

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

PIERRE DOLBEAULT

Résolution d'un faisceau de formes différentielles méromorphes fermées

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 8, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A8_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION D'UN FAISCEAU
DE FORMES DIFFÉRENTIELLES MÉROMORPHES FERMÉES
par Pierre DOLBEAULT

Les résultats de cet exposé ont été obtenus en collaboration avec Guy ROBIN ; un résumé partiel en a été publié [3].

Introduction.

Soit X une variété analytique complexe, supposée paracompacte dans toutes les questions globales. On désigne par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Soient ρ un élément irréductible de $\mathcal{O}_x$ ($x \in X$) ; $[\rho]$ le germe d'ensemble analytique complexe de codimension 1 formé des zéros de ρ ; toute combinaison linéaire à coefficients entiers $\delta = \sum_k r_k [\rho_k]$ de tels germes est appelé un germe de diviseur. L'ensemble des germes de diviseurs sur X constitue un faisceau de groupes abéliens, appelé le faisceau des diviseurs de X , et noté D . En tout point $x \in X$, soit M_x le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$, la réunion M des M_x est le faisceau des fonctions méromorphes sur X ; c'est un faisceau de $\mathcal{O}$ -modules. Soit N le faisceau des groupes multiplicatifs de M , et soit $\mathcal{O}^*$ le faisceau des groupes multiplicatifs des germes de fonctions holomorphes sans zéro. On voit facilement qu'il existe un isomorphisme canonique $D \rightarrow N/\mathcal{O}^*$ qui applique δ sur la classe module $\mathcal{O}_x$ de $\prod_k \rho_k^{r_k}$. On appelle diviseur à coefficients entiers, toute combinaison linéaire localement finie, à coefficients entiers, d'ensembles analytiques de X de codimension 1. Les diviseurs constituent un groupe abélien canoniquement isomorphe à $H^0(X, D)$. Il est classique d'associer, comme suit, une classe de cohomologie de X à un diviseur : on considère les suites exactes :

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow N \rightarrow D \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0, \end{cases}$$

où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le faisceau constant des entiers, et e l'application $\varphi \mapsto \exp 2\pi i \varphi$. La classe de cohomologie $c(W)$ de $W \in H^0(X, D)$ est l'image de W par l'homomorphisme

$$H^0(X, D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \underline{\mathbb{Z}})$$

déduit des suites (1).

Les résultats suivants sont classiques :

Si X est une variété de Stein, tout élément de $H^2(X, \underline{\mathbb{Z}})$ est la classe de cohomologie d'un diviseur (J.-P. SERRE [7]).

Si X est une variété algébrique projective complexe sans singularité, tout élément du sous-groupe $H^{1,1}(X, \underline{\mathbb{Z}})$ de $H^2(X, \underline{\mathbb{Z}})$ formé des classes qui, par le théorème de de Rham, sont représentables par des formes de type $(1, 1)$, est la classe de cohomologie d'un diviseur (théorème de Lefschetz-Hodge [4]).

Plus généralement, se pose le problème suivant : Quelle est l'image, pour $q \geq 0$, de l'homomorphisme

$$H^q(X, D) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^{q+2}(X, \underline{\mathbb{Z}})$$

déduit des suites exactes (1), au moins pour certaines variétés X ?

Un problème plus faible consiste à chercher l'image de $H^q(X, D_{\mathbb{C}})$ (où

$$D_{\mathbb{C}} = D \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{C}$$

est le faisceau des diviseurs à coefficients complexes) dans

$$H^{q+2}(X, \underline{\mathbb{Z}}) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{C} = H^{q+2}(X, \mathbb{C}).$$

Dans le but d'approcher d'une solution de ce problème pour un certain sous-faisceau $D'_{\mathbb{C}}$ de $D_{\mathbb{C}}$, et afin de remplacer $H^q(X, D'_{\mathbb{C}})$ par un groupe de cohomologie de sections de faisceaux, on va construire une résolution fine de $D'_{\mathbb{C}}$.

