé, en utilisant dans ce cas comme classe de base les particules et résonnances temporellement limitées (en analogie à Jonas₁₇ etc.).

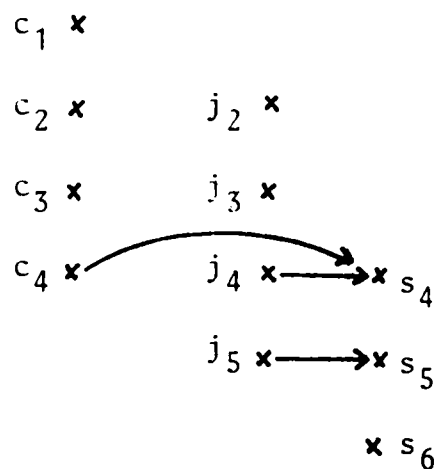
La logique et la mathématique disposent de beaucoup d'autres façons de s'occuper du temps. Ainsi, dans un traitement du temps physique, une sous-classe de V pourrait être celle des moments ou points temporels ; on pourrait avoir des relations comme *être antérieur* et d'autres qui mettent en relation les individus en général avec des moments, par exemple *manger au moment...* Des analyses spéciales, assez techniques, de la logique temporelle se trouvent, par exemple, dans [26] et [27].

Tout cela nous permet de voir que temps, développement et histoire sont parfaitement compatibles avec le traitement structural.

Exercice 10. 1) Supposons que nous ayons les individus suivants de *pert* : Charles₁, Charles₂, Julie₂, Charles₃, Julie₃, Charles₄, Julie₄, Sonia₄, Julie₅, Sonia₅, Sonia₆. Supposons, en plus, que nous sachions que seulement naissance, mariage et mort d'une des trois personnes commencent ou terminent une coupure temporelle. Ecrire l'histoire de la famille. Elle débiterait comme cela : Naissance de Charles (la première tranche correspond à la

vie de Charles avant que Julie soit née), naissance de Julie...

Exercice 10. 2) Une représentation graphique des individus de l'exercice 10. 1 avec la relation *être actuellement père ou mère de* serait :



Représenter (avec d'autres types de flèches) les relations *se présenter dans la même tranche temporelle* et *être connecté évolutivement*.

Exercice 10. 3) Supposons que nous ayons un pion négatif (π^-), qui se désintègre en un muon négatif (μ^-) et un neutrino (ν), ensuite le muon se désintègre en un électron (e^-), un autre neutrino (ν') et un antineutrino ($\bar{\nu}$). a) Indiquer la classe *part* des particules temporelles. b) Représenter graphiquement la structure $\langle part, Noc_1, Des_2, Ev_2 \rangle$, où *Noc* est la classe des particules (temporelles) qui n'ont pas de chargé électrique (c'est-à-dire, les particules temporelles qui correspondent aux deux neutrinos et à l'antineutrino), *Des* est la relation *être produit direct de la désintégration de* et *Ev* la relation *être connecté évolutivement* (entre particules temporelles qui correspondent à une même particule).

11. CONCLUSION

Si on laisse de côté des considérations spéculatives et se limite à un traitement structural du type indiqué ici, on dispose de méthodes très fécondes. Dans l'état actuel des sciences il a une application universelle, c'est-à-dire le traitement structural peut-être imposé, avec plus ou moins d'avantages, à tout secteur théorique (on construit la classe V , on établit les fonctions propositionnelles qui présentent un intérêt, ensuite on forme les k -uplets, etc). Cependant, on ne doit pas survaloriser ce traitement d'une façon unilatérale ni oublier qu'il y a d'autres méthodes qui peuvent être également fécondes.

CHAPITRE II

LA VERITE DU POINT DE VUE DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE

Dans un temps où l'on voit contredites autant de "vérités éternelles", la vérité même n'a pas échappé à une analyse scientifique, réalisée, dans ce cas, dans le cadre de la logique mathématique. Comme beaucoup d'autres travaux scientifiques, aussi ceux qui traitent de la vérité ont leurs racines dans le passé, mais constituent, en même temps, un dépassement des contributions préscientifiques.

Etant donné le caractère général du chapitre, les aspects purement techniques de la définition de "vérité" ne seront pas traités, et, étant donné son caractère scientifique, les considérations spéculatives relationnées à la vérité ne seront pas traitées non plus. C'est la région limite entre la logique formelle et la théorie de la connaissance (et non la région limite entre la métaphysique et la théorie de la connaissance) dans laquelle est située cette analyse. Elle exclut également les considérations psychologiques.

La logique mathématique s'occupe, d'une part d'une langue formelle ou partiellement formalisée, et, d'autre part, d'objets dénotés par certaines expressions de la langue. Ces objets (en prenant "objet" dans un sens très large) ne sont pas nécessairement réels (la réalité

n'est pas un problème de la logique formelle). Ainsi, parmi de tels objets peuvent apparaître, par exemple, $\sqrt{-1}$, le Pégase ou la classe des hommes.

Une partie des expressions de la langue sont les phrases ; par exemple, "La Tour Eiffel est à Paris" et "La Tour Eiffel est à Santiago". Les phrases se classent habituellement en deux classes, de façon à ce qu'une phrase de la langue appartienne à une seule de ces deux classes. On parle de "logique bivalente" si on applique rigoureusement la convention selon laquelle chaque phrase appartient à l'une ou à l'autre classe, et cela quoique dans certains cas, par faute de connaissances, nous ne pouvons pas réaliser effectivement cette classification. Les phrases de la première classe s'appellent "phrases vraies", celles de la deuxième classe, "phrases fausses".

Afin d'établir cette classification, c'est-à-dire afin de déterminer, en principe, quelles phrases appartiennent à quelles classes, nous avons besoin d'une définition formelle de "phrase vraie" et "phrase fausse". Peut-être seront connues des formulations comme : "La neige est blanche" est vraie, si, et seulement si, la neige est blanche ; "La Tour Eiffel est à Santiago" est vraie, si, et seulement si, la Tour Eiffel est à Santiago, etc. On peut donner un nombre aussi grand que l'on veut de ces définitions partielles pour un cas concret ; cela ne constitue jamais une définition générale de "phrase vraie".

Afin de donner une définition *générale* (limitée aux phrases qui correspondent à un système fonctionnel de premier ordre), on utilisera un procédé de Tarski, très simplifié et un peu changé. D'abord il faut faire une distinction entre phrases primitives et phrases composées.

Une phrase primitive est une combinaison d'une expression individuelle comme "la Tour Eiffel" et d'un prédicat comme "être à Paris" ; il y a aussi des phrases primitives constituées par diverses expressions individuelles et un prédicat. Une phrase composée est formée à partir d'une ou plusieurs phrases primitives, en ajoutant d'une façon appropriée des connecteurs comme "non" (" $\neg$ "), "ou" (" $\vee$ "), "et" (" $\wedge$ "), "si...alors" (" $\rightarrow$ "), etc. ou des opérateurs comme "tous" (" $\forall x$ ") ou "au moins un" (" $\exists x$ ").

On peut donner, maintenant, une définition de "phrase vraie" et "phrase fausse" dans les points suivants (uniquement les expressions indiquées dans ces points sont vraies ou fausses respectivement) :

- (1) Une phrase primitive est vraie si l'individu de l'expression individuelle (la Tour Eiffel) satisfait la fonction correspondante au prédicat (si la Tour Eiffel satisfait la fonction *être à Paris*). La phrase est fausse si l'individu ne satisfait pas la fonction. Cela correspond parfaitement aux définitions partielles ici indiquées (exemple, "La neige est blanche"...). D'une façon analogue sont traitées les phrases primitives avec plusieurs expressions individuelles.
- (2) Une phrase précédée par la négation est vraie si la phrase sans négation est fausse. Elle est fausse dans le cas contraire.

D'une façon analogue on formule des règles pour "ou", c'est-à-dire pour la disjonction, et pour "tous", c'est-à-dire pour l'opérateur universel.

Attendu qu'on peut former toutes les phrases composées (de la langue ici considérée) à partir des phrases primitives en utilisant la négation, la disjonction et l'opérateur universel, la définition indiquée, qui est absolument rigoureuse, embrasse toutes les phrases de la langue.

Cependant, immédiatement on se voit confronté à un problème qui exige une précision majeure. On peut faire des *diverses* classifications en phrases vraies et fausses. Par exemple, pour l'arithmétique habituelle " $2 + 2 = 4$ " est une phrase vraie et avec toute autre valeur au lieu de 4, on obtient une phrase fausse. Par rapport à une algèbre de Boole, au contraire, " $2 + 2 = 2$ " est une phrase vraie, et, pour une algèbre module 3, " $2 + 2 = 1$ " est une phrase vraie. Ce qu'il faut faire alors est préciser par rapport à quoi les phrases sont vraies ou fausses.

Pour cela nous devons faire référence, justement, aux structures. La classe des individus aurait pour élément la Tour Eiffel, la neige, etc., tandis que parmi les fonctions propositionnelles on aurait *être à Paris*, *être blanc*, etc.

Par rapport à ces structures, il faut définir "phrase vraie" et "phrase fausse". Alors " $2 + 2 = 4$ " est vraie par rapport à l'arithmétique habituelle, qui constitue, en termes de structures, une algèbre appelée "corps" ; " $2 + 2 = 2$ " est vraie par rapport à une algèbre de Boole, etc.

De cette façon nous avons une relativisation de la vérité par rapport aux structures. Mais il ne faut pas voir quelque chose de négatif dans cela. Si nous

connaissions la réalité nous pourrions dire que " $2 + 2 = 4$ " est vraie par rapport à la réalité *si nous avons* $2 + 2 = 4$ *en réalité*. Mais $2 + 2 = 4$ en réalité ? Ou 2 ? Ou 1 ? Nous ne pouvons pas répondre à ces questions ; mais nous pouvons répondre fréquemment s'il s'agit d'une structure qui correspond à une science.

La relativisation ne doit pas être entendue au sens que tout devient vague et imprécis, ou que tout dépend des préférences personnelles. Au contraire, nous savons absolument que, pour un corps " $2 + 2 = 4$ " est vraie et, pour une algèbre de Boole, " $2 + 2 = 2$ ". Il s'agit ici, pour ainsi dire, d'une relativité objective qui dépend du k -uplet et non des personnes ou des convictions. On a quelque chose d'analogue, par exemple, dans la théorie spéciale de la relativité, où tout dépend de la vitesse entre les objets.

