

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

CLAUDE CHEVALLEY

L'arithmétique dans une algèbre simple

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 10, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A10_0

© École normale supérieure, Paris, 1933-1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exemplaire n° 4

Institut Henri Poincaré

(Ne peut quitter la salle de lecture)

L'ARITHMETIQUE DANS UNE ALGÈBRE SIMPLE (suite)

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

Notations .- On désignera par K un corps qui sera ou un corps de nombres algébriques ou un corps de nombres réels; par \mathcal{A} une algèbre simple de centre K , qui sera algèbre complète de matrices sur un corps gauche \mathcal{A} . On désignera par \mathbb{Z} l'anneau des entiers de K .

Théorie des Groupes et des Algèbres

I. - ORDRE MAXIMAL.

On cherche à définir dans \mathcal{A} une notion d'entier. La première idée consiste à appeler entiers, les éléments de \mathcal{A} qui satisfont dans K à une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient soit 1. Mais on trouve qu'en général ces éléments ne forment pas un anneau. On est alors conduit à utiliser la notion d'ordre maximal, introduite

J. - L'ARITHMETIQUE DANS UNE ALGÈBRE SIMPLE

Exposé fait par M. Claude CHEVALLEY, le lundi 30 Avril 1934

D'une manière générale, on appelle ordre de \mathcal{A} un anneau \mathcal{O} , contenu dans \mathcal{A} , contenant \mathbb{Z} , qui est \mathbb{Z} -modulaire fini, et qui satisfait à la condition $\mathcal{A} = \mathcal{O} + \mathcal{J}$. La troisième condition peut se traduire de la manière suivante : soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une K -base minima de \mathcal{A} . Les éléments de \mathcal{O} étant mis sous la forme $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ ($x_i \in K$), il doit exister un entier ν de K tel que, pour

L'ARITHMETIQUE DANS UNE ALGÈBRE SIMPLE (suite)

Notations .- On désignera par k un corps qui sera ou un corps de nombres algébriques ou un corps de nombres ζ -adiques; par \mathcal{A} une algèbre simple de centre k , qui sera algèbre complète de matrices sur un corps gauche K . On désignera par \mathbb{Z} l'anneau des entiers de k .

I.- ORDRES MAXIMA .

On cherche à définir dans \mathcal{A} une notion d'entier. La première idée consiste à appeler entiers, les éléments de \mathcal{A} qui satisfont dans k à une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient soit 1. Mais on trouve qu'en général ces éléments ne forment pas un anneau. On est alors conduit à utiliser la notion d'ordre maximum, introduite par Weil dans le précédent exposé.

D'une manière générale, on appelle ordre de \mathcal{A} un anneau \mathcal{O} , contenu dans \mathcal{A} , contenant \mathbb{Z} , qui est \mathbb{Z} -module fini, et qui satisfait à la condition $k \cap \mathcal{O} = \mathbb{Z}$. La troisième condition peut se traduire de la manière suivante : soit (u_1, u_2, \dots, u_N) une k -base minima de \mathcal{A} ; Les éléments de \mathcal{O} étant mis sous la forme $\sum_{i=1}^N \alpha_i u_i$ ($\alpha_i \in k$), il doit exister un entier δ de k tel que, pour

tous les éléments de \mathcal{V} , les produits $\delta \alpha_i$ soient entiers. La dernière condition signifie que tout élément de \mathcal{D} peut être amené dans \mathcal{V} en le multipliant par un élément convenable de \mathcal{A} .

On appelle ordre maximum (o.m.) un ordre qui n'est contenu dans aucun autre ordre.

Il est clair que si \mathcal{V} est un ordre maximum, et φ un élément régulier de \mathcal{D} , $\varphi^{-1}\mathcal{V}\varphi$ est encore un ordre maximum. Dans le cas où k est un corps φ -adique et où $\mathcal{D} = k$, il n'y a, comme on l'a vu, qu'un o.m. Dans tous les autres cas, il y en a une infinité.

On appelle (Artin) idéal à gauche (ou à droite) par rapport à un o.m. \mathcal{V} un \mathcal{V} -module à gauche (ou à droite) fini contenu dans \mathcal{D} , et contenant des éléments de \mathcal{A} .