1. Formes méromorphes et diviseurs.

Soit Ω^p le faisceau des p -formes différentielles holomorphes, c'est-à-dire : de type $(p, 0)$, à coefficients holomorphes ; on appelle faisceau des p -formes méromorphes, le faisceau

$$\mathbb{M}^p = \mathbb{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p,$$

autrement dit, pour tout $x \in X$, tout élément $\alpha \in \mathbb{M}_x^p$ s'écrit $f^{-1} \omega$, où $\omega \in \Omega_x^p$ et $f \in \mathcal{O}_x$, $f \neq 0$.

La différentielle extérieure du germe de p -forme méromorphe $f^{-1} \omega$ est

$$d(f^{-1} \omega) = f^{-1} d\omega - f^{-2} df \wedge \omega;$$

$f^{-1} \omega$ est dite d -fermée, si $d(f^{-1} \omega) = 0$, c'est-à-dire si $fd\omega - df \wedge \omega = 0$.

Il est clair que d est un homomorphisme de faisceaux : $\mathbb{M}^p \rightarrow \mathbb{M}^{p+1}$.

Soit M^p le noyau de $d : \mathbb{M}^p \rightarrow \mathbb{M}^{p+1}$.

Si $\alpha = z^{-1} \omega \in M_x^p$, où $\omega \in \mathbb{M}_x^p$ et où z est une coordonnée complexe locale nulle en x , alors

$$\alpha = A \wedge z^{-1} dz + dB,$$

où A est un germe de $(p-1)$ -forme holomorphe fermée ne dépendant ni de z ni de dz , et où B est un germe de $(p-1)$ -forme holomorphe.

Démonstration. - $\omega = a dz + b$, où a et b ne dépendent pas de dz ;

$$(2) \quad d(z^{-1} \omega) = 0$$

entraîne

$$z(da \wedge dz + db) - dz \wedge b = 0 ;$$

comme b ne contient pas de facteur dz , on a : $b = zb'$, où $b' \in \mathbb{M}_x^{p-1}$.

Mais, par la formule de Taylor par rapport à z au voisinage de x , on a, en désignant par (z, u) un système de coordonnées en x :

$$a(z, u) = a(0, u) + za'(z, u),$$

d'où

$$\omega = a(0, u) dz + z(a'(z, u) dz - b').$$

Alors (2) entraîne

$$da(0, u) \wedge dz + z(da' \wedge dz + db') = 0.$$

Comme $da(0, u) \wedge dz$ est indépendant de z , il est nul ; donc $da(0, u)$ ne contenant pas de terme en dz est nul, d'où

$$\alpha = A \wedge z^{-1} dz + B',$$

avec B' holomorphe fermé, donc égal à une différentielle exacte ; A est indépendant de z , et $dA = 0$.

1.1. - Plus généralement, si $\alpha = z^{-n} \omega$ avec $\omega \in \mathbb{M}_x^p$, et $d\alpha = 0$, on a

$$\alpha = A \wedge z^{-1} dz + d(z^{-n+1} C),$$

où A et $C \in \mathbb{M}_x^{p-1}$, et où $dA = 0$ ([2], chap. 3).

1.2. - Si $\alpha \in M_X^1$, il existe des germes $\rho_k \in \mathcal{O}_X$, irréductibles, tels que

$$\alpha = \omega \prod_k \rho_k^{-r_k}, \quad \text{où } \omega \in M_X^1 \text{ et } r_k \text{ entier } \geq 0.$$

Alors, par un argument de cohomologie de Čech, on met α sous la forme :

$$\alpha = \sum_k A_k \rho_k^{-1} d\rho_k + dB,$$

où $B \in M_X$, et où les A_k sont des constantes complexes ([2], chap. 3).