Les systèmes formels, spécialement la mathématique, sont comme les instruments d'un chirurgien. Quand le chirurgien fait une opération, il choisit l'instrument le plus adéquat. Le physicien fait exactement la même chose quand il a besoin d'une théorie formelle ou partiellement formalisée pour résoudre ses problèmes.

Après cela nous revenons à la définition de "vérité". Au fond elle peut paraître assez triviale. Une partie de cette apparence injustifiée est due à la simplification adoptée dans ce chapitre. La définition authentique de Tarski est beaucoup plus technique. Elle est extraordinairement fructueuse, ce qui constitue toujours un critère de non-trivialité. Par exemple, la théorie des modèles et quelques autres secteurs de la mathématique actuelle ont été largement mis en valeur avec le traitement

Tarskien de la vérité. Une autre partie de la trivialité apparente se doit à une certaine similitude avec quelques définitions classiques.

Afin d'apprécier cette similitude on peut considérer, en premier lieu, une définition d' Aristote qui est la plus proche : *Dire de quelque chose qui est, qu'elle n'est pas, ou de quelque chose qui n'est pas, qu'elle est, est faux ; tandis que dire quelque chose qui est, qu'elle est, ou de quelque chose qui n'est pas, qu'elle n'est pas, est vrai.* On voit que la différence fondamentale n'est pas dans la conception de la vérité, mais dans le fait que la nouvelle définition est détaillée et précise jusqu'au dernier point. Elle est rigoureusement formalisable, ce qu'on ne peut dire de la définition d' Aristote. Il faut tenir compte qu'aucune précision dans cette matière n'est excessive, puisque d'une autre façon on peut obtenir des paradoxes du type du "menteur" (voir chap. III).

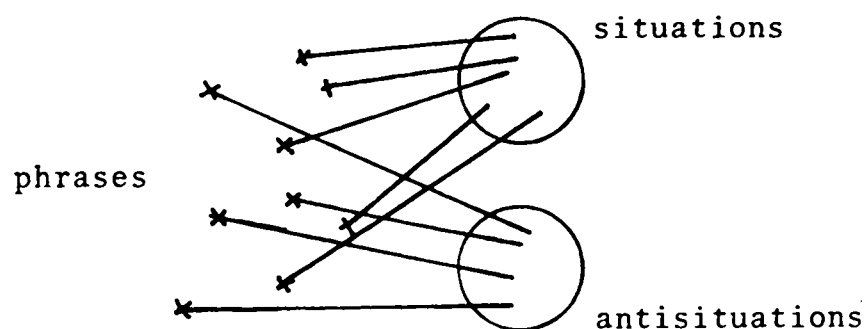
Considérons maintenant une autre définition classique, celle de la "*adaequatio rei et intellectus*".

Le terme "*intellectus*" est utilisé fréquemment dans un sens psychologique. On établit l'adéquation avec des actes ou contenus psychiques. Cependant, la logique mathématique n'inclut pas des considérations psychologiques, qui, dans ce cas, sont purement spéculatives ou peuvent varier d'un individu à l'autre. Au lieu de faire référence à l'*intellectus*, elle prend comme point de départ les expressions, qui pour elle sont des suites de signes typographiques ("n", "e", "i", "g", "e"), c'est-à-dire quelque chose de concret et accessible à tous.

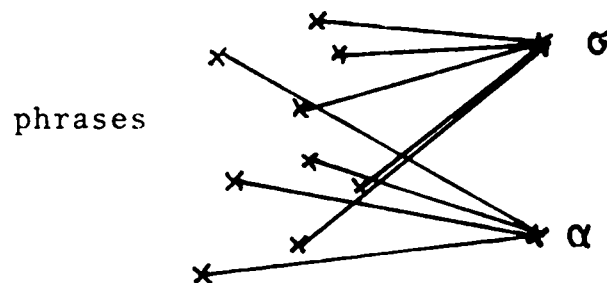
Le terme "*res*", qui se traduit littéralement par "chose", doit être entendu comme "situation", ou "état de choses", ou quelque chose de semblable.

Le véritable problème de cette conception classique n'est ni l'*intellectus* ni la *res*, mais l'adéquation. Normalement l'adéquation n'est pas identité. Peut-elle être similitude ? Mais similitude en quoi ? Naturellement elle peut être une correspondance. Mais il y a beaucoup de correspondances entre expressions et non-expressions ; par exemple, par une technique spéciale de Gödel on peut établir une correspondance entre des expressions quelconques et des nombres naturels, de telle façon que chaque expression, quelle qu'elle soit, ait son nombre correspondant et chaque nombre naturel son expression. Tout cela indique une seule chose : parler d'adéquation ne suffit pas, c'est quelque chose trop vague, il faut spécifier *quelle* est la correspondance, ce que le mot "adéquation" ne fait pas, tandis que la définition indiquée le fait.

Considérons une structure donnée. Supposons, pour traiter un cas simple, qu'un individu satisfait une des fonctions de la structure. Le fait que l'individu satisfait la fonction s'appellera "situation" de la structure. Si l'individu ne satisfait pas la fonction mentionnée on parle de "antisituation" de la structure. Ces mêmes considérations peuvent être étendues aussi à des cas plus complexes. Selon la définition indiquée de "vérité", les situations correspondent aux phrases vraies et les anti-situations aux phrases fausses. La correspondance établie de cette façon peut être considérée comme un type de dénotation, où chaque phrase vraie dénote sa situation et chaque phrase fausse, son antisituation. Dans une présentation graphique nous aurions :



Un autre traitement serait le suivant : Nous pourrions considérer toutes les situations identiques entre elles et aussi toutes les antisituations. Ensuite nous pourrions nous limiter à prendre une situation quelconque représentative des situations et la symboliser par " σ ". Nous pourrions travailler aussi avec une anti-situation représentative, symbolisée par " α ". Alors, selon ce deuxième traitement, toutes les phrases vraies dénoteraient σ et toutes les phrases fausses, α . Dans une représentation graphique on aurait :



Dans quelques textes de logique mathématique σ et α s'appellent "valeurs de vérité", σ serait la valeur *vérité* et α , la valeur *fausseté*. Afin de ne pas produire des confusions avec quelques autres termes utilisés, on préfère ici parler simplement de σ et α .

Jusqu'à ce moment on a vu seulement des phrases. Il y a aussi un autre type intéressant d'expressions, comme " $x = x$ " ou " x est le père de y ", etc. Ce type d'expressions s'appelle "schémas", avec un ou plusieurs symboles de variables (" x ", " y "). Une façon de transformer un schéma en phrase est de substituer, à la place des symboles de toutes les variables, des symboles qui dénotent des individus déterminés (ou, selon le cas, des fonctions propositionnelles déterminées) de la structure correspondante. Ayons, par exemple, comme individus du k -uplet, les personnes d'une famille entre elles, Charles et Marie ; en substituant "Charles" à la place de " x " et "Marie" à

la place de "y", on obtient des phrases comme "Charles = Charles" et "Charles est le père de Marie". Si un schéma se transforme en phrase *vraie* dans toutes les substitutions, alors il s'appelle "expression toujours vraie" ou "expression valide" par rapport à la structure donnée. D'une façon analogue existent des expressions quelquefois vraies et quelquefois fausses et aussi des expressions toujours fausses par rapport à la structure.

Jusqu'ici on a vu des expressions qui sont vraies ou valides par rapport à la structure donnée. Mais on peut démontrer qu'il y a aussi des expressions qui sont vraies ou valides par rapport à toutes les structures. Ces expressions s'appellent "expressions logiquement vraies (logiquement valides)" ; par exemple, "Si la Tour Eiffel est à Paris, alors la Tour Eiffel est à Paris" et " $Fx \supset Fx$ ". Déjà Leibniz les avait considérées en parlant de vérités de la raison, qu'on a dans tous les mondes possibles. Actuellement on ne parle pas de mondes possibles¹, mais, à leur place, de structures.

On pourrait penser que avec ces expressions nous aurions des vérités (expressions valides) indépendantes des structures et, en raison de cela, absolues. Malheureusement ce n'est pas cela. Quoique ces expressions soient totalement indépendantes des structures, il y a encore d'autres relativisations, dont on n'a pas encore parlé.

Première relativisation additionnelle : On a travaillé ici avec des systèmes logiques sans indiquer ces derniers explicitement. Mais toutes les expressions logiquement vraies (valides) dépendent du système choisi. Il n'y a pas de système absolu et universel. Pratiquement on

¹ au moins dans ce contexte.

prend presque toujours le système fonctionnel de premier ordre comme base. Mais il s'agit là d'une préférence pour des raisons pratiques, parce que ce système, utilisé ensemble avec les structures, correspond à nos expériences. En principe on pourrait former des systèmes logiques dont les expressions logiquement vraies (valides) seraient les négations de celles des systèmes usuels.

Deuxième relativisation additionnelle : Les règles de la définition de "vérité" sont ici choisies conventionnellement. Afin de donner un exemple, on pourrait dire qu'une phrase est vraie si elle commence par une voyelle et fausse si elle commence par une consonne. Naturellement on ne va pas choisir des définitions de ce type. L'exigence formulée normalement vis-à-vis des définitions de "vérité", est qu'elles soient des définitions *adéquates*. Il est possible de définir avec précision ce qui est, de son côté, une définition adéquate de "vérité". On formulera ici cette exigence d'une façon un peu simplifiée : Une définition de "vérité" est adéquate, si, et seulement si, nous pourrions déduire à partir de la définition toutes les expressions correspondantes de la forme "*s* est vrai, si, et seulement si, *p*", où à la place de "*p*" on substitue une phrase et à la place de "*s*" une expression qui dénote la phrase. Afin de donner un exemple, *p* correspond à : La neige est blanche ; *s* correspond à : "La neige est blanche" (fréquemment on utilise, pour dénoter une expression, la même expression mise entre guillemets).