Nous démontrerons les propriétés suivantes des idéaux :

Si \mathcal{M} est un \mathcal{V} -idéal à gauche, l'ensemble des éléments α de \mathcal{D} tels que $\alpha\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ est \mathcal{V} ; l'ensemble des éléments α' tels que $\mathcal{M}\alpha' \subset \mathcal{M}$ est un ordre maximum \mathcal{V}' en général $\neq \mathcal{V}$.

\mathcal{V} et \mathcal{V}' s'appellent ordre à gauche et à droite de \mathcal{M} .

Un idéal \mathcal{M} possède un inverse, c'est à dire qu'il existe un idéal \mathcal{M}^{-1} tel que $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{V}$, $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{V}'$

\mathcal{M}^{-1} est l'ensemble des éléments β de \mathcal{D} tels que $\mathcal{M}\beta \subset \mathcal{V}$, $\beta\mathcal{M} \subset \mathcal{V}'$.

On remarquera que si un ordre \mathcal{V} est tel que tout \mathcal{V} -

idéal à gauche \mathcal{M} possède un inverse \mathcal{M}^{-1} tel que $\mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} = \mathcal{V}$, \mathcal{V} est maximum. En effet, si \mathcal{V}' est un ordre contenant \mathcal{V} , \mathcal{V}' est \mathcal{V} -idéal à gauche, et $\mathcal{V}' = \mathcal{V}'^2$. En multipliant par \mathcal{V}'^{-1} il vient : $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$.

Un idéal \mathcal{M} est entier quand son inverse contient 1. c'est à dire encore quand il est contenu dans ses ordres à droite et à gauche. Un o.m. \mathcal{V} étant \mathcal{A} -module fini, satisfait au Teilerkettensatz pour les idéaux entiers à gauche (ou à droite). Il en résulte que tout idéal entier $\mathcal{M} \neq \mathcal{V}$ est divisible par un idéal entier maximum \mathcal{P}_1 (c'est à dire qui n'est divisible par aucun autre idéal $\neq \mathcal{V}$) ou irréductible. Si $\mathcal{M} \mathcal{P}_1^{-1} \neq \mathcal{V}$, cet idéal qui est entier, est encore divisible par un idéal irréductible \mathcal{P}_2 , etc On en déduit, en vertu du Teilerkettensatz, que :

Tout \mathcal{V} -idéal à gauche entier se décompose en produit de facteurs irréductibles.

Cette décomposition n'est d'ailleurs pas unique.

II.- CAS DES CORPS \mathcal{K} -ADIQUES.

Pour établir les propositions précédentes, nous prendrons d'abord le cas où \mathcal{K} est un corps de nombres \mathcal{K} -adiques.

Nous introduirons un module de représentation $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{K} dans \mathcal{K} ; ce sera le module des formes linéaires à n variables u_1, u_2, \dots, u_n , à coefficients dans \mathcal{K} ; $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ est module droit, et toute base (v_1, v_2, \dots, v_n)

de \mathcal{M}_k conduit à une représentation, qui associe à l'élément φ de \mathcal{S} la matrice $(\alpha_{i,j})$ définie par :

$$v_i \varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Réciproquement, étant donnés n éléments w_1, w_2, \dots, w_n de \mathcal{M}_k , il y a un élément φ de \mathcal{S} et un seul tel que $v_i \varphi = w_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Nous désignerons par ν l'ordre maximum de \mathcal{K} , et nous considérerons les divers ν -modules finis \mathcal{R} de rang n contenus dans \mathcal{M}_k . Pour chacun d'eux, nous introduirons l'anneau $\tilde{\mathcal{V}}$ des éléments φ tels que $\mathcal{R}\varphi \subset \mathcal{R}\tilde{\mathcal{V}}$ est un anneau qui contient \mathcal{K} , et qui satisfait à $k\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{S}$. D'autre part, ν étant un anneau à idéaux tous principaux, \mathcal{R} possède par rapport à ν une base minima (v_1, v_2, \dots, v_n) et s'écrit :

$$\mathcal{R} = \nu v_1 \oplus \nu v_2 \oplus \dots \oplus \nu v_n$$

On voit alors que les éléments de $\tilde{\mathcal{V}}$ sont ceux qui, dans la représentation définie par la base (v_1, v_2, \dots, v_n) se représentent par des matrices à coefficients entiers. Il en résulte que $\tilde{\mathcal{V}}$ est ν -module fini, donc aussi \mathcal{K} -module fini, et est un ordre.