1.3. - Soit E^1 le faisceau des 1-formes holomorphes fermées ; $\alpha \in M_X^1$ étant donné à l'addition près d'un élément de E_X^1 , le germe de diviseur à coefficients complexes $\sum_k r_k [\rho_k]$ est bien déterminé, il en résulte l'isomorphisme

$$M^1/E^1 \simeq D_{\mathbb{C}} \oplus dM/E^1.$$

1.4. - Soit $\underline{M}^1$ le sous-faisceau de M^1 dont l'image dans M^1/E^1 est isomorphe à $D_{\mathbb{C}}$; on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}^* & \rightarrow & N & \rightarrow & D \rightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & E^1 & \rightarrow & \underline{M}^1 & \rightarrow & D_{\mathbb{C}} \rightarrow 0, \end{array}$$

dans lequel les deux premières flèches verticales désignent les homomorphismes $\varphi \mapsto (1/2\pi i)\varphi^{-1} d\varphi$, et le troisième l'injection. On a aussi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \underline{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \underline{\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & E^1 \rightarrow 0, \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales désignent : l'injection canonique, l'identité, et l'homomorphisme défini ci-dessus. Il en résulte le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^q(X, D) & \rightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{O}^*) & \rightarrow & H^{q+2}(X, \underline{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X, D_{\mathbb{C}}) & \rightarrow & H^{q+1}(X, E^1) & \rightarrow & H^{q+2}(X, \underline{\mathbb{C}}). \end{array}$$

L'homomorphisme $H^q(X, D_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^{q+2}(X, \underline{\mathbb{C}})$ ci-dessus permet (pour $q = 0$) de prolonger aux diviseurs à coefficients complexes la définition de la classe de cohomologie complexe d'un diviseur (à coefficients entiers).

2. Formes semi-méromorphes régulières.

2.1. - Le faisceau A des formes différentielles C^∞ sur X est un faisceau de $\mathcal{O}$ -modules ; le faisceau $M \otimes_{\mathcal{O}} A$ est appelé le faisceau des formes différentielles semi-méromorphes ; il est somme directe des faisceaux $M \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q}$, où $A^{p,q}$ est le sous-faisceau des formes de type (p, q) ((d'après la distributivité de $\otimes$ par rapport à $\oplus$) ; A , identifié à $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} A$, est un sous-faisceau de $M \otimes_{\mathcal{O}} A$. La différentiation extérieure est définie comme pour les formes méromorphes.

Pour tout point $x \in X$, soit $\mathbb{S}_x$ l'ensemble des germes de sous-variétés analytiques complexes (sans singularité) de codimension 1. Soit $m_{x,s}^{p,q}$ le sous- $\mathcal{O}_x$ -module de $(M \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q})_x$ formé des germes $\rho^{-r} \psi^{p,q}$, où $\psi^{p,q} \in A_x^{p,q}$, où r est un entier ≥ 0 , et ρ un germe de coordonnée complexe locale en x tel que $[\rho] = s$. Soit

$$m_x^{p,q} = \sum_{s \in \mathbb{S}_x} m_{x,s}^{p,q}$$

le sous- $\mathcal{O}_x$ -module de $(M \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q})_x$ engendré par les $m_{x,s}^{p,q}$. Posons

$$m^{p,q} = \bigcup_{x \in X} m_x^{p,q}.$$

Alors, $m^{p,q}$ est un sous-faisceau de $M \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q}$, appelé (suivant L. SCHWARTZ [6]) faisceau des formes différentielles semi-méromorphes régulières de type (p, q) .

2.2. - Le sous-faisceau de $M \otimes_{\mathcal{O}} A^p$, défini de la même façon, est dit faisceau des p-formes méromorphes régulières, et noté m^p ; c'est un sous-faisceau de $m^{p,0}$; on désignera par m^p le sous-faisceau des éléments d-fermés de m^p .

Soit μ^1 le faisceau des 1-formes méromorphes fermées du type suivant : Si $\alpha \in \mu^1$, alors

$$\alpha = \omega \prod_k \rho_k^{-r_k},$$

où ρ_k est un germe de fonction coordonnée locale, où ω est holomorphe, et où $d\alpha = 0$; alors on montre qu'il existe un germe C de fonction holomorphe et des constantes complexes A_k tels que

$$\alpha = \sum_k A_k \rho_k^{-1} d\rho_k + d(C \prod_k \rho_k^{-r_k+1}) \quad \text{avec } r_k \geq 1.$$

En particulier, le faisceau μ^1 contient le sous-faisceau $\underline{m}^1$ pour les éléments duquel tous les r_k sont égaux à 1 ; on a

$$\underline{m}^1 = m^1 \cap \underline{\underline{m}}^1 .$$

Le faisceau $\underline{m}^1/E^1$ est isomorphe au faisceau des diviseurs à coefficients complexes D'_C dont les supports des germes sont des réunions de germes de variétés analytiques complexes de codimension 1 .