La définition de "vérité" qui a été introduite au commencement de ce chapitre est adéquate, comme on peut voir, parce que nous pouvons déduire à partir d'elle toutes les expressions de la forme : "La neige est blanche" est vraie, si, et seulement si, la neige est blanche.

Ayant parlé autant de relativisations, on pourrait penser qu'on n'a plus rien de stable. Cependant, si nous utilisons le système fonctionnel de premier ordre et une définition adéquate de "vérité", alors la classe des expressions logiquement vraies (logiquement valides) est fixe et stable. Naturellement cette stabilité a été atteinte grâce à notre élection du système logique et du type de définitions de "vérité".

En connexion avec ce qui a été dit antérieurement il faut dire quelques mots sur la relation entre les expressions vraies et valides, d'une part, et les théorèmes, d'autre part. Les premières ont été introduites par définitions du type indiqué ; les seconds se démontrent à partir d'axiomes en utilisant des règles axiomatiques, selon les critères généraux pour *systèmes*. Dans ce qui suit on utilise le terme "expression valide" non seulement pour les schémas valides, mais aussi pour les phrases vraies, qui constituent, au fond, un cas spécial des expressions valides.

En lisant, par exemple, les "Principia Mathematica" de Russell et Whitehead, on se rend compte que les deux auteurs ont identifié, de fait, les expressions valides avec les théorèmes. C'était une tendance naturelle de leur époque, et seulement, quelques vingt ans après, Gödel a démontré qu'ils ne peuvent pas coïncider, si les systèmes ont une certaine extension. C'est-à-dire, l'ensemble des théorèmes est ou bien plus large ou bien plus étroit que l'ensemble des expressions valides. On préfère travailler, alors, dans chaque cas, avec un système plus étroit que l'ensemble des expressions valides ; de cette façon au moins tous les théorèmes sont valides. Une représentation graphique de cette situation, mais seulement pour les phrases, serait :



vraies

non vraies
(fausses)

En prenant plus d'axiomes on obtient plus de théorèmes (*te*) et aussi plus de négations de théorèmes (*neg te*) ; mais Gödel a démontré justement que ce procédé n'arrive jamais à une fin. On peut ajouter indéfiniment des axiomes et, néanmoins, il reste toujours des phrases vraies qui ne sont pas des théorèmes, ou l'ensemble des phrases qui sont théorèmes dépasse l'ensemble des phrases vraies. On a quelque chose de tout à fait analogue pour les schémas valides et les schémas qui sont des théorèmes. Ainsi, une identification des systèmes, d'un côté, avec les ensembles des expressions valides, de l'autre, n'est pas possible (pour y arriver on devrait changer la définition de "système", en utilisant les ainsi-nommés "semisystèmes", ou la définition de "expression valide", en utilisant à sa place les nommées "expressions secondairement valides"). Mais cela ne signifie pas que nous sommes arrivés à la fin de la mathématique rigoureuse, comme on peut lire quelquefois ; cela signifie seulement que la logique et la mathématique disposent de deux techniques pour établir des expressions de préférence (les valides et les théorèmes), et que les ensembles formés moyennant ces deux techniques sont différents.

Il existe des textes de philosophie spéculative sur la vérité dans lesquels toutes les difficultés sont définitivement résolues, tous les adversaires ont été réfutés et tout est mis parfaitement à sa place. Il n'y a pas seulement un travail de ce type sur la vérité mais beaucoup, et tous sont également définitifs. Malheureusement aucun de ces textes ne coïncide avec un autre. C'est là la gloire et la misère de la philosophie spéculative.

Ce qui a été indiqué ici ne prétend pas avoir le même degré de perfection ; mais représente ce qu'on peut dire actuellement en s'appuyant sur les procédés scientifiques.

CHAPITRE III

ASPECTS FORMELS DES QUELQUES PARADOXES SEMANTIQUES

Les systèmes dans lesquels on peut démontrer deux théorèmes, l'un négation de l'autre, s'appellent "inconsistants" ou "contradictaires". Du point de vue de la logique, ils n'ont pas beaucoup d'intérêt, parce que normalement ils coïncident avec l'ensemble des expressions significatives ou bien formées (tandis que, dans un système libre de contradiction du type ici traité, pas toutes les expressions bien formées sont des théorèmes). En plus ils n'ont pas de modèle au sens de ce livre.

Les démonstrations qui conduisent à des négations des théorèmes déjà établis, s'appellent "paradoxes". Par exemple, du fait que " $\sim(A \equiv \sim A)$ " est un théorème du système fonctionnel de premier ordre, une démonstration de " $A \equiv \sim A$ " dans le même système constituerait un paradoxe. On a vu qu'un système avec des véritables paradoxes n'a pas beaucoup d'intérêt, et on essaie de modifier un tel système de façon à ce que les paradoxes présentés soient éliminés.

Pour le système fonctionnel supérieur (qui est une extension du système fonctionnel de premier ordre et permet de parler non seulement d'individus et classes, etc., mais aussi de classes de classes, de classes de classes de classes, etc.) dans ses premières versions, on avait indiqué plusieurs paradoxes, qui, à la fin du siècle dernier, ont

constitué des grands problèmes. Il y a diverses modifications de ces premières versions, qui permettent d'éliminer les paradoxes mentionnés.

Dans l'élimination ici présentée nous suivons Ramsey [14] et divisons ces paradoxes en paradoxes logiques et sémantiques. Les deux types s'éliminent en imposant certaines restrictions à la formation des expressions bien formées. Les restrictions pour le premier type de paradoxes sont formulées dans la "théorie simplifiée des types" ; grâce à ces restrictions des paradoxes, comme celui du catalogue des catalogues qui ne se contiennent pas, ne peuvent pas se présenter. Les restrictions pour le deuxième type de paradoxes sont formulées dans la "théorie des niveaux du langage", qui distingue entre langue-objet ou langue de premier niveau (quand on ne parle pas sur des expressions), métalangue ou langue de deuxième niveau (quand on parle sur des expressions de premier niveau mais non d'un niveau supérieur), etc. et on exige (au moins pour certains termes comme "vérité") *que les affirmations sur une langue soient d'un niveau supérieur à la langue à laquelle elles font référence.*

Dans ce qui suit on essaiera de donner, dans les points essentiels, une formalisation partielle aux paradoxes sémantiques et à leurs éliminations. De la variété des paradoxes sémantiques et de leurs diverses formulations on se limitera en cet exposé au paradoxe du menteur dans la forme Russellienne, au paradoxe de Berry (avec la formulation analogue de Koénig) et au paradoxe de Grelling (avec la formulation analogue à celle du catalogue des catalogues qui ne se *mentionnent* pas).

Le paradoxe du menteur peut être présenté avec la phrase suivante :

Cette phrase est fausse

Si cette phrase est vraie, elle est fausse et pour cette raison (en affirmant le contraire) vraie et pour cela fausse, etc. Si elle est fausse, on doit avoir le contraire, c'est-à-dire elle doit être vraie et ensuite fausse, etc. (au fond on arrive à " $A \equiv \neg A$ ").

Ce paradoxe se résoud facilement en indiquant que dans la phrase indiquée on a un mélange de niveaux du langage. Elle dit quelque chose sur elle-même, ce qui selon la théorie des niveaux du langage, fait qu'elle n'est pas bien formée.

Cependant, il est intéressant de ne pas se contenter de ce résultat rapide mais d'entrer un peu dans les détails. La phrase indiquée pourrait être considérée, selon ce que Russell propose (quoique dans un autre sens), comme un ensemble de phrases -qui seraient toutes bien formées- de la forme :

- (1) La phrase de premier niveau formulée ici est fausse.
 - (2) La phrase de deuxième niveau formulée ici est fausse.
 - (3) La phrase de troisième niveau formulée ici est fausse.
- ect.¹

Nous introduisons, à part les symboles courants de la logique, les symboles suivants spéciaux : " V_1 " pour "la classe des phrases vraies de premier niveau", " F_1 " pour "la classe des phrases fausses de premier niveau", " V_2 " pour "la classe des phrases vraies de deuxième niveau",

¹ Nous pourrions travailler aussi avec des niveaux relatifs :

La phrase de niveau $r + 1$...
La phrase de niveau $r + 2$...
etc.

" F_2 " pour "la classe des phrases fausses de deuxième niveau", " V_3 ", etc., et en plus nous abrégeons "la phrase de premier niveau formulée ici" par " s_1 "². Nous employons des guillemets dans les expressions symboliques pour faire référence à des symbolisations.

La phrase (1) se formulerait alors symboliquement de la façon suivante :

$$s_1 \in F_1$$

Nous introduisons maintenant " s_2 " pour dénoter la phrase antérieure et nous obtenons ainsi la formulation symbolique de (2) :

$$s_2 \in F_2$$

En introduisant " s_3 " pour dénoter la phrase antérieure, nous avons pour (3) :

$$s_3 \in F_3$$

etc. De cette façon nous avons une symbolisation pour toutes les phrases de l'ensemble.

En les analysant l'une après l'autre, nous voyons qu'il n'existe pas *la phrase de premier niveau formulée ici*, puisque (1) est déjà une phrase de deuxième niveau (elle est en métalangue). Pour cette raison ce n'est pas le cas que s_1 appartienne à F_1 (ou à une autre classe quelconque), de façon que (1) est fausse. Dans le niveau supérieur suivant nous avons ensuite :

$$"s_1 \in F_1" \in F_2$$

² " s_1 " (à la différence de " s_2 ", " s_3 ", " s_4 " etc.) n'est pas un symbole de constante mais une description au sens Russellien, à laquelle, comme nous verrons, ne correspond rien.

c'est-à-dire :

$$s_2 \in F_2$$

et dans le niveau suivant :

$$"s_2 \in F_2" \in V_3$$

c'est-à-dire :

$$s_3 \in V_3$$

ou :

$$\sim (s_3 \in F_3)$$

et dans le niveau suivant :

$$"s_3 \in F_3" \in F_4$$

c'est-à-dire :

$$s_4 \in F_4$$

etc. On peut voir que les phrases s qui appartiennent à des niveaux pairs (symbolisés par des indices pairs) sont toujours des éléments de la classe F correspondante et les phrases s qui appartiennent à des niveaux impairs (symbolisés par des indices impairs) sont, *si elles existent*, toujours des éléments de la classe V correspondante. Cela peut s'exprimer en général pour $n > 0$:

$$s_{2n} \in F_{2n}$$

$$s_{2n+1} \in V_{2n+1}$$

Nous pourrions exprimer dans une seule formule ce qui nous conduit à affirmer, par exemple : " $s_5 \in v_5$ " :

$$""""s_1 \in_{F_1} \in_{F_2} \in_{v_3} \in_{F_4} \in_{v_5}$$

ou en écrivant des parenthèses à la place des guillemets :

$$(((s_1 \in_{F_1}) \in_{F_2}) \in_{v_3}) \in_{F_4}) \in_{v_5}$$

Nous pourrions continuer et obtenir l'expression correspondante pour un niveau supérieur quelconque ; mais déjà dans l'expression indiquée on note le parallélisme avec le paradoxe dans sa formulation en langue naturelle. Cependant -et ici est toute la différence- l'expression symbolique indiquée n'a rien d'un paradoxe.