Soit \mathcal{M} un $\tilde{\mathcal{V}}$ -idéal à gauche. On constate tout de suite que $\mathcal{R}\mathcal{M}$ est un module \mathcal{R}' qui satisfait aux mêmes conditions que \mathcal{R} . Donc \mathcal{R}' se met sous la forme

$$\mathcal{R}' = \nu v'_1 \oplus \nu v'_2 \oplus \dots \oplus \nu v'_n$$

Soit φ l'élément de \mathcal{S} défini par les formules $v_i \varphi = v_i^!$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Il est clair que $\mathcal{R}\varphi = \mathcal{R}'$. Je dis que : $\varphi \in \mathcal{M}$.

1) On a $v_i \tilde{v} = \mathcal{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). En effet, soit u un élément quelconque de \mathcal{R} . L'élément φ de \mathcal{S} défini par $v_i \varphi = u$, $v_j \varphi = 0$ (si $j \neq i$) est dans \tilde{v} ; donc $v_i \tilde{v} \supset \mathcal{R}$. Comme d'autre part, $\mathcal{R}\tilde{v} \subset \mathcal{R}$, la formule est démontrée.

2) On en déduit $v_i \mathcal{M} = \mathcal{R}'$. Donc, pour chaque i , \mathcal{M} contient un élément φ_i tel que $v_i \varphi_i = v_i^!$. Soit θ_i l'élément de \tilde{v} défini par $v_i \theta_i = v_i$, $v_j \theta_i = 0$, ($j \neq i$). L'élément $\sum \theta_i \varphi_i$ est dans \mathcal{M} , et on a : $v_i (\sum \theta_i \varphi_i) = v_i^!$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Cet élément est donc égal à φ .

Donc $\mathcal{M}\varphi^{-1} \subset \tilde{v}$. Mais $\mathcal{R}\mathcal{M}\varphi^{-1} = \mathcal{R}'\varphi^{-1} = \mathcal{R}$, donc $\mathcal{M}\varphi^{-1} \subset \tilde{v}$. On en déduit $\mathcal{M} = \tilde{v}\varphi$: \mathcal{M} est un idéal principal.

L'ensemble des éléments φ tels que $\mathcal{M}\varphi \subset \tilde{v}$ est évidemment $\varphi^{-1}\tilde{v}$, et on a $\mathcal{M} \cdot \varphi^{-1}\tilde{v} = \tilde{v}$. Donc

\mathcal{M} possède un inverse : il en résulte comme nous l'avons vu, que \tilde{v} est un o.m. L'ordre à droite de $\mathcal{M} = \tilde{v}\varphi$ est évidemment $\varphi^{-1}\tilde{v}\varphi$, qui est un o.m., car la transformation par φ produit un isomorphisme intérieur de \mathcal{S} . Nous avons démontré dans le cas considéré les propositions annoncées. Nous avons vu de plus que tout idéal est principal, et qu'un o.m. est l'ensemble des éléments de \mathcal{S} .

qui, dans une certaine représentation de \mathcal{S} dans \mathcal{K} se représentent par des matrices à coefficients entiers.

Cherchons maintenant les idéaux bilatères. Reprenant les notations de plus haut, il est clair que l'ordre à droite de \mathcal{M} est l'ensemble des éléments θ de \mathcal{S} tels que $\mathcal{R}'\theta \subset \mathcal{R}'$. Si \mathcal{M} est bilatère, cet ensemble est \mathcal{V} . On a alors $v_1 \mathcal{V} = \mathcal{R}$, $v_1' \mathcal{V} = \mathcal{R}'$. Dans ceci, v_1' n'est assujéti qu'à être un des éléments d'une base minima de \mathcal{R}' . Or, soit \mathcal{M} l'ensemble des éléments α de \mathcal{V} tels que $\alpha v_1 \subset \mathcal{R}'$, \mathcal{M} est idéal par rapport à \mathcal{V} , et se met par suite sous la forme $\mathcal{V} \alpha_1$. On a vu, dans l'exposé sur les modules, que $\mathcal{V} \alpha_1 v_1$ est un sous-module primitif de \mathcal{R}' , et que par suite, αv_1 peut être pris pour premier élément d'une base minima de \mathcal{R}' . Donc $\alpha v_1 \mathcal{V} = \mathcal{R}' = \alpha \mathcal{R}$. On peut écrire aussi, $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \alpha$ ce qui montre que $\mathcal{M} = \mathcal{V} \alpha$. Donc :