2.3. - Soit $\alpha \in m^1$, alors

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi_k ,$$

les $[\rho_k]$ étant distincts, les entiers r_k strictement positifs, et les germes $\rho_k^{-r_k} \varphi_k$ irréductibles ; la condition $d\alpha = 0$ entraîne : pour tout k , $d(\rho_k^{-r_k} \varphi_k)$ est holomorphe fermé (car deux formes méromorphes ayant des ensembles polaires distincts ne peuvent coïncider) ; donc, il existe des germes holomorphes ψ_k tels que

$$d(\rho_k^{-r_k} \varphi_k) = d\psi_k ,$$

d'où

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi'_k ,$$

avec, pour tout k ,

$$d(\rho_k^{-r_k} \varphi'_k) = 0 .$$

Alors, d'après 1.1, on a

$$\rho_k^{-r_k} \varphi'_k = A_k \rho_k^{-1} d\rho_k + d(\rho_k^{-r_k+1} B_k) ,$$

avec B_k holomorphe, d'où

$$m^1/E^1 \approx D'_C \subset dm^C/E^1 .$$

On se propose de former une résolution fine des faisceaux m^1/E^1 , et $\underline{m}^1/E^1 \approx D'_C$.

3. Résolutions fines du faisceau des 1-formes méromorphes régulières fermées et du faisceau D'_C .

3.1. - La construction de la résolution repose sur le lemme suivant :

LEMME A. - En tout point $x \in X$, on a

$$m_x^{p,q}/A_x^{p,q} = \bigoplus_{s \in \mathbb{S}_x} (m_{x,s}^{p,q}/A_x^{p,q}) .$$

Remarque. - Dans le cas méromorphe, ce lemme est trivial (cf. 2.3).

Notations. - On pose

$$n^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^q m^{p+r,q-r} ; \quad n_{x,s}^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^q m_{x,s}^{p+r,q-r} ,$$

$$B^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^q A^{p+r,q-r} ,$$

$$\Delta^{p,q} = n^{p,q}/B^{p,q} .$$

3.2. - THÉOREME. - Sur une variété analytique complexe X , le faisceau m^1/E^1 possède la résolution fine

$$0 \rightarrow m^1/E^1 \xrightarrow{j} \Delta^{1,0} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Delta^{1,q} \xrightarrow{d} \dots ,$$

dans laquelle j est définie par l'injection canonique $i : m^1 \rightarrow m^{1,0}$, et d par la différentiation extérieure : $n^{1,q} \rightarrow n^{1,q+1}$.

Démonstration. - On utilise les résultats connus suivants :

(a) La suite $A^{p,q-1} \xrightarrow{d''} A^{p,q} \xrightarrow{d''} A^{p,q+1}$ est exacte (lemme de Grothendieck) ([2], chap. 1).

(b) $0 \rightarrow E^1 \rightarrow B^{1,0} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} B^{1,q} \rightarrow \dots$ est une résolution fine de E^1 ([2], chap. 1).

(c) Il résulte de 1.1 que si ρ est un germe de coordonnée locale, et si $\omega^p \in \mathcal{A}^p$ tels que $d(\rho^{-r} \omega^p) = 0$, avec $p \geq 2$, il existe $\omega^{p-1} \in \mathcal{A}^{p-1}$ tel que,

$$\text{si } r \geq 2 , \quad \rho^{-r} \omega^p = d(\rho^{-r+1} \omega^{p-1}) ,$$

$$\text{si } r = 1 , \quad \rho^{-1} \omega^p = d(\rho^{-1} \omega^{p-1}) \quad ([2], \text{ chap. 3}).$$

(d) Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont trois complexes de modules avec des morphismes tels que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

soit exacte, alors, si deux des complexes de modules sont acycliques, le troisième l'est aussi ([5], chap. 4, théorème 6).