Le paradoxe de Berry, qui est une simplification du paradoxe de Richard, se présente de la manière suivante : Supposons que nous ayons un dictionnaire du Français qui inclut entre autres tous les mots utilisés dans ce chapitre. Avec les mots contenus dans le dictionnaire nous formons des expressions qui définissent des symboles de nombres naturels³. Si nous ajoutons la condition que ces expressions doivent contenir moins de 50 mots, nous pouvons former seulement un nombre fini d'expressions. Nous appelons " d " la classe des nombres naturels pour lesquels on peut donner des définitions de ce type. Du fait qu'il y a un nombre infini de nombres naturels, il doit exister des nombres naturels qui n'appartiennent pas à d , c'est-à-dire, il doit exister des nombres naturels dont les symboles peuvent être définis uniquement par des expressions qui contiennent 50 ou plus de mots du dictionnaire. Parmi ces nombres il y en a un qui est le plus petit et que nous symbolisons par " N ". Nous avons alors :

³ Dans les définitions indiquées ici on définit toujours des *expressions*. Fréquemment on parle de "définir" des nombres, des classes, etc. Dans l'intérêt d'une terminologie précise il serait préférable d'ajouter "expression de" ou "symbole de" ou (selon le cas) employer un autre terme comme, par exemple, "déterminer" ou "fixer".

" N " est défini par "le plus petit nombre naturel dont le symbole ne peut pas être défini par une expression de moins de cinquante mots pris du dictionnaire".

Le *definiens* (l'expression qui définit) contient dans ce cas 24 mots du dictionnaire et " N " appartient à d , tandis que d'autre part il n'appartient pas à d .

De la façon dont le paradoxe a été présenté, le dictionnaire ne fixe pas univoquement une langue dans le sens logique. Nous pouvons définir des symboles de nombres dans la langue-objet du dictionnaire, c'est-à-dire, en employant dans le *definiens* des mots du dictionnaire sans parler *sur* cette langue (sur des expressions ou symboles de cette langue). Nous symbolisons par " d_1 " la classe des nombres naturels dont les symboles peuvent être définis de cette façon par une expression qui contient moins de 50 mots du dictionnaire. On peut définir aussi des symboles de nombres en formulant le *definiens* en métalangue⁴, et on peut remplir la même condition d'employer moins de 50 mots du dictionnaire. Nous appelons " d_2 " la classe des nombres naturels respectifs. Quelque chose d'analogue peut être fait dans une langue de troisième niveau, en symbolisant la classe correspondante par " d_3 ", etc.

Symbolisons, en plus, par " D_1 " la classe des expressions (qui sont en langue-objet) qui définissent les symboles des nombres de d_1 , par " D_2 " la classe des expressions (en métalangue) qui définissent les symboles des nombres de d_2 , etc.

⁴ Dans ce cas on parle dans le *definiens* sur une langue (une expression, un symbole). Exemple : "5" est défini par "la moitié du nombre dénoté dans la numération romaine par la lettre "X"".

Introduisons, en plus, " $[x]$ " pour exprimer "le symbole (en chiffres arabes) du nombre x ", " $Ds'a$ " pour exprimer "le *definiens* de l'expression a " et " $\mu x (Fx)$ " pour exprimer "le plus petit nombre naturel x qui satisfait F ".

Définissons maintenant :

$$N_2 = \text{df } \mu x (Ds'[x] \in -D_1)$$

c'est-à-dire, N_2 est le plus petit nombre naturel dénoté par un symbole dont le *definiens* n'appartient pas à D_1 . Selon cette définition, N_2 n'appartient pas à d_1 , mais $Ds'[N_2]$ appartient à D_2 et pour cette raison N_2 à d_2 . La contradiction ne se présente plus.

En général on peut définir :

$$N_n + 1 = \text{df } \mu x (Ds'[x] \in -D_n)$$

ou $N_n + 1$ n'appartient pas à d_n , mais à $d_n + 1$.

N_2 n'existe pas (" N_2 " n'est pas définissable) pour un système qui est développé uniquement dans la langue-objet du dictionnaire ; il est impossible de l'identifier avec un nombre naturel. On a quelque chose d'analogue avec les autres N . Pour un système développé dans une langue de niveau n (avec n niveaux) il existe les nombres $N_2, N_3, \dots, N_n$ (mais non plus loin). En les comparant, on se rendra compte que $N_2 < N_3 < \dots < N_n$.

Si " $\mu x (Fx)$ " est traduit par "l'élément minimal x de la classe bien ordonnée F ", " d_n " par "la classe des nombres *réels* dont les symboles peuvent être définis par

une expression de niveau n qui est formée par un nombre fini de mots contenus dans le dictionnaire" et de façon analogue " D_n ", et si nous limitons l'univers du discours aux nombres réels, alors ce qui a été indiqué par rapport au paradoxe de Berry s'applique automatiquement au *paradoxe de Koenig*.

Ce paradoxe peut être exposé de la façon suivante : Il y a des nombres réels dont les symboles ne peuvent pas être définis par des expressions formées d'un nombre fini de mots du dictionnaire. Ces nombres peuvent être bien ordonnés. Soit N l'élément minimal de la classe bien ordonnée obtenue de cette façon. Tout cela permettrait de définir " N " dans un nombre fini de mots du dictionnaire ("l'élément minimal..."), tandis que, d'autre part, N appartient à la classe des nombres avec des symboles non définissables dans un nombre fini de mots du dictionnaire.

Le paradoxe de Grelling sera présenté ainsi : Appelons "autologiques" les prédicats (adjectifs) qui s'appliquent à eux-mêmes (qui possèdent la propriété qu'ils dénotent) comme "court" (qui est court), "polysyllabique" (qui est polysyllabique), etc., et appelons "hétérologiques" les prédicats qui ne s'appliquent pas à eux-mêmes comme "long", "monosyllabique", etc. Le paradoxe se présente avec le prédicat "hétérologique". Si ce prédicat est hétérologique, alors (d'après la définition), il est autologique, et s'il est autologique, alors (d'après la définition), il est hétérologique.

Nous avons un paradoxe *logique* analogue de Russell -tout cela s'indique seulement pour permettre une comparaison avec le paradoxe de Grelling- dans lequel on distingue entre les propriétés appelées "prédicables" qui

possèdent elles-mêmes cette propriété comme *imaginable* (qui est imaginable) et les propriétés appelées "imprédictables" qui ne possèdent pas elles-mêmes cette propriété, comme *vert*. Formellement on introduit "la classe des propriétés imprédictables" ("*imp*") par la définition suivante :

$$imp =_{df} \lambda F (F \notin F)$$

c'est-à-dire, "*imp*" est défini par "la classe des propriétés qui ne sont pas des éléments d'elles-mêmes (qui ne sont pas possédées par elles-mêmes)". D'ici :

$$F \in imp \equiv F \notin F$$

Le paradoxe qui en résulte ($imp \in imp \equiv imp \notin imp$) s'élimine d'après la théorie des types (qui ne considère pas comme bien formées des expressions comme " $F \notin F$ " ou celles qui contiennent " $\lambda F (F \notin F)$ ").

Le paradoxe de Grelling est plus complexe. Afin de le formaliser nous utilisons des expressions comme " s_n " pour dénoter des classes de niveau n où $n \geq 0$, par exemple, $court_0$ est la classe de choses courtes, $court_1$ est la classe des mots courts, $court_2$ est la classe des métamots courts, etc. " $Gm'a$ " est traduit par "l'expression⁵ qui dénote a (pour faire référence à celle-ci on emploie des guillemets)" (exemple : " $court$ " est $Gm'court$), " $Mg'a$ " symbolise la relation inverse (exemple : $court$ est $Mg'court$) et, finalement, " x " exprime "le mot au niveau supérieur suivant".

Par rapport à cette dernière expression on aura le problème de trouver ce qu'il y a de commun entre " $court_0$ ", " $court_1$ ", " $court_2$ ", etc. ; il apparaît aussi

⁵ Afin de simplifier, nous faisons la convention selon laquelle il y a une seule expression correspondante (cela pourrait être la première, selon un ordre déterminé).

certaines difficultés qu'on verra plus loin. Ce signe est très important, parce que grâce à lui on peut définir à partir de " $Gm's_n$ " l'expression " $Gm's_{n+1}$ " :

$$Gm's_{n+1} =_{df} (Gm's_n)^X \quad (1)$$

et à partir de cette définition nous obtenons l'égalité :

$$s_{n+1} = Mg'((Gm's_n)^X) \quad (2)$$

Afin de traiter le paradoxe en tant que tel nous définissons maintenant :

$$het =_{df} \lambda Gm's (Gm's \notin s) \quad (3)$$

c'est-à-dire, "la classe des prédicats hétérologiques" est définie par "la classe des prédicats (des expressions qui dénotent des classes) qui ne sont pas des éléments de la classe respective". Cette définition sans indices est le point de départ du paradoxe qui établit que :

$$"het" \in_{het} \equiv "het" \notin_{het} \quad (4)$$

La définition (3) est contraire à la théorie des niveaux du langage, parce que pour classifier des mots ($Gm's$) nous devons employer la métalangue correspondante (nous devons les relationner avec des classe *de mots*) tandis que dans cette définition on les classifie par rapport à une classe d'un niveau inférieur (*de choses*).