Les idéaux bilatères par rapport à \mathcal{V} sont les $\mathcal{V} \alpha$ où α est l'idéal premier de \mathcal{K} .

III.- CAS DU CORPS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

Dans ce cas, la méthode introduite par Hasse, qui s'est montrée excessivement féconde, consiste à considérer successivement ce qui se passe dans tous les corps \mathcal{K} -adiques $k_{\mathfrak{p}}$ relatifs aux divers idéaux premiers \mathfrak{p} de \mathcal{K} .

Pour chaque \mathfrak{p} , nous introduirons $k_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ qui est une

algèbre simple \mathcal{F}_y de centre k_y . Les éléments de \mathcal{F}_y peuvent être considérés comme limites de suites d'éléments de \mathcal{F} , dans le sens suivant : soit (u_1, u_2, \dots, u_N) une k -base de \mathcal{F} . Une suite $\sum \alpha_i^{(m)} u_i$ d'éléments de \mathcal{F} convergera pour y si, pour chaque i , les $\alpha_i^{(m)}$ forment une suite convergente, dont la limite est α_i . La limite de la suite sera alors par définition l'élément $\sum \alpha_i u_i$ de \mathcal{F}_y . (On vérifie tout de suite que cette notion de limite est indépendante de la base choisie). E étant un ensemble d'éléments de \mathcal{F} , on désignera par E_y l'ensemble des limites des suites d'éléments de E .

Théorème fondamental de passage.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{F} -module fini tel que $k \mathcal{M} = \mathcal{F} \mathcal{M}$ est la partie commune à $\mathcal{F} \mathcal{P}$ et à tous les \mathcal{M}_y . Si \mathcal{N} est un autre module du même type que \mathcal{M} , on a pour presque tous les y , $\mathcal{M}_y = \mathcal{N}_y$. Enfin, si on se donne pour chaque y un k_y -module fini, $\tilde{\mathcal{N}}_y$ tel que $k_y \tilde{\mathcal{N}}_y = \mathcal{F}_y$, de manière à ce que, pour presque tous les y , on ait $\tilde{\mathcal{N}}_y = \mathcal{M}_y$, l'intersection avec $\mathcal{F} \mathcal{P}$ de tous les $\tilde{\mathcal{N}}_y$ est un module \mathcal{N} tel que, pour tous les y , on ait $\mathcal{N}_y = \tilde{\mathcal{N}}_y$.

1) Pour la première partie, il suffit de montrer que si φ est un élément de $\mathcal{F} \mathcal{P}$ contenu dans tous les \mathcal{M}_y , φ est dans \mathcal{M} . Soit (u_1, u_2, \dots, u_N) une k -base minima de $\mathcal{F} \mathcal{P}$, et $\varphi = \sum \alpha_i u_i$ ($\alpha_i \in k$). Si nous

mettons les éléments de \mathcal{R} sous la forme $\sum \beta_i u_i$, β_N décrit un idéal \mathcal{v}_N de \mathcal{A} . L'hypothèse $\varphi \in \mathcal{R}_\varphi$ entraîne $\alpha_N \in (\mathcal{v}_N)_\varphi$ quel que soit φ . On a donc $\alpha_N \in \mathcal{v}_N$

et par suite il y a un élément φ_N de \mathcal{R} dans lequel le dernier coefficient est α_N . On a $\varphi - \varphi_N = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha'_i u_i$ et $\varphi - \varphi_N \in \mathcal{R}_\varphi$ quel que soit φ . On en conclut comme plus haut qu'il y a un élément φ_{N-1} de \mathcal{R} de la forme

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_{N-2} u_{N-2} + \alpha'_{N-1} u_{N-1}.$$

On forme $\varphi - \varphi_{N-1} = \varphi_{N-2}$, et on continue de la même manière. Finalement, φ se met sous la forme d'une somme

$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N$ d'éléments de \mathcal{R} , ce qui démontre la proposition.