(i) La suite $0 \rightarrow m^1/E^1 \xrightarrow{j} \Delta^{1,0} \xrightarrow{d} \Delta^{1,1}$ est exacte.

D'après (b) et (d), il suffit de prouver que

$$0 \rightarrow m^1 \xrightarrow{i} n^{1,0} \xrightarrow{d} n^{1,1}$$

est exacte. Cela résulte de la proposition suivante :

Le sous-faisceau des éléments d-fermés de $m^{p,0}$ est m^p .

Preuve. - Soit

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} \in m^{p,0} \quad \text{tel que} \quad d\alpha = 0 ;$$

on a $d''\alpha = 0$, d'où

$$\sum_k \rho_k^{-r_k} d''\varphi_k^{p,0} = 0 .$$

Alors, $\rho_k^{-r_k} d''\varphi_k^{p,0}$ est C^∞ , d'après le lemme A appliqué à $m^{p,1}$, et d'' -fermé, donc égal à $d''\psi_k^{p,0}$, où $\psi_k^{p,0} \in A^{p,0}$ (d'après (a)), avec

$$\sum_k d''\psi_k^{p,0} = d'' \sum_k \psi_k^{p,0} = 0 ,$$

donc $\sum_k \psi_k^{p,0}$ est holomorphe, et

$$\alpha = \sum_k (\rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} - \psi_k^{p,0}) + \sum_k \psi_k^{p,0} .$$

Alors

$$d''(\rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} - \psi_k^{p,0}) = 0 ,$$

et α est une p -forme méromorphe régulière et d -fermée.

(ii) Pour $s \in \mathbb{S}_x$, la suite $n_{x,s}^{p,0} \xrightarrow{d} n_{x,s}^{p,1} \xrightarrow{d} n_{x,s}^{p,2}$ est exacte.

Soit $\theta = \rho^{-r} \varphi^{p,1} + \rho^{-s} \varphi^{p+1,0}$; $d\theta = 0$ équivaut à :

$$(\alpha) \quad \rho^{-r} d''\varphi^{p,1} = 0 ;$$

$$(\beta) \quad d'(\rho^{-r} \varphi^{p,1}) + d''(\rho^{-s} \varphi^{p+1,0}) = 0 ;$$

$$(\gamma) \quad d'(\rho^{-s} \varphi^{p+1,0}) = 0.$$

(α) entraîne "il existe $\psi^{p,0} \in A^{p,0}$ tel que $\varphi^{p,1} = d''\psi^{p,0}$ " (d'après (a)) ;

(β) entraîne " $\rho^{-s} \varphi^{p+1,0} - d'(\rho^{-r} \psi^{p,0}) = \rho^{-t} \psi^{p+1,0}$ ", où $\psi^{p+1,0}$ est holomorphe.

(γ) entraîne " $\rho^{-t} \psi^{p+1,0}$ est fermée".

Alors, d'après (c), il existe $\tau \in m_x^p \cap m_{x,s}^{p,0}$ tel que $d\tau = \rho^{-t} \psi^{p+1,0}$, d'où

$$\theta = d(\rho^{-r} \psi^{p,0} + \tau).$$

(iii) La suite $n^{p,0} \xrightarrow{d} n^{p,1} \xrightarrow{d} n^{p,2}$ est exacte (à l'aide du lemme A et de (ii)).

(iv) La suite $m^{p,q-1} \xrightarrow{d''} m^{p,q} \xrightarrow{d''} m^{p,q+1}$ est exacte.

A l'aide du lemme A, on est ramené à démontrer que, pour $s \in \mathbb{S}_x$, la suite

$$m_{x,s}^{p,q-1} \xrightarrow{d''} m_{x,s}^{p,q} \xrightarrow{d''} m_{x,s}^{p,q+1}$$

est exacte, ce qui résulte de (a).

(v) La suite $n^{p,q} \xrightarrow{d} n^{p,q+1} \xrightarrow{d} n^{p,q+2}$ est exacte.

Cela se démontre par récurrence descendante sur p , compte tenu de

$$n^{p,q} = m^{p,q} \oplus n^{p+1,q-1},$$

à l'aide de (iv) et de (iii).