Une définition de " het " qui satisfait les exigences de la théorie des niveaux du langage serait :

$$het_{n+1} =_{df} \lambda Gm's_n (Gm's_n \notin s_{n+1}) \quad (5)$$

c'est-à-dire, "la classe des prédicats hétérologiques de niveau $n+1$ " est définie par "la classe des expressions qui dénotent des classes de niveau n , où ces expressions ne sont pas des éléments de la classe correspondante de niveau $n+1$ ". Par exemple le prédicat " $vert_0$ " qui dénote la classe des choses vertes, n'est pas un élément de la classe des mots verts (de $vert_1$) et, pour cette raison, il est un élément de het_1 .

Malgré cette formulation circonspecte avec distinction de niveaux, nous obtenons selon la définition (5) :

$$"het_n" \in_{het_{n+1}} \equiv "het_n" \notin_{het_{n+1}} \quad (6)$$

pour un nombre naturel n quelconque. Cette expression a le même aspect de paradoxe que (4).

Cependant (6) est dû au fait que la définition générale (5) n'est pas admissible. Supposons que nous la considérons, par exemple, pour deux cas spécifiques " het_1 " et " het_2 " :

$$het_1 =_{df} \lambda Gm's_0 (Gm's_0 \notin s_1) \quad (7)$$

$$het_2 =_{df} \lambda Gm's_1 (Gm's_1 \notin s_2) \quad (8)$$

Cependant, " het_2 " nous est déjà donné selon (7) combiné avec (2) (on avait besoin de cette dernière expression pour pouvoir formuler la définition (5), dans laquelle apparaît " s_{n+1} ") :

$$het_2 = Mg'((Gm'het_1)^x) \quad (9)$$

de façon à ce que (8), et (5) en général, qui définissent des expressions déjà définies, ne sont pas correctes.

Avec un petit changement nous pouvons rendre ces définitions admissibles. Pour cela nous tenons compte non seulement du niveau de la classe dénotée par "het", mais aussi du niveau pour lequel "het" a été introduit au sens de la définition (5). Nous écrivons ainsi " $het\ r_n$ " où l'indice " n " indique comme avant le niveau de la classe dénotée par " $het\ r_n$ ", tandis que " r " (r aussi un nombre naturel) indique le niveau pour lequel " $het\ r_n$ " a été introduit à la façon de (5). Nous définissons :

$$het\ n + 1_{n+1} =_{df} \lambda Gm's_n (Gm's_n \notin s_{n+1}) \quad (10)$$

Nous avons par analogie avec (6), par exemple :

$$"het\ 1_1" \in het\ 2_2 \equiv "het\ 1_1" \notin het\ 1_2 \quad (11)$$

et en général (pour $n > 0$) :

$$"het\ n_n" \in het\ n + 1_{n+1} \equiv "het\ n_n" \notin het\ n_{n+1} \quad (12)$$

Si " $het\ 1_1$ " n'appartient pas à $het\ 1_2$ (qui nous est donnée d'après (2) à partir de " $het\ 1_1$ "), alors il appartient à $het\ 2_2$ (selon (10) et (11)), et s'il appartient à $het\ 1_2$, alors il n'appartient pas à $het\ 2_2$. Tous les aspects de paradoxe qui étaient dûs à la non-distinction de niveaux et à l'identification des classes qui n'avaient pas la même extension, ont disparu.

Sans les symboles comme " r " nous aurions l'expression paradoxale (6) ; si nous éliminions en plus les indices nous arriverions au paradoxe en tant que tel

(4), et si nous éliminions encore les guillemets nous obtiendrions le paradoxe logique des propriétés imprédicables.

Le paradoxe du catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas, qui n'est qu'une autre formulation du paradoxe de Grelling, est obtenu en utilisant "s" pour dénoter des catalogues (des classes de mentions) et en traduisant " $Gm'a$ " par "la mention de a (l'expression qui mentionne a)". D'une façon tout à fait analogue avec (3), nous obtenons la définition suivante de " set " (qui représente un catalogue de catalogues, un supercatalogue) :

$$set =_{df} \lambda Gm's (Gm's \notin s) \quad (13)$$

c'est-à-dire, " set " est défini par "la classe des mentions de catalogues, lesquelles ne sont pas contenues (n'apparaissent pas) dans leur catalogue respectif". Cette définition est, comme (3), contraire à la théorie des niveaux du langage et, à cause d'elle, on obtient l'expression analogue à (4) :

$$"set" \in set \equiv "set" \notin set \quad (14)$$

Afin de formuler ce dernier paradoxe en langue naturelle nous considérons les catalogues qui ne se mentionnent pas, ou plus précisément, les mentions des catalogues qui n'apparaissent pas dans leurs catalogues respectifs. Avec celles-là on a formé (selon la définition (13)) le supercatalogue set . Si maintenant set ne se mentionne pas, c'est-à-dire, si " set " n'apparaît pas dans

sct, alors (selon la définition (13)) "*sct*" $\in$ *sct*, et aussi vice-versa⁶.

Les complications analogues à (6) (de (5) à (12)) ne se présentent pas dans cette formulation en considérant seulement *sct*₂. Si nous éliminions dans (13) et (14) les guillemets, nous obtiendrions aussi un paradoxe logique, celui du catalogue des catalogues qui ne se contiennent pas.

En résumant, on peut dire que dans ce chapitre on a tenté d'indiquer les traits caractéristiques des divers paradoxes sémantiques, leur mécanisme, c'est-à-dire, la façon dont ils se produisent (du point de vue formel) et le visible parallélisme qui existe autant entre quelques-uns d'eux-mêmes que par rapport aux paradoxes logiques.

⁶ Les catalogues ont été traités ici comme des classes de mentions. Si nous considérons ces catalogues comme quelque chose de matériel (dans ce cas nous les dénotons par "*m*") et les mentions (matérielles) non comme des éléments mais comme inscrits en eux (nous dénotons la relation d'inscription par "*Inscr*"), alors nous aurions la définition tout à fait licite :

$$sct =_{df} \lambda Gm'm (Gm'm \rightarrow Inscr\ m)$$

où *sct* continue à être une classe de mentions. Dans ce cas on n'a aucun paradoxe, c'est seulement impossible de former un catalogue matériel *msct* correspondant à la classe *sct*. Il y a beaucoup d'entreprises irréalisables pour des raisons formelles (sans qu'elles constituent un paradoxe) comme, par exemple, celle de former deux classes exclusives dont l'une contient les nombres pairs et l'autre les nombres primes.

CHAPITRE IV

LE PROBLEME DE L'EXISTENCE DANS LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

C'est une erreur de croire que l'existence n'est pas un sujet de logique. Cependant le problème logique de l'existence et la façon de le traiter et de le résoudre différeront complètement du problème métaphysique correspondant.

Historiquement, la tentative décisive pour résoudre le problème de l'existence concernant la logique symbolique est due à Russel, particulièrement dans sa *Théorie de la description*. Cependant, du fait que Russel incluait des considérations extralogiques dans le traitement formel du problème, son exposition en devenait inutilement compliquée, et perdait en même temps l'universalité qu'on attend d'une science formelle.

On peut introduire le sujet en reprenant la phrase de Russell : "Le roi qui gouverne actuellement la France est chauve". Cette affirmation est fausse, non parce que le roi de France a des cheveux, mais parce qu'il n'y a pas de roi qui gouverne actuellement la France. Pour qu'une phrase de ce type soit vraie, il est nécessaire que le sujet existe, et qu'en outre le prédicat lui corresponde.

La logique, quoique formelle, doit donc s'occuper de l'existence. Toutefois, elle doit se borner

à parler de l'"existence formelle" ou de l'"existence relative à un système formel". Que quelque chose, qui existe formellement, existe de plus en réalité, cela dépend non de la logique formelle, mais de l'épistémologie ; en d'autres termes, tout dépend de ce qu'on entend par "réel", si l'on concède une correspondance réelle au système, et jusqu'à quel point.

Avec cette limitation nous pouvons traiter rigoureusement l'existence formelle dans la logique symbolique, plus précisément dans le système fonctionnel supérieur, dans le système fonctionnel élémentaire avec identité et dans des systèmes appliqués du même type. Dans ces systèmes on fait la distinction entre : individus, classes d'individus, relations entre individus et éventuellement classes de classes d'individus, etc. "Il existe quelques..." ou "Il existe le ..." peuvent être définis formellement dans ces systèmes à partir des termes "ne... pas", "ou" et "tous" non seulement par rapport aux individus mais (dans le système supérieur) aussi par rapport aux classes et relations ; cependant presque tout ce chapitre (à l'exception du quatrième et cinquième problèmes) traitera l'existence seulement par rapport aux individus, ce qui est suffisant pour voir l'essentiel. A partir des définitions mentionnées on peut démontrer que *l'existence formelle* n'est pas autre chose que *l'appartenance à l'univers du discours*, où ce qu'on appelle "univers du discours" est la collection des individus, c'est-à-dire, des valeurs qui satisfont ou ne satisfont pas une fonction (de premier ordre) quelconque du système correspondant.

Mais cet univers n'est pas quelque chose d'absolu et donné de prime abord. Au contraire, si nous appliquons la logique symbolique à un champ quelconque de

la science, ou aux problèmes de la vie quotidienne, nous fixons (explicitement ou non) un univers du discours. Cette fixation, bien qu'arbitraire, est soumise à deux conditions. La première, qui résulte d'un axiome des systèmes mentionnés, exige que l'univers du discours ait au moins un élément¹, la deuxième, due à la théorie des types, exige qu'il n'y ait pas d'éléments d'ordre différent (comme individus et classes d'individus). Une fois satisfaites ces deux conditions, la liberté est complète.

Nous pourrions considérer, par exemple, un système appliqué dont l'univers du discours consiste en tous les joueurs de football. La valeur pratique de ce système serait très petite puisqu'on ne pourrait traiter aucun problème qui ne se réfère pas *directement* à des joueurs de football. Dans ce cas ce sont uniquement les joueurs de football qui existent.

Mais il n'y a rien d'exceptionnel à travailler avec un univers du discours très restreint. C'est fréquemment le cas en mathématique où on le restreint, par exemple, aux nombres naturels, ou aux points du plan, etc. Donc seulement les nombres naturels ou les points du plan existent. On peut même changer d'univers d'un problème à l'autre.