2) Prenons des bases (v_1, v_2, \dots, v_R) de \mathcal{R} et (w_1, w_2, \dots, w_S) de \mathcal{K} . Il existe deux éléments α, β de \mathcal{A} tels que :

- 1) $\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_R$ soient dans \mathcal{K}
- 2) $\beta w_1, \beta w_2, \dots, \beta w_S$ soient dans \mathcal{R} .

Supposons φ premier à $\alpha\beta$. Alors $\mathcal{R}_\varphi \subset \alpha^{-1} \mathcal{K}_\varphi, \mathcal{K}_\varphi \subset \beta^{-1} \mathcal{R}_\varphi$. Mais α^{-1}, β^{-1} sont dans \mathcal{K}_φ . On a donc $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{K}_\varphi$.

3) Prenons un élément $\sum \alpha_i u_i$ de \mathcal{K}_φ . Pour chaque m on a des décompositions $\alpha_i = \bar{\alpha}_i^{(m)} + \pi \beta_i$, $\bar{\alpha}_i^{(m)} \in \mathcal{K}$,

$\beta_i \in \mathcal{K}_\varphi$. (π représente un élément de \mathcal{A} divisible par φ). Il existe un entier m_0 tel que si $m > m_0$, les $\pi^m u_i$ soient dans \mathcal{R}_φ . On a alors $\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_m$

où $\bar{\varphi}_m = \sum \bar{\alpha}_i^{(m)} u_i$ est un élément de \mathcal{K} qui est dans \mathcal{K}_φ

si $m > m_0$. Il existe d'autre part pour chaque m un entier δ_m de \mathbb{N} tel que $\delta_m \varphi_m$ soit dans \mathcal{O}_y .
 Mettons δ_m sous la forme $\varphi^u \nu$, $(\nu, \varphi) = 1$. Alors si \mathcal{O}_y est un idéal premier $\neq \varphi$, il y a un entier δ'_m divisible par ν et premier à φ , $\delta'_m \varphi_m$ est dans \mathcal{O}_y et dans \mathcal{O}_y , si $\varphi \neq \varphi$, donc aussi dans presque tous les \mathcal{O}_y ; prenons un entier $\chi_{y\varphi}$ premier à φ tel que $\chi_{y\varphi} \delta'_m \varphi_m$ soit dans \mathcal{O}_y . Alors $\prod_{y\varphi} \chi_{y\varphi} \delta'_m \varphi_m = \delta'' \varphi_m$ est dans \mathcal{O} , et δ'' est premier à φ . Donc φ_m est dans \mathcal{O}_y . Comme $\varphi = \lim. \varphi_m$, φ est aussi dans \mathcal{O}_y .

Conséquences

Admettons l'existence dans \mathcal{O} d'un o.m. \mathcal{V} . Alors pour chaque φ , \mathcal{V}_φ est o.m. de \mathcal{O}_φ . En effet, si pour un φ , \mathcal{V}_φ était contenu dans un autre ordre, \mathcal{V}'_φ , l'intersection de \mathcal{O} avec tous les \mathcal{V}_φ ($\varphi \neq \varphi$) et avec \mathcal{V}'_φ serait un ordre \mathcal{V}' contenant \mathcal{V} et $\neq \mathcal{V}$, ce qui est impossible.