La résolution est fine, parce que les faisceaux $A^{p,q}$ sont fins ; cela termine la démonstration.

3.3. - Soit $\underline{m}^{p,q}$ le sous-faisceau de $m^{p,q}$ constitué des germes

$$\sum_k \rho_k^{-p} \varphi_k^{p,q},$$

où $\varphi_k^{p,q} \in A^{p,q}$, et où ρ_k est un germe de fonction coordonnée complexe locale ; on pose

$$\underline{n}^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^q \underline{m}^{p+r,q-r};$$

alors d applique $\underline{n}^{p,q}$ dans $\underline{n}^{p,q+1}$. Soit $D^{p,q} = \underline{n}^{p,q}/B^{p,q}$.

La démonstration de 3.2 est valable pour $D'_C \approx \underline{m}^1/E^1$ au lieu de m^1/E^1 , et $\underline{n}^{1,q}$ au lieu de $n^{1,q}$, d'où le théorème suivant :

3.4. - THÉOREME. - Sur une variété analytique complexe X , le faisceau D'_C possède la résolution fine

$$(3) \quad 0 \rightarrow D'_C \xrightarrow{j} D^{1,0} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} D^{1,q} \xrightarrow{d} \dots,$$

dans laquelle j est définie par l'injection canonique $i : \underline{m}^1 \rightarrow \underline{m}^{1,0}$, et d par la différentiation extérieure.

4. Résumé de la preuve du lemme A.

4.1. - On a

$$m_x^{p,q}/A_x^{p,q} = \sum_{s \in S_x} (m_{x,s}^{p,q}/A_x^{p,q}) ;$$

il s'agit de montrer que la somme est directe, c'est-à-dire :

$$(4) \quad \alpha = \rho^{-r} \varphi^{p,q} = \sum_{\substack{k \\ [\rho_k] \neq [\rho]}} \rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,q}$$

entraîne $\alpha \in A_x^{p,q}$.

On note de la même façon des fonctions sur un voisinage U de x et les germes qu'elles induisent en x .

Soit

$$S_\rho = \{y \in U \mid \exists k \text{ tel que } [\rho_k] \neq [\rho] ; \rho_k(y) = \rho(y) = 0\} ;$$

c'est un sous-ensemble analytique de $[\rho]$ qui est rare et fermé. Mais $\rho^{-r} \varphi^{p,q}$ est égale, à cause du dernier membre de (4), à une forme C^∞ sur $U \setminus S_\rho$; alors $\rho^{-r} \varphi^{p,q}$ est C^∞ sur U , à cause du théorème suivant :

4.2. - THÉOREME. - Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, ρ une fonction coordonnée complexe sur U , φ une fonction C^∞ sur U , S un sous-ensemble rare et fermé de $[\rho]$. Alors, si la fonction semi-méromorphe $\rho^{-p} \varphi$ (p entier > 0) est égale, sur $U \setminus [\rho]$, à la restriction d'une fonction C^∞ sur $U \setminus S$, elle est égale à la restriction, à $U \setminus [\rho]$, d'une fonction C^∞ sur U tout entier.

Supposons le théorème démontré pour p ; si $\rho^{-p-1} \varphi$ est prolongeable de $U \setminus [\rho]$ à $U \setminus S$ en une fonction C^∞ , il en est de même de $\rho(\rho^{-p-1} \varphi) = \rho^{-p} \varphi$, et on

sait (hypothèse de récurrence) que $\rho^{-p} \varphi$ est prolongeable à U en une fonction Φ , C^∞ ; il reste à montrer que $\rho^{-1} \Phi$ est prolongeable à U , sachant qu'elle est prolongeable de $U \setminus [\rho]$ à $U \setminus S$; il suffit donc de montrer le théorème pour $p = 1$.