D'après tout cela, le terme "existe formellement" acquiert un caractère très relatif. Ce qui existe pour un système (ou pour une application d'un système) n'existe pas nécessairement pour un autre. Ordinairement on forme l'univers du discours de la technique de façon que la machine en mouvement perpétuel ne lui appartienne pas ;

¹ Sur la base d'une autre axiomatisation on peut travailler aussi avec les univers du discours sans éléments.

elle n'existe pas dans ce cas. Cependant on pourrait écrire un traité sur un système technique fantastique, qui comprendrait la machine en mouvement perpétuel dans son univers du discours ; pour ce système, une telle machine existe. De même dans une recherche sur les animaux mythologiques, l'unicorne existe, contrairement à ce que reconnaissent les investigations biologiques.

Cette relativisation de l'existence surprend seulement si l'on donne au mot "exister" de la langue quotidienne un caractère absolu. Or il y a des expressions qui utilisent "exister" dans un sens relatif, comme "Cet individu n'existe pas pour moi", expression dans laquelle on forme un univers du discours qui exclut une certaine personne. En général, cependant, on utilise le terme "exister", en lui accordant un sens absolu et universel. Toutefois si l'on veut le préciser, des problèmes se présentent et l'on distingue entre "exister en réalité", "exister dans la conscience de l'homme", etc. Chacun de ces termes pour sa part est la source de nouvelles discussions (Le champ électro-magnétique existe-t-il réellement ? Et l'énergie potentielle ?) qui sont caractérisés fréquemment par leur obscurité et leur confusion.

Le terme "exister" avec toutes ces additions est en général plus étroit que "appartenir à l'univers du discours", si nous employons l'univers de la langue quotidienne ou de la logique traditionnelle. Nous nous demandons si l'on peut délimiter au moins ce dernier univers de manière à ce qu'il ait un caractère absolu et universel.

On ne parle pas d'"univers du discours" dans la logique traditionnelle², mais il est possible de trouver des indications dans ses exemples, qui permettent de donner

² En cherchant des déterminations formelles pour "exister" on croyait les trouver par exemple en des formulations telles que "avoir une essence propre".

une réponse négative à la question que nous nous posons. L'univers du discours de ces exemples comprend *ce qui existe réellement* ou *ce qui a existé réellement* (selon une position demi-scientifique et nullement invariable), et, en outre, l'esprit, la justice, la résignation, etc., mais non Pégase ou les Centaures. Qui en décide et quel est le critère ? *Ce qui existera réellement* avec une certaine probabilité appartient-il à l'univers ? En ce cas les jumeaux siamois qui pourraient naître le 1er janvier de l'an 2 000 seraient inclus. Mais dans le cas contraire, l'éclipse prochaine du soleil ne serait pas comprise. Où est la limite ?

Malgré tout cela, plusieurs logiciens modernes acceptèrent cet univers supposé de la logique traditionnelle ou essayèrent de "découvrir" le "vrai". Ainsi, pour Russell, l'univers du discours consistait à peu près en ce qui existe ou a existé réellement. Dans cet univers qui est beaucoup plus restreint que celui de la langue quotidienne et de la logique traditionnelle, il y a des problèmes spéciaux, si l'on a des références à des individus qui appartiennent à l'univers de la langue quotidienne, mais non à l'univers de Russell. Pour justifier cette différence, qui n'est pas conventionnelle pour lui, il doit introduire des artifices spéciaux qui imposent une limitation sérieuse à l'universalité de la logique formelle.

De point de vue formel, aucun univers du discours n'est donné de prime abord ; et tout univers qui satisfait aux conditions indiquées peut être utilisé. La croyance -si l'on veut- épistémologique, qu'il y ait un univers rigoureusement délimité qui serait le vrai et devrait être "l'" univers par excellence du discours de la logique, ne peut, comme on l'a montré, se justifier.

La relativisation indiquée n'est pas quelque chose de négatif. Au contraire ! Elle permet de choisir des univers rigoureusement délimités pour chaque science, en particulier quand cette science est déjà complètement formalisée.

Après ces indications sur la relativisation de l'existence, deux théorèmes seront présentés qui montrent les traits caractéristiques de l'existence formelle. Dans ces théorèmes, des symboles spéciaux seront utilisés, qui s'appellent "descriptions" et qui sont de la forme " $\lambda x(Fx)$ ". Ils se lisent comme "le x qui satisfait F ", par exemple "le x qui est roi de France" ("le x qui satisfait la fonction *être roi de France*"). Les descriptions ne dénotent rien directement et peuvent s'utiliser pour cette raison non seulement dans les phrases où l'on parle de quelque chose d'existant, mais aussi dans les phrases où l'on parle de quelque chose de non existant ou de quelque chose dont l'existence n'est pas assurée, comme le roi de France et le carré rond. Les phrases dans lesquelles apparaissent les descriptions sont de cinq types : " $E! \lambda x(Fx)$ " ("Le x qui satisfait F existe formellement"), " $\neg E! \lambda x(Fx)$ " ("Le x qui satisfait F n'existe pas formellement"), " $G \lambda x(Fx)$ " ("Le x qui satisfait F satisfait G "), " $\neg [G \lambda x(Fx)]$ " ("Ce n'est pas le cas que le x qui satisfait F satisfait G ") et " $\neg G \lambda x(Fx)$ " ("Le x qui satisfait F ne satisfait pas G "). Dans ces phrases, là où se présentent les descriptions, il n'y a pas de référence à des individus mais seulement à des fonctions (comme F et G) et à des opérateurs comme (Ex) et (y) ; ces derniers apparaissent quand on donne les définitions explicites des phrases mentionnées, comme :

$$\begin{aligned} E! \lambda x(Fx) &=_{df} (Ex) (Fx \cdot (y) (Fy \supset x = y)) \\ G \lambda x(Fx) &=_{df} (Ex) (Fx \cdot (y) (Fy \supset x = y) \cdot Gx) \end{aligned}$$

Le premier théorème est :

$$G\lambda x(Fx) \supset E!\lambda x(Fx)$$

Si $\lambda x(Fx)$ satisfait une fonction, alors il existe formellement. Exemple : Si le roi de France est chauve (satisfait la fonction *être chauve*) alors le roi de France existe formellement.

Pour éviter des pseudo-paradoxes, on doit prendre une précaution : l'expression "ne pas exister formellement" ne représente pas une fonction ; il s'agit d'un prédicat grammatical mais non d'un prédicat logique³. En logique symbolique, cette expression a une symbolisation différente (avec "E!") de celle des fonctions. Sans cette précaution, nous aurions par exemple :

Le roi de France n'existe pas formellement.

Donc, d'après ce théorème :

Le roi de France existe formellement.

Le deuxième théorème est :

$$\sim[G\lambda x(Fx)] = \{ \sim E!\lambda x(Fx) \vee \sim G\lambda x(Fx) \}$$

Si et seulement si ce n'est pas de cas que $\lambda x(Fx)$ satisfait G (c'est-à-dire, si et seulement si l'on nie la phrase singulière entièrement) alors $\lambda x(Fx)$ n'existe pas formellement ou ne satisfait pas la fonction G . Exemple : Si ce n'est pas le cas, que le roi de France soit chauve, alors le roi de France n'existe pas formellement ou le roi de France n'est pas chauve. Nous avons toujours dans la logique

³ Déjà Kant soutint qu'"être" n'est pas un "prédicat réel".

bivalente l'alternative entre "Le roi de France est chauve" et "Ce n'est pas le cas que le roi de France soit chauve" ; mais non l'alternative entre "Le roi de France est chauve" et "Le roi de France n'est pas chauve". Dans ce dernier cas, les deux phrases peuvent être fausses pour la simple raison que le roi de France n'existe pas.

Ces théorèmes nous indiquent comment traiter des objets qui, une fois choisi l'univers du discours, lui appartiennent ou ne lui appartiennent pas. Il y a en outre de nombreux théorèmes dans lesquels l'existence formelle joue un rôle (par exemple relatif à la subalternation traditionnelle), sans que nous puissions le mentionner dans cette brève exposition.

Un problème particulièrement intéressant se présente avec des phrases comme "Charles existe", "Il y a des démocraties", etc. Comment les traitons-nous en général du point de vue formel ? Nous pouvons les traiter comme "Charles existe formellement", "Quelques démocraties existent formellement" ; mais ce n'est pas l'unique possibilité et, souvent, il n'est pas très opportun de procéder ainsi.

Il peut être plus avantageux d'interpréter les phrases comme "Charles existe effectivement" et "Quelques démocraties existent en réalité", dans lesquelles nous traitons "exister effectivement", "exister en réalité", "exister dans la conscience de l'homme", "exister subectivement pour moi", etc., comme des expressions de fonctions quelconques du même type que "être philosophe" ou "manger". Si nous procédons ainsi, les différentes formes de *exister non formellement* n'ont aucune symbolisation propre et ne se distinguent en rien d'autres prédicats

logiques, tandis que pour *ne pas exister formellement* nous devons utiliser une symbolisation spéciale, que nous ne pouvons pas traiter comme un prédicat logique.

Ce procédé n'entraîne aucune contradiction. Si nous disons "Le roi de France n'existe pas *effectivement*", en traitant "ne pas exister effectivement" comme représentation d'une fonction, ceci implique seulement, d'après notre premier théorème, "Le roi de France existe *formellement*". Les deux phrases sont parfaitement compatibles⁴.

Quelques exemples tirés de l'histoire de la philosophie peuvent servir à illustrer ce qui a été indiqué. Notre intention sera, cependant, de nous maintenir avant tout dans le cadre de la logique formelle.

