SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

CLAUDE CHEVALLEY

Généralisation de Von Neumann

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. n° 6, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A8_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

F.- Généralisation de Von Neumann

Exposé fait par M. Claude CHEVALLEY le lundi 11 février 1935

I.- Rappels

On a vu que, R représentant un opérateur hermitique borné, on peut le représenter symboliquement sous la forme d'une intégrale de Stieltjes

$$(1) \qquad R = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\, F_\lambda$$

où les F_λ forment une famille de projecteurs avec les propriétés suivantes

1) Si $\lambda' \leq \lambda$, $F_{\lambda'} \leq F_\lambda$

2) Si $\lambda < \lambda_0$ $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda = F_{\lambda_0}$

3) F_λ est égal à 0 pour $-\infty < \lambda < m$, égal à 1 pour $M < \lambda < +\infty$.

La formule (1) signifie que, f étant une fonction quelconque, on a

$$(2) \qquad (Rf,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(F_\lambda f, f)$$

l'intégrale étant une intégrale de Stieltjes prise par rapport à la fonction monotone $(F_\lambda f, f)$. On en déduit facilement

$$(2') \qquad (Rf,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(F_\lambda f, g)$$

Ceci suggère naturellement de considérer F_λ comme une fonction monotone elle-même, mais dont la valeur serait un opérateur , et l'intégrale (1) comme une véritable intégrale de Stieltjes. Autrement dit, nous définirons d'abord une fonction d'intervalle I de la manière suivante : si I est l'intervalle $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1$, nous poserons $F_I = F_{\lambda_1} - F_{\lambda_0}$. Cette fonction est complètement additive, nous admettrons que l'on peut la prolonger de manière à obtenir une mesure généralisée et qu'on peut définir les intégrales par rapport à cette mesure : la formule (1) représentera alors l'une de ces intégrales.

Les calculs que nous ferons se justifient, en attendant que la théorie sur laquelle nous nous appuyons soit complètement édifiée, en les transcrivant à chaque fois en calculs faits sur des intégrales de Stieltjes ordinaires au moyen des formules (2) et (2').

II.- Les opérateurs normaux.

On appelle <u>normal</u> un opérateur A borné qui est permutable avec son associé A^*.

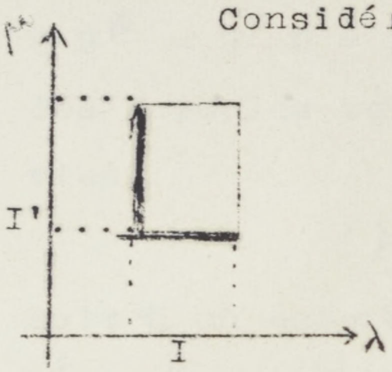
A étant un opérateur borné quelconque, les formules

$$R = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad S = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

définissent des opérateurs hermitiques :

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\, F_\lambda \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\, G_\lambda$$

Si A est normal, R et S sont permutables. Donc F_λ qui est fonction de R, est permutable avec G_μ qui est fonction de S.



Considérons (λ , μ) comme des coordonnées dans un plan, et dans ce plan, un rectangle demi-ouvert de côtés parallèles aux axes. Soient I, I' les intervalles projections des côtés sur ces axes . Posons

$$H_R = F_I \; G_{I'}$$

F_I et $G_{I'}$ étant permutables, c'est un projecteur. Ce projecteur est défini dans la famille $\boxed{J}$ des rectangles à demi-ouverts, et y constitue, comme on le voit sans peine, une fonction complètement additive. Nous admettrons encore que cette fonction se laisse prolonger en une mesure généralisée qui permet de définir des intégrales $\int p(\lambda, \mu)\, dH$.
H n'est autre que le produit des mesures généralisées F,G.

La mesure H permet d'exprimer maintenant R et S avec le même élément différentiel :

$$R = \int \lambda \, dH \qquad\qquad S = \int \mu \, dH$$

les intégrales étant étendues à tout le plan, ou au moins à un rectangle assez grand . On en déduit

$$(3) \qquad A = \int (\lambda + i\mu)\, dH \qquad\qquad A^* = \int (\lambda - i\mu)\, d\,H$$

et on peut considérer que ces formules donnent la représentation spectrale des opérateurs bornés normaux .

III.- Cas des opérateurs unitaires.