Soit \mathcal{M} un idéal à gauche par rapport à \mathcal{V} . Les ensembles des éléments α, α' , tels que $\alpha \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ $\mathcal{M} \alpha' \subset \mathcal{M}$ sont respectivement les intersections de \mathcal{O} avec tous les \mathcal{V}_φ et avec tous les ordres à droite \mathcal{V}'_φ des idéaux \mathcal{M}_φ . Le premier ensemble est \mathcal{V} ; le second est un \mathbb{N} -module fini de même rang que \mathcal{V} : c'est un ordre \mathcal{V}' qui est maximum puisque chaque \mathcal{V}'_φ est maximum. De même, l'ensemble des éléments β de \mathcal{O} tels que $\mathcal{M} \beta \subset \mathcal{V}$ est

l'intersection de \mathcal{J} avec tous les \mathcal{M}_y^{-1} . C'est évidemment un \mathcal{V} -idéal à droite \mathcal{M}^{-1} ; des formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_y \mathcal{M}_y^{-1} &= \mathcal{V}_y, & \mathcal{M}_y^{-1} \mathcal{M}_y &= \mathcal{V}_y', & \text{on déduit } \mathcal{M}^{-1} &= \mathcal{V} \\ \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M} &= \mathcal{V}' \end{aligned}$$

. Les théorèmes fondamentaux sur les idéaux sont donc établis.

Etant donné un idéal \mathcal{M} dont l'ordre à gauche est \mathcal{V} et un idéal premier \mathcal{y} de k , on désigne encore par \mathcal{M}_y l'idéal formé de l'intersection de \mathcal{J} avec tous les \mathcal{V}_y ($y \neq \mathcal{y}$) et avec \mathcal{M}_y . C'est un idéal qui a même ordre à gauche \mathcal{V} que \mathcal{M} , et qui n'est différent de \mathcal{V} que pour un nombre fini de \mathcal{y} . \mathcal{M}_y s'appelle composante de \mathcal{M} suivant \mathcal{y} . On a, si $y \neq \mathcal{y}$, $(\mathcal{M}_y)_{\mathcal{y}} = \mathcal{V}_y$.

Supposons maintenant \mathcal{M} bilatère, et formons le produit $\mathcal{M}' = \prod \mathcal{M}_y$, le produit étant étendu à tous les idéaux \mathcal{y} rangés dans un ordre quelconque. Alors, on a, pour chaque \mathcal{y} , $\mathcal{M}'_{\mathcal{y}} = \mathcal{M}_{\mathcal{y}}$, d'où $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$: un idéal bilatère est le produit de toutes ses composantes.

D'autre part, \mathcal{M} étant toujours bilatère, on a vu que \mathcal{M}_y est de la forme $\mathcal{y}^{*m} \mathcal{V}_y$, où \mathcal{y} est l'idéal premier du corps gauche \mathcal{K}_y^* sur lequel \mathcal{J}_y est algèbre de matrices. Ce corps gauche est contenu dans \mathcal{K}_y , et par suite, on peut écrire $\mathcal{M}_y = \bar{\mathcal{y}}^m \mathcal{V}_y$, où $\bar{\mathcal{y}}$ est l'idéal bilatère maximum (ou premier) de \mathcal{K}_y . On désigne encore par $\bar{\mathcal{R}}$ l'intersection de \mathcal{J} avec l'idéal $\bar{\mathcal{y}} \mathcal{V}_y$ de \mathcal{J}_y et avec tous les \mathcal{V}_y ($y \neq \mathcal{y}$). C'est l'idéal bilatère

Exemplaire n° 4

Institut Henri Poincaré

premier de k . On a $\mathcal{U}_y = \mathcal{P}^m_y$. Il résulte de là que :
 tout idéal bilatère se décompose en produit d'idéaux bi-
 latères premiers ; le produit de deux idéaux bilatères re-
 latifs à un même o.m. est commutatif et par suite la décom-
 position en idéaux premiers est unique à l'ordre près des
 facteurs. Tout idéal bilatère relatif à l'o.m. \mathcal{V} de
 \mathcal{S} est de la forme $\mathcal{V} = \mathcal{U}\mathcal{V}$, où \mathcal{U} est un idéal de k .
 Pour chaque idéal premier \mathcal{y} de k , il y a un idéal pre-
 mier bilatère \mathcal{P} de \mathcal{S} , et on a $\mathcal{y} = \mathcal{P}^e_y$, où e_y
 est le degré du corps gauche semblable à \mathcal{L}_y .

R. LES POSITIONS \mathcal{Z} DANS LES ALGÈBRES HYPERCOMPLEXES

Exposé fait par H.F. MARY, le 14 mai 1934