Nous commençons avec l'investigation du fameux "*Cogito ergo sum*" de Descartes, en le considérant comme un raisonnement. Il y a principalement deux possibilités de traitement qui se présentent :

- 1° Je pense (je satisfais la fonction *penser*), donc j'existe formellement. Ce raisonnement est exact d'après le premier théorème et (symboliquement avec "P" pour "penser" et "M" pour "être moi" : " $P \vdash x(Mx) \supset E \vdash x(Mx)$ "). On peut accepter la prémisse ; mais la conclusion ne dit rien sur l'existence réelle, puisque l'univers du discours de la philosophie est plus étendu que celui de ce qui existe réellement.
- 2° Pour obtenir la conclusion : "J'existe réellement" nous pouvons utiliser un autre raisonnement, comme par exemple le syllogisme *Barbara* singulier : Tout ce qui pense existe réellement. Je pense. Donc j'existe réellement. Mais en ce cas le résultat n'est pas impressionnant,

⁴ On trouve une distinction semblable entre "exister non formellement", et "exister formellement" dans Meinong qui utilise pour ce dernier le mot "subsister". Ainsi Pégase n'existe pas, mais il subsiste. Naturellement cette distinction seule n'est pas suffisante pour résoudre tous les problèmes de l'existence.

en comparaison avec les prémisses qu'on doit accepter.

Nous pourrions noter parmi d'autres un raisonnement semblable dans des formulations de la démonstration ontologique de l'existence de Dieu : Le *ens perfectissimum* satisfait la fonction *être tenu par nous dans son idée*, donc (d'après le premier théorème) il existe formellement. Nous n'avons pas besoin de recourir à la plus haute perfection, mais de nouveau nous ne pouvons rien dire sur l'existence réelle. Pour obtenir ce dernier résultat nous devrions accepter deux prémisses comme "Ce qui est la chose la plus parfaite dans l'idée, existe réellement" et "Dieu est la chose la plus parfaite dans l'idée".

Comme troisième exemple nous en indiquons un qui, en différentes formulations, a inquiété les logiciens dès John Stuart Mill. La phrase "Pégase est une invention des poètes" veut dire que Pégase n'existe pas, tandis qu'au contraire, en satisfaisant la fonction *être invention des poètes*, il existe formellement d'après le premier théorème.

On résout facilement cette contradiction si l'on considère que Pégase est compris dans l'univers du discours et qu'on distingue entre existence formelle et existence effective. Satisfaire la fonction *être une invention des poètes* implique non-existence effective (selon l'idée exprimée dans le prédicat) et existence formelle (d'après le premier théorème). Pégase n'existe pas effectivement, tandis qu'il existe formellement. En utilisant "I" pour "être une invention des poètes", "P" pour "être Pégase" et "X" pour "exister effectivement" on aura d'un côté :

$$I \neg x(Px) \supset \sim X \neg x(Px)$$

et de l'autre :

$$I \neg x(Px) \supset E! \neg x(Px).$$

Notre quatrième problème est celui des universels⁵ : Est-ce que les classes existent ? Quoique, d'après la théorie des types, une classe ne puisse pas appartenir au même univers du discours que ses éléments, elle peut appartenir cependant à un univers de deuxième ordre. Cet univers dépend de l'univers des individus. Selon l'univers des individus que nous choisissons, existeront *formellement* (existence formelle de deuxième ordre) beaucoup ou peu de classes, mais au moins deux : L'univers du discours de premier ordre et la classe vide (la classe qui ne contient pas d'éléments).

Classes de classes, relations, etc., admettent un traitement analogue.

Si nous identifions *exister formellement* avec *exister réellement* dans tous les ordres, alors au moins deux classes existent *réellement*. L'extension de l'identification à d'autres ordres n'est pas logiquement nécessaire. Au contraire, c'est seulement une position épistémologique possible et rien de plus.

Le cinquième et dernier problème est l'antique question de Platon pour l'existence du non-être ou néant. Nous avons vu que *ne pas être* (si nous l'identifions avec *ne pas exister formellement*) n'est pas une fonction, et pour cette raison nous ne pouvons pas former la classe de ce qui n'est pas. Cependant si la classe de ce qui est, est plus étroite que l'univers du discours utilisé, alors la classe de ce qui n'est pas, est une classe d'individus et existe formellement. On travaille aussi, en logique symbolique, avec la classe vide qui ne contient pas d'éléments et on l'appelle quelquefois "néant". Le néant dans ce sens existe formellement, comme cela a été indiqué précédemment.

⁵ Dans une forme simplifiée, c'est-à-dire sans inclure des considérations sur *les concepts* de classes, etc.

En résumé, l'existence formelle, qui coïncide avec l'appartenance à l'univers du discours est de grande importance pour la logique formelle. Nous pouvons former divers univers du discours, ce qui donne à l'existence formelle un caractère relatif. Ceci permet d'obtenir des délimitations totalement rigoureuses contrairement au vague "exister" de l'usage traditionnel et commun qui, sans justification, accorde à "exister" un caractère absolu et universel. Quelques théorèmes de la logique symbolique et quelques exemples tirés de l'histoire de la philosophie nous ont aidés à élucider le concept "exister formellement" et à le distinguer d'autres emplois possibles d'"exister". Avec tout cela on peut affirmer, je crois, que l'existence *dans son aspect formel* a cessé d'être un problème insoluble pour la logique.

CHAPITRE V

L'IDENTITE DE L'INDISCERNABLE

L'identité ou égalité¹ est une des relations que les objets (individus, classes, etc.) ont avec eux-mêmes. Cela ne signifie pas que l'on considère seulement des cas triviaux dans lesquels on affirme que $a = a$. Beaucoup plus instructifs sont des cas comme $a = b$, qui nous disent que l'objet dénoté par " a " (l'objet a) est le même que l'objet dénoté par " b " (l'objet b). En d'autres mots, nous ne sommes pas autant intéressés au fait que $4 = 4$, ce qui nous intéresse plus est que $2 + 2 = 4$ (que le nombre dénoté par " $2 + 2$ " est le même que celui dénoté par " 4 "). Des deux côtés du signe "=" on fait référence au même objet, qui a des noms différents ; une des tâches d'un calculateur, par exemple, est d'établir que l'objet dénoté par un nom est le même que celui dénoté par un autre. Afin de disposer d'une terminologie correcte, nous évitons de dire que *deux* objets sont identiques.

Tandis que l'objet $2 + 2$ est le même que l'objet 4, on n'a pas " $2 + 2$ " = " 4 " (les deux expressions, les deux suites de signes typographiques sont différentes). On a seulement " $2 + 2$ " *Syn* " 4 ", si l'on appelle "extensionnellement synonymes" ("*Syn*") des expressions qui dénotent le même objet, de façon que si $a = b$, alors " a " et " b " sont synonymes mais non en général identiques. L'identité

¹ Habituellement en logique mathématique, on ne fait pas une distinction entre identité et égalité.

fait référence aux objets, la synonymie aux expressions qui dénotent des objets. Cependant il peut arriver aussi que l'expression s soit identique à l'expression t ; dans ce cas les *méta*-expressions qui dénotent s et t seront synonymes.

Si l'on veut définir "identité", il suffit d'avoir un système logique relativement simple, par exemple un système fonctionnel de deuxième ordre (avec individus, fonctions propositionnelles de premier ordre et opérateurs comme (F) qui font référence à toutes les fonctions de premier ordre). Dans ce système on aura la définition suivante :

$$x = y =_{df} (F) (Fx \supset Fy)$$

Ainsi x et y sont identiques si, et seulement si, toutes les fonctions propositionnelles (plus précisément toutes les fonctions propositionnelles unaires) satisfaites par x sont aussi satisfaites par y , ou dans une traduction plus libre, si chaque propriété de x est aussi une propriété de y .

La définition indiquée pour les fonctions unaires s'étend dans notre système logique général, aux fonctions propositionnelles n -aires avec $n > 1$, parce que toute différence par rapport aux fonctions n -aires se présente aussi automatiquement par rapport aux fonctions unaires.

Maintenant *satisfaire les mêmes fonctions* signifie *être logiquement indiscernable* ; le fait que deux objets sont logiquement discernables veut dire qu'il y a des fonctions satisfaites par un objet et non par l'autre.

Nous sommes ainsi arrivés à l'origine de la définition de l'identité comme indiscernabilité, qui a été formulée par Leibniz. On pourrait dire que le terme "satisfaire les mêmes fonctions" représente formellement le terme "être logiquement indiscernable".

Naturellement le fait qu'il soit impossible de distinguer par rapport à certaines fonctions ou certaines classes de fonctions n'implique ni indiscernabilité ni identité.

Dans la plupart des systèmes formels, spécialement dans les systèmes appliqués de premier ordre, on n'introduit pas l'identité de la façon indiquée, mais soit par une expression élémentaire non définie, soit par une définition spéciale à partir d'autres expressions relationnelles élémentaires. Dans ces deux cas on a deux formules comme axiomes ou théorèmes démontrés, d'un côté la réflexivité de l'identité

$$x = x$$

de l'autre, la remplaçabilité :

$$x = y \supset (B(x) \supset B(y))$$

où $B(y)$ est différent de $B(x)$ seulement pour avoir " y " une ou plusieurs fois (mais non nécessairement toutes les fois) libre là où $B(x)$ a " x " libre.

Avec ces théorèmes, on a de nouveau le résultat suivant : identité ($x = y$) implique indiscernabilité ($B(x) \equiv B(y)$) et vice versa dans le système (par rapport aux expressions bien formées du système).

Dans un cas concret, on devrait faire référence au système respectif² et à la structure examinée. Les deux choses sont indispensables pour un traitement rigoureux, puisqu'il est possible que a et b soient identiques dans un système ou par rapport à une structure, pour être différents dans un autre système ou par rapport à une autre structure. Alors a et b seraient indiscernables dans un cas et discernables dans l'autre.

Jusqu'à présent, on a vu uniquement l'indiscernabilité logique ; seulement ce type d'indiscernabilité coïncide avec l'identité. Le fait qu'il ne soit pas possible de discerner *empiriquement* n'implique pas l'identité des objets correspondants. Pour donner un exemple de la physique quantique, deux particules empiriquement indiscernables, même si en principe on ne peut pas déterminer leur position et d'autres propriétés physiques, sont logiquement discernables et pour cette raison non identiques.

Naturellement on pourrait abandonner dans un cas déterminé totalement l'idée de *deux* particules et considérer seulement un super-objet qui corresponde aux deux particules. La logique et la mathématique offrent en général diverses possibilités de traitement, et on peut choisir celle qu'on préfère, seulement une fois le choix fait, il faut se tenir rigoureusement au traitement choisi.