Un opérateur unitaire est un opérateur pour lequel

$U U^{*} = U^{*} U = 1$. Il est donc normal. Représentons-le par des formules telles que (3). En écrivant que $U U^{*} = 1$, il vient

$$(\lambda^2 + \mu^2 - 1)\, dH = 0$$

Soit $\mathfrak{U}$ un ensemble ouvert à distance finie du cercle Γ $\lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0$. $H_{\mathfrak{U}} = \int_{\mathfrak{U}} dH$ est un opérateur de projection. Supposons-le différent de 0 et prenons une fonction $f \neq 0$ telle que $H_{\mathfrak{U}} f = f$. Donc $(1 - H_{\mathfrak{U}})f = 0$; par suite si $\mathfrak{V}$ est un ensemble sans point commun avec $\mathfrak{U}$, $H_{\mathfrak{V}} f = 0$ (en vertu de l'additivité de H). Donc

$$0 = \int (\lambda^2 + \mu^2 - 1)\, d(Hf, f) = \int_{\mathfrak{U}} (\lambda^2 + \mu^2 - 1)\, d(Hf, f)$$

Or, dans $\mathfrak{U}$, $\lambda^2 + \mu^2 - 1$ reste compris entre deux limites de même signe. On doit donc avoir

$$|f| = (H_{\mathfrak{U}} f, f) = \int_{\mathfrak{U}} d(Hf, f) = 0$$

ce qui conduit à une contradiction.

Il résulte de là que $\int dH$ est nulle sur tout ensemble sans point commun avec Γ. Comme $\int dH$ étendue à tout l'espace est égale à 1, on a aussi $\int_{\Gamma} dH = 1$.

Prenons une représentation paramétrique

$$\lambda + i\mu = e^{2i\pi\rho} \qquad 0 \leq \rho \leq 1$$

de Γ et soit H_{ρ_0} la mesure-H de l'arc $0 \leq \rho < \rho_0$ de Γ. On peut écrire

$$\boxed{U = \int_{\Gamma} e^{2i\pi\rho}\, d H_{\rho}}$$

dans cette formule, les H_ρ sont des projecteurs satisfaisant aux conditions suivantes :

1) si $0 \leq \rho \leq \rho' \leq 1$, $H_\rho \leq H_{\rho'}$

2) si $\rho < \rho_0$, $\lim\limits_{\rho \to \rho_0} H_\rho = H_{\rho_0}$

3) $H_1 = 1$

IV.- Prolongements

On se propose d'étudier des opérateurs hermitiques R non bornés, donc qui ne sont pas définis pour toutes les valeurs de la fonction f. Dans ces conditions, le champ de définition de ces opérateurs va jouer un rôle fondamental.

On dit que <u>$\overline{R}$ prolonge R</u> si, pour toutes les fonctions f pour lesquelles Rf est défini, $\overline{R}f$ est aussi défini et égal à Rf.

R est dit <u>fermé</u> si, f_n étant une suite d'éléments du champ de définition de R, les conditions $f_n \to f$, $Rf_n \to f^*$ entrainent que Rf est défini et égal à f^*.

On démontre sans peine que :

<u>Un opérateur hermitique R possède un prolongement hermitique fermé $\overline{R}$ minimum, c'est-à-dire tel que tout prolongement hermitique fermé de R soit aussi prolongement de $\overline{R}$.</u>

$\overline{R}$ est univoquement déterminé par R. Nous supposerons toujours dans la suite que les opérateurs hermitiques dont nous parlerons seront linéaires fermés. D'autre part, les champs de définition seront toujours supposés (Cf. exposé C) partout denses dans l'espace de Hilbert .

V.- La transformation de Cayley.

Plaçons-nous d'abord dans un espace à un nombre fini de dimensions, et considérons une forme hermitique dont le tableau des coefficients est une matrice A. Si on fait sur les variables une transformation linéaire, définie par une matrice U, la forme A se change en $U A U^*$, où U^* est la matrice associée à U obtenue en intervertissant lignes et colonnes et en changeant i en -i. Il est naturellement important de chercher les équivalences de la forme avec elle-même c'est-à-dire les matrices U telles que

$$(1) \qquad U A U^* = A$$

Cette égalité donne des équations du 2ème degré entre les coefficients de U. Mais on peut le transformer en un problème linéaire de la manière suivante : de (1) on déduit

$$(U+1) A U^* = A (1+U^*) \qquad (U+1)A = U A (1+U^*)$$

Donc si $1-U$ possède une matrice inverse,

$$\frac{1+U}{1-U}A + A\frac{1+U^*}{1-U^*} = 0$$

et en posant

$$(2) \qquad R = i\,\frac{1+U}{1-U}$$

$$R A = A R^*$$

La détermination des matrices R est un problème linéaire .