On utilise un développement de Taylor en ρ , $\bar{\rho}$, de la fonction φ :

$$\varphi = Q_0 + \rho R_{1,0} + \bar{\rho} R_{0,1},$$

où Q_0 est indépendant de ρ , valable dans un voisinage W de $[\rho]$ dans U ; la fonction Q_0 est nulle sur $[\rho] \setminus S$, donc sur $[\rho]$ (et même sur W), puisqu'elle est continue. De sorte que :

$$\rho^{-1} \varphi = R_{1,0} + (\rho^{-1} \bar{\rho}) R_{0,1}.$$

On achève la démonstration à l'aide des lemmes suivants :

(a) Soient v_j ($j = 0, \dots, p$) des fonctions continues sur un ouvert U telles que

$$w = \sum_{j=0}^p v_j (\rho^{-1} \bar{\rho})^j$$

soit égale, sur $U \setminus [\rho]$, à la restriction d'une fonction continue w' sur $U \setminus S$, alors :

- 1° $v_1, \dots, v_p$ s'annulent sur $[\rho]$;
- 2° Il existe une fonction w'' continue sur U , égale à w' sur $U \setminus S$, et telle que, sur $[\rho]$, on ait

$$w''|_{[\rho]} = v_0|_{[\rho]}.$$

(b) Soit Φ une fonction semi-méromorphe sur un ouvert U tel que :

- 1° Sur un voisinage W de $[\rho]$ dans U , on ait :

$$(5) \quad \Phi = \sum_{t=0}^r R_t (\rho^{-1} \bar{\rho})^t,$$

où R_t est C^∞ sur W , pour $t = 0, \dots, r$;

- 2° $\Phi = \Phi'|_{W \setminus [\rho]}$, où Φ' est C^1 sur $W \setminus S$, alors

$$\Phi'' = \begin{cases} \Phi' & \text{sur } W \setminus S \\ R_0|_{[\rho]} & \text{sur } [\rho] \end{cases}$$

est C^1 sur W tout entier. Les dérivées partielles de φ sont des fonctions semi-méromorphes de la forme (5), C^∞ sur $U \setminus [\rho]$, et prolongeables sur $U \setminus S$ en des fonctions continues.

5. Application du théorème 3.4.

5.1. - Supposons X paracompacte. Considérons le complexe des sections de (3) :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, D'_C) \rightarrow \Gamma(X, D^{1,0}) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma(X, D^{1,q}) \rightarrow \dots$$

Soit $\mathcal{K}^{1,q}(X, \underline{\mathbb{C}})$ le q -ième groupe de cohomologie de ce complexe. De même, soit $\mathcal{K}^{1,q+1}(X, \underline{\mathbb{C}})$ le $(q+1)$ -ième groupe de cohomologie du complexe des sections de la résolution

$$0 \rightarrow E^1 \rightarrow B^{1,0} \rightarrow B^{1,1} \rightarrow \dots$$

Alors, d'après le théorème de de Rham (formel), on a des isomorphismes verticaux tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^{1,q}(X, \underline{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{h^{1,q}} & \mathcal{K}^{1,q+1}(X, \underline{\mathbb{C}}) \\ \approx \downarrow & & \approx \downarrow \\ H^q(X, D'_C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X, E^1), \end{array}$$

où δ et $h^{1,q}$ désignent les homomorphismes de connexion, soit commutatif ou anticommutatif suivant que q est impair ou pair. Cela se déduit du diagramme suivant .

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & E^1 & \rightarrow & m^1 & \rightarrow & D'_C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B^{1,0} & \rightarrow & n^{1,0} & \rightarrow & D^{1,0} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B^{1,1} & \rightarrow & n^{1,1} & \rightarrow & D^{1,1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array},$$

dans lequel les suites verticales sont des résolutions fines.

On peut décrire $h^{1,q}$ ainsi : soit $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}^{1,q}(X, \underline{\mathbb{C}})$, et soit $\gamma \in \Gamma(X, D^{1,q})$ un représentant de $\bar{\gamma}$, alors $d\gamma = 0$; soit $\mu \in \Gamma(X, n^{1,q})$ dont l'image par l'épimorphisme

$$\Gamma(X, n^{1,q}) \rightarrow \Gamma(X, D^{1,q})$$

est γ ; alors

$$d\beta = \alpha \in \Gamma(X, B^{1,q+1}),$$

et $h^{1,q}(\overline{\gamma})$ est la classe de α dans $K^{1,q+1}(X, \underline{\mathbb{C}})$.