Les analyses faites par la logique mathématique peuvent être étendues à toutes les disciplines où l'on est disposé à admettre un traitement rationnel. Par exemple, du point de vue de la physique on a, à des moments différents :

² Tout ce qui a été indiqué ici peut être appliqué aussi aux contextes intensionnels et modaux, sous la condition que l'on introduise des systèmes spéciaux (comme par exemple dans [24], [9] et [28]) qui prévoient ce type de traitement.

$$\text{table}_{7h} \neq \text{table}_{3h}$$

tandis que, d'un autre côté, on affirmé qu'il s'agit de la même table. Si l'on veut procéder rigoureusement, il faut distinguer entre les objets momentanés d'une part, comme table_{7h} , la table à 7 heures, etc., et les objets temporellement étendus d'autre part, comme par exemple table_t , la table pendant toute son existence.

La distinction entre objets momentanés et objets temporellement étendus et d'autres distinctions similaires nous permettent d'éviter certaines formulations apparemment paradoxales. Par exemple, pour le fleuve d'Héraclite, on a $\text{fl}_t = \text{fl}_t$ et $\text{fl}_{7h} \neq \text{fl}_{3h}$. On peut se baigner deux fois dans le même fleuve temporellement étendu mais pas dans le même fleuve momentané ([28] présente tout cela dans un système temporel).

Pour revenir à des considérations plus formelles, même en mathématique on n'a pas toujours accepté l'identité comme indiscernabilité logique. Par exemple, Behmann [1] considère qu'il y a des objets logiquement indiscernables qui ne sont pas identiques. Concrètement il prend les racines de l'équation :

$$x^2 + 1 = 0$$

c'est-à-dire, i et $-i$. Il affirme (I) $i \neq -i$ et (II) i et $-i$ sont indiscernables. Pour justifier (II), il dit (sans le démontrer) qu'on pourrait remplacer partout " i " par " $-i$ " et vice-versa sans que cela produise un changement quelconque. Ainsi, pour lui, il est en principe impossible de distinguer entre les deux.

Dans ce qui suit son point (II) sera mis en doute. Laissant de côté, pour le moment, la recherche d'une fonction qui permette de distinguer entre i et $-i$, mon intention est de montrer le mécanisme de la formation de ce problème. Comment peut se produire l'idée de l'indiscernabilité dans le cas considéré ?

Dans ce but, on a besoin de trois définitions. Supposons que a et b soient des individus. Ils s'appelleront "polaires" par rapport à la fonction propositionnelle binaire F , s'ils satisfont les conditions suivantes :

- (1) On a Fab et Fba mais non Faa ni Fbb .
- (2) a et b ne peuvent pas être distingués si l'un ou l'autre satisfait F avec un troisième individu, supposons c .

Les deux individus a et b s'appellent "antipolaires" par rapport à une fonction propositionnelle binaire G , si :

- (1) On a Gaa et Gbb , mais non Gab ni Gba .
- (2) a et b ne peuvent pas être distingués si l'un ou l'autre satisfait G avec un troisième individu, supposons c .

Les individus a et b s'appellent "polaires" par rapport à une classe Δ des fonctions propositionnelles binaires, si a et b sont polaires par rapport à quelques fonctions de Δ , antipolaires par rapport à quelques autres et ne peuvent pas être distinguées par rapport au reste des fonctions de Δ .

On peut construire des structures avec une classe de fonctions Δ de telle façon qu'un ou plusieurs couples d'individus sont polaires par rapport à Δ .

Si a et b sont polaires ou antipolaires par rapport à une fonction, ils sont parfaitement discernables. Il y a au moins une fonction F telle que Fab et non Fbb ou vice versa. En d'autres mots, a appartient à la classe $\lambda x(Fxb)$ tandis que b n'appartient pas à cette classe. Ainsi, *polarité implique discernabilité*.

Si l'on dispose seulement d'une classe de fonctions par rapport à laquelle a et b sont polaires, on a certains problèmes avec les définitions. Dans ce cas spécial, il n'est pas possible de définir " a " et " b ", parce que pour définir " a " il est nécessaire d'avoir défini " b " auparavant et vice versa. Mais ces difficultés ne justifient pas de traiter a et b comme indiscernables.

Dans le problème de Behmann, on peut faire référence à une classe Δ par rapport à laquelle i et $-i$ sont polaires³. Une fonction par rapport à laquelle ils sont polaires serait, par exemple :

l'addition de... et de... est égale à 0

tandis que par rapport à :

le produit de... et de... est égal à -1

ils sont antipolaires. Bien qu'on ait les difficultés mentionnées pour définir " i " et " $-i$ ", cela n'élimine en aucune manière la discernabilité de i et $-i$. Il s'agit de deux objets non identiques et *discernables*, de façon que ce cas ne peut pas être utilisé comme argument contre l'identité de l'indiscernable.

³ On arrive au même résultat si l'on compare un objet et son "image" dans l'autre exemple de Behmann du monde symétrique devant et derrière le miroir.

Il a été indiqué précédemment que l'identité est relative aux systèmes et aux structures. Quelques auteurs (par exemple [7]) parlent d'une "identité relative" qui est caractérisée encore par une autre relativité, elle est relative à certaines classes d'individus. Ces auteurs écrivent :

$$x =_A y$$

pour exprimer que x est le même A que y (par exemple, que x est le même homme que y). Quand il s'agit réellement d'identité (quelquefois il s'agit d'autres relations d'équivalence, comme *avoir la même couleur*), " $x =_A y$ " se réduit à " $x = y \cdot x \in A$ ". Quand " $=_A$ " symbolise une relation d'équivalence (supposons R), on peut utiliser les résultats qu'il y a par rapport à ces relations, comme la réflexivité (" $x R x$ "), la symétrie (" $x R y \equiv y R x$ ") et la transitivité (" $(x R y \cdot y R z) \supset x R z$ "). On peut former alors les classes d'équivalence correspondantes (les classes des individus qui sont en relation R entre eux, par exemple la classe des individus qui ont la même couleur que a) et démontrer ensuite : Si $x R y$ alors la classe d'équivalence à laquelle appartient x est identique à la classe à laquelle appartient y . L'identité relative dans le sens de [7] ne fait pas autre chose que cela, de façon qu'un traitement spécial pour elle n'est pas justifié.

En analysant l'activité scientifique, on peut constater qu'il y a deux procédés qui ont à voir avec le sujet traité dans ce chapitre. D'une part *on identifie* pour montrer des traits communs, par exemple, au lieu de travailler avec certains individus différents, on travaille avec leur classe d'équivalence. D'autre part, *on discerne* pour approfondir l'analyse, par exemple avec des indices on

symbolise des objets différents, là où l'on n'avait vu avant qu'un seul objet. Dans les deux procédés, l'identité et l'indiscernabilité vont ensemble.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHMAN, H., Drei Aporien der Identität, dans Käsbauer, M. et v. Kutschera, F., *Logik und Logikkalkül*, Fribourg-Munich, 1962, pp. 19-48.
- [2] BENACERRAF, P. et PUTNAM, H., *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs, 1964.
- [3] BETH, E.W., *Les fondements logiques des mathématiques*, Paris, 1950.
- [4] CARNAP, R., *The logical Syntax of Language*, Londres, 1937.
- [5] - *Introduction to Semantics*, Cambridge, Mass., 1942.
- [6] - *The Logical Structure of the World - Pseudo-problems in Philosophy*, Berkeley - Los Angeles, 1969.
- [7] GRIFFIN, N., *Relative Identity*, Oxford, 1977.
- [8] HATCHER, W., *Foundations of Mathematics*, Philadelphie, 1968.
- [9] HUGHES, G.E. et CRESSWELL, M.J., *An Introduction to Modal Logic*, Londres, 1968.
- [10] LACATOS, I., *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967.
- [11] PIAGET, J., *Le structuralisme*, Paris, 1968.
- [12] PINGAUD, B. et autres, *Lévi-Strauss : Estructuralismo y dialéctica*, Buenos Aires, 1968.
- [13] QUINE, W.V., *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass., 1953.
- [14] RAMSEY, F., *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, New-York, 1931.
- [15] REICHENBACH, H., *Elements of Symbolic Logic*, New-York, 1950.
- [16] RESCHER, N., Axioms for the Part Relation, *Philosophical Studies*, vol. 6, Minneapolis, 1955, pp. 8-11.

- [17] ROBINSON, A., *Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam, 1963.
- [18] STAHL, G., Aspectos formales de algunas paradojas semánticas, *Revista de Filosofía*, Santiago de Chile, 1958, vol. V, n° 1, pp. 31-41.
- [19] - Le problème de l'existence dans la logique symbolique, *Revue Philos. de la France*, Paris, 1960, n° 1, pp. 97-104.
- [20] - Temps et Existence, *Revue Philos. de la France*, Paris, 1961, n° 4, pp. 501-507.
- [21] - Linguistic Structures Isomorphic to Object Structures, *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. XXIV, n° 3, 1964, pp. 339-344.
- [22] - La identidad de lo indiscernible, *Revista de Filosofía*, Santiago de Chile, 1964, vol. XI, n° 1-2, pp. 3-9.
- [23] - La verdad desde el punto de vista lógico-matemático, *Revista de Filosofía*, Santiago de Chile, 1966, vol. XIII, n° 1, pp. 43-51.
- [24] - Intensional Universes, *Philosophy and Phenomenological Research*, Philadelphie, 1969, vol. XXX, n° 2, pp. 252-257.
- [25] - *Elementos de metamatemática*, Santiago de Chile, 1973.
- [26] - Termes temporels dans des systèmes fonctionnels, *Revue Philos. de la France*, Paris, 1974, n° 3, pp. 293-303.
- [27] - Quelques relations entre temporalité *de re* et temporalité *de dicto* et leur extension aux modalités, *Revue Philos. de la France*, Paris, 1976, n° 2, pp. 165-178.
- [28] - Identité et descriptions dans un système temporel et modal, *Revue Philos. de la France*.

- [29] TARSKI, A., *Logio, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956.
- [30] WHITEHEAD, A.N., et RUSSELL, B., *Principia Mathematica*, vol. I, Londres, 1925.
- [31] WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Londres, 1922.