Si $A = 1$, les matrices U sont les matrices unitaires et les matrices R sont les matrices hermitiques. Inversement la formule

$$(3) \qquad U = \frac{R - i}{R + i}$$

permet d'associer à toute matrice hermitique R une matrice unitaire U, car, d'après la définition, une matrice hermitique ne peut être le produit de la matrice unité par un nombre non réel.

Passons maintenant au cas d'ûne infinité de dimensions Les matrices unitaires deviennent les opérateurs <u>isométriques</u> c'est-à-dire les opérateurs linéaires U tels que $|Uf| = |f|$. Ces opérateurs sont donc bornés. Quant aux matrices hermitiques, elles se généralisent par les opérateurs hermitiques bornés ou non. La formule (3) va donc permettre d'étudier des opérateurs non bornés.

Soit donc R un opérateur hermitique quelconque et soit $\mathfrak{A}$ son domaine de définition. $R + i$ et $R - i$ appliquent bi-univoquement $\mathfrak{A}$ sur des variétés linéaires $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. En effet

$$|Rf + if| = |Rf - if| = \sqrt{|Rf|^2 + |f|^2} \neq 0 \quad \text{si} \quad f \neq 0$$

Par suite, si on pose $U(Rf + if) = Rf - if$, on définit un opérateur linéaire fermé dont le domaine de définition est le champ de valeurs $\mathcal{F}$ et qui est isométrique.

Inversement, soit W un opérateur isométrique fermé, dont le champ de définition est $\mathcal{E}$. Nous supposerons de plus que l'ensemble $\mathfrak{M}$ des $\varphi - W\varphi$ (φ dans $\mathcal{E}$) est partout dense. Dans ces conditions, l'équation $\psi = W\psi$ n'a pas de solution $\neq 0$, car on aurait, pour φ dans $\mathcal{E}$:

$$(\psi, \varphi - W\varphi) = (\psi,\varphi) - (\psi, W\varphi) = (\psi,\varphi) - (W\psi, W\varphi) = 0$$

et ψ serait orthogonale à $\mathfrak{M}$. Par suite, la formule

$$R(\varphi - W\varphi) = i\varphi + iW\varphi$$

définit un opérateur linéaire fermé dont le domaine de définition est $\mathfrak{M}$. Cet opérateur est hermitique : en effet

$$(R(\varphi - W\varphi), \psi - W\psi) = i(\varphi + W\varphi, \psi - W\psi) = i(W\varphi,\psi) - i(\varphi, W\psi)$$

qui se change en son imaginaire conjuguée si on échange φ et ψ.

On remarquera encore que, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ étant domaines de définition et domaines des valeurs d'opérateurs isométriques fermés sont des variétés linéaires fermées.

VI.- Opérateurs hypermaximaux

Comme on connait déjà la théorie des opérateurs unitaires, la transformation de Cayley va permettre d'étudier les opérateurs hermitiques R dont les transformés de Cayley U sont unitaires. Soit donc

$$W = \int_0^1 e^{2i\pi\rho}\, dH_\rho$$

où les H_ρ sont des opérateurs de projection jouissant des propriétés indiquées plus haut. φ parcourant toutes les fonctions, l'ensemble des $\varphi - U\varphi$ doit être partout dense. Il suffit pour celà que $W\varphi = \varphi$ n'ait pas de solution $\neq 0$; En effet supposons qu'il existe un vecteur ψ orthogonal aux $\varphi - U\varphi$:

$$0 = (\psi, \varphi - U\varphi) = (\psi, \varphi) - (\psi, U\varphi) = (U\psi, U\varphi) - (\psi ; U\varphi)$$
$$= (U\psi - \psi, U\varphi)$$

Or U étant unitaire, U_φ parcourt toutes les fonctions de l'espace de Hilbert. D'où $U\psi - \psi = 0$. Cette condition est encore équivalente à la suivante : 1 n'appartient pas au spectre ponctuel de U ; ou encore : H_ρ est continu pour $\rho = 0$.