Cela résoud, pour le faisceau D'_C , un problème posé dans l'introduction : remplacer $H^q(X, D'_C)$ par un groupe de cohomologie des sections d'un autre faisceau, et cela donne une factorisation de l'homomorphisme canonique

$$H^q(X, D'_C) \rightarrow H^{q+1}(X, E^1).$$

5.2. - On va montrer, sur un exemple, que $\text{Im } h^{1,q}$ peut ne pas être réduit à $\{0\}$.

L'homomorphisme de faisceaux

$$\underline{n}^{1,0} \times B^{0,q} \rightarrow \underline{n}^{1,q} \quad (\text{resp. } B^{1,1} \times B^{0,q} \rightarrow B^{1,q+1}),$$

qui applique (α, β) sur $\alpha \wedge \beta$, définit une application $\underline{\mathbb{C}}$ -bilinéaire telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^{1,0}(X, \underline{\mathbb{C}}) \times K^{0,q}(X, \underline{\mathbb{C}}) & \rightarrow & \mathcal{K}^{1,q}(X, \underline{\mathbb{C}}) \\ (h^{1,0}, i) \downarrow & & \downarrow h^{1,q} \\ K^{1,1}(X, \underline{\mathbb{C}}) \times K^{0,q}(X, \underline{\mathbb{C}}) & \rightarrow & K^{1,q+1}(X, \underline{\mathbb{C}}), \end{array}$$

où i désigne l'identité ; on a $\mathcal{K}^{1,0}(X, \underline{\mathbb{C}}) \approx H^0(X, D'_C)$.

Supposons que X soit une variété algébrique projective, sans singularité, munie de la métrique kählérienne habituelle. Sur X , on identifie les éléments de $K^{p,q}(X, \underline{\mathbb{C}})$ et les formes harmoniques qui les représentent dans le théorème de Hodge.

Soit W un diviseur de X dont le support est, au voisinage de chaque point, la réunion de sous-variétés analytiques complexes de codimension 1 ; soient α l'image de W dans $\mathcal{K}^{1,0}(X, \underline{\mathbb{C}})$, et $\omega^{1,1}$ sa classe de cohomologie complexe ; on a $h^{1,0}(\alpha) = \omega^{1,1}$. Alors, pour toute forme harmonique $\varphi \in H^q(X, \underline{\mathbb{C}}) = K^{0,q}(X, \underline{\mathbb{C}})$, on a

$$h^{1,q}(\alpha \wedge \varphi) = \omega^{1,1} \wedge \varphi.$$

Donc

$$\text{Im } h^{1,q} \supset \{\omega^{1,1} \wedge \varphi ; \varphi \in H^q(X, \underline{\mathbb{C}})\}.$$

En particulier, si P est une section hyperplane, la classe de cohomologie $\omega^{1,1}$ du diviseur $1.P$ est la forme fondamentale de X ([1], chap. 9, § 6). D'où le théorème suivant :

THÉOREME. - Si X est une variété algébrique projective sans singularité, l'image de $h^{1,q} \circ i_1$

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, D'_c) & & \\ i_1 \downarrow \approx & & \\ K^{1,q}(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{h^{1,q}} & K^{1,q+1}(X, \mathbb{C}), \end{array}$$

contient le sous-espace vectoriel des classes de cohomologie non primitives ([8], p. 75) de X .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALDASSARI (M.). - Algebraic varieties. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 12).
- [2] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 83-130 ; t. 65, 1957, p. 282-330 (Thèse Sc. math. Paris, 1955).
- [3] DOLBEAULT (P.) et ROBIN (G.). - Sur le faisceau des diviseurs à coefficients complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 1452-1455.
- [4] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.C.). - Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1954, p. 872-877.
- [5] NORTHCOTT (D. C.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1960.
- [6] SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Géométrie différentielle [52. 1953. Strasbourg], p. 185-195. - Paris, C. N. R. S., 1953.
- [7] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles], p. 57-68. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [8] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 6).