Ceci posé, la formule (2), $\S$ W conduit à écrire formellement

$$R = \int_0^1 i\frac{1+e^{2i\pi\rho}}{1-e^{2i\pi\rho}}\, dH_\rho$$

Pour retrouver une forme analogue à celle des opérateurs hermitiques bornés, il est commode de poser $\rho = \frac{1}{\pi}$ arccotg λ et $F_\lambda = E - \frac{1}{\pi}$ arccotg λ ce qui donne l'expression formelle

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dF_\lambda$$

Cependant, on n'obtient ici qu'une expression formelle.

$\mathcal{E}$ étant un nombre > 0, posons $P_\varepsilon = H_{1-\varepsilon} - H_\varepsilon$. P_ε projette l'espace de Hilbert sur une variété linéaire $\mathfrak{M}_\varepsilon$. P_ε étant permutable avec les H_ρ, U et R définissent dans $\mathfrak{M}_\varepsilon$ considéré comme espace de Hilbert, des opérateurs W_ε, R_ε qui sont transformés de Cayley l'un de l'autre. La formule

$$R^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dF_\lambda$$

définit dans $\mathfrak{M}_\varepsilon$ un opérateur hermitique borné R^*_ε dont le transformé de Cayley $\frac{R^* - i}{R^* + i}$ est, en vertu des règles de calcul sur les opérateurs bornés, W_ε. Donc, $R^*_\varepsilon = R_\varepsilon$

Prenons une suite de nombres $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Soit φ une fonction quelconque, et $\varphi_n = P_{\varepsilon_n} \varphi$. H_ρ étant continu pour $\rho = 0$, on a $\lim. \varphi_n = \varphi$, donc

$$\lim. (\varphi_n - W \varphi_n) = \varphi - W \varphi, \quad \lim. (\varphi_n + W \varphi_n) = \varphi + W \varphi.$$

Or φ_n est dans $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Donc $R^* (\varphi_n - W \varphi_n) = R^*_{\varepsilon_n} (\varphi_n - W \varphi_n)$

$$\longrightarrow i (\varphi + W \varphi) = R (\varphi - W \varphi).$$

Donc si nous posons $f_n = \varphi_n - W \varphi_n$, $f = \varphi - W \varphi$, $R^* f_n$ tend vers Rf, et

$$|R^* f_n|^2 \rightarrow |Rf|^2$$

Mais

$$R^* f_n = \int_{-\mathrm{ctg}\,\pi\varepsilon}^{-\mathrm{ctg}\,\pi(1-\varepsilon)} \lambda \, dF_\lambda f$$

$$|R^* f_n|^2 = \int_{-\mathrm{ctg}\,\pi\varepsilon}^{-\mathrm{ctg}\,\pi(1-\varepsilon)} \lambda^2 \, d\, |F_\lambda f|^2$$

La seconde de ces intégrales est donc bornée, et on a

$$|Rf|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d\, |F_\lambda f|^2$$

Inversement, supposons que, pour une fonction f, l'intégrale précédente soit convergente. Posons $f_n = P_{\mathcal{E}_n} f$. f_n est dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}$, et est donc de la forme $\varphi_n - U\varphi_n$. De plus, on a $R f_n = i(\varphi_n + U\varphi_n)$, et quand $n \longrightarrow \infty$, $|Rf_n|$ et $|f_n|$ sont bornés. Il en résulte que $|\varphi_n|$ reste borné. On peut donc extraire de la suite (φ_n) une suite qui converge faiblement vers une fonction φ. $U\varphi_n$ converge alors → $U\varphi$, et $f_n = \varphi_n - U\varphi_n$ converge faiblement vers $\varphi - U\varphi$. Donc $f = \varphi - U\varphi$ appartient au domaine de définition R.

Donc, l'opérateur hypermaximal transformé de Cayley d'un opérateur unitaire U se représente par une formule de la forme

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dF_\lambda$$

où les F_λ sont des projections jouissant des propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1) \text{ si } \lambda' \leq \lambda, \; F_{\lambda'} \leq F_\lambda \\ 2) \text{ si } \lambda < \lambda_0, \; \lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda = F_{\lambda_0} \\ 3) \lim\limits_{\lambda \to -\infty} F_\lambda = 0, \; \lim\limits_{\lambda \to +\infty} F_\lambda = 1. \end{cases}$$

VII.- Opérateurs maximaux.- Condition d'hypermaximalité

Revenons à un opérateur hermitique fermé R quelconque. Soient U son transformé de Cayley, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les domaines de définition et des valeurs de U. Ce sont des variétés linéaires fermées.

Ceci posé, on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur hermitique $\overline{R}$ prolonge R est que son transformé de Cayley $\overline{U}$ prolonge U. Supposons qu'il en soit ainsi : les domaines de définition et des valeurs de $\overline{U}$ sont des variétés linéaires fermées $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Donc $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{F}}$ peuvent se mettre sous la forme $\mathcal{E} + \mathcal{E}_1$, $\mathcal{F} + \mathcal{F}_1$ où $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$ sont respectivement orthogonales à $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. $\overline{U}$ étant isométrique conserve l'orthogonalité de deux vecteurs et change $\overline{\mathcal{E}}$ en $\overline{\mathcal{F}}$; il doit donc appliquer bi-univoquement $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{F}_1$; parsuite $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}_1$ ont la même dimension (finie ou infinie).

Inversement, supposons qu'on puisse trouver deux variétés linéaires fermées $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$ de même dimensions orthogonales respectivement à $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Prenons dans $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$ des systèmes orthogonaux normaux complets $(\varphi_1, \dots \varphi_n, \dots)$ $(\psi_1, \dots \psi_n \dots)$ et posons

$$V(\sum a_i \varphi_i) = \sum a_i \psi_i$$

cette formule définit dans $\mathcal{E}_1$ un opérateur isométrique V qui applique bi-univoquement $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{F}_1$. L'opérateur linéaire égal à U sur $\mathcal{E}$, à V sur $\mathcal{E}_1$, est isométrique et prolonge U .

Définition

L'opérateur hermitique R est dit maximal s'il ne peut être prolongé par aucun autre opérateur hermitique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'une des variétés $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ soit égale à $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert tout entier. Car si elles sont toutes deux différentes de $\mathcal{H}$, et si par exemple, la variété $\mathcal{E}_1$ des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{E}$ est de dimension au plus égale à la variété $\mathcal{F}_1$ des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{F}$, on peut trouver dans la dernière une variété de même dimension que $\mathcal{E}_1$ et par suite prolonger U dans $\mathcal{E} + \mathcal{E}_1 = \mathcal{H}$ (considérations analogues si dim. $\mathcal{F}_1 <$ dim. $\mathcal{E}_1$; c'est alors le domaine des valeurs de U qui devient égal à $\mathcal{H}$).

Donc : <u>un opérateur hermitique non maximal peut être prolongé par un opérateur maximal, et cela d'une infinité de manières</u> (à cause de l'indétermination dans le choix des systèmes orthogonaux φ, ψ).

Supposons maintenant R maximal. Pour qu'il soit hypermaximal, il faut et il suffit que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ soient tous deux égaux à $\mathcal{H}$. Neumann indique pour cela un critère indépendant de la condition de Cayley. Il appelle élément de prolongement f de l'opérateur hermitique R une fonction f telle qu'il existe une fonction f^* jouissant de la propriété suivante : pour toute fonction g pour laquelle Rg est défini, on a

$$(f^*, g) = (f, Rg)$$

Si f est un élément de prolongement, f^* est bien déterminé par la donnée de f.

Ceci posé, si $\mathcal{J}(f,f^*) = 0$, on voit facilement qu'il existe un opérateur hermitique prolongeant R et défini pour f. La valeur de cet opérateur pour f est évidemment f^*. Par contre, un opérateur maximal peut encore avoir des éléments de prolongement f mais pour lesquels on ait $(f,f^*) \neq 0$. La condition nécessaire et suffisante d'hypermaximalité est qu'il n'en aie pas . On voit facilement que la condition est nécessaire . Supposons par exemple $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ $\mathcal{F} \neq \mathcal{H}$. Soit f une fonction orthogonale à $\mathcal{F}$. Donc $(f,U\varphi) = 0$ quelque soit φ . Donc

$$[f, i(\varphi + U\varphi)] = (f, i\varphi) = (-if, \varphi) = (-if, \varphi - U\varphi)$$

Donc f est un élément de prolongement .
