

# SÉMINAIRE LELONG.

## ANALYSE

JEAN-PIERRE RAMIS

**Les théorèmes de Weierstrass pour les anneaux de séries formelles  
et de séries convergentes sur un espace vectoriel normé**

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 7 (1966-1967), exp. n° 2, p. 1-16

[http://www.numdam.org/item?id=SL\\_1966-1967\\_\\_7\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A2_0)

© Séminaire Lelong. Analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LES THÉORÈMES DE WEIERSTRASS  
 POUR LES ANNEAUX DE SÉRIES FORMELLES ET DE SÉRIES CONVERGENTES  
 SUR UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

par Jean-Pierre RAMIS

Soit  $\underline{K}$  un corps commutatif de caractéristique nulle, topologique, séparé. On désignera par (e. v. t.  $\underline{K}$ ) la catégorie des espaces vectoriels topologiques sur  $\underline{K}$ .

I. Polynômes et séries formelles

1. Généralités.

Rappelons d'abord quelques résultats :

(a) Applications polynomiales (cf. [1] ou [2]). - Soient

$$E \text{ et } F \in \text{Ob}(\text{e. v. t. } \underline{K}) .$$

Définition. - Une application  $f$  (non nécessairement continue) de  $E$  dans  $F$  est dite polynomiale homogène de degré  $n$ , s'il existe une application  $n$ -linéaire symétrique  $\tilde{f}$  de  $E^n$  dans  $F$  telle que  $f(x) = \tilde{f}(x, \dots, x)$ .

Autrement dit,  $f$  se factorise :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow \Delta & \nearrow \tilde{f} \\ & E^n & \end{array} \quad (\Delta \text{ étant l'application diagonale}) .$$

Dans ces conditions,  $\tilde{f}$  est unique et se calcule par :

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_n} \dots \Delta_{x_1} f(x) ,$$

où l'on a posé

$$\Delta_x h(y) = \frac{1}{2} [h(y+x) - h(y-x)] .$$

PROPOSITION 1. - Pour une application polynomiale homogène (de degré  $n$ ) de  $E$  dans  $F$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est continue ;                      (i')  $\tilde{f}$  est continue ;  
(ii)  $f$  est continue en  $0$  .                      (ii')  $\tilde{f}$  est continue en  $(0, \dots, 0)$  .

Quelques notations. - L'ensemble des applications polynomiales homogènes continues de degré  $n$  de  $E$  dans  $F$  sera noté  $\mathcal{L}^n(E, F)$ , il est canoniquement muni (en tant que sous-espace de  $\mathcal{C}(E, F)$ ) d'une structure d'e. v. t. sur  $\underline{\mathbb{K}}$ . Nous poserons  $\mathcal{L}^0(E, F) = F$ . L'ensemble des applications polynomiales homogènes de degré  $n$  de  $E$  dans  $F$  sera noté  $L^n(E, F)$ .

(b) Polynômes et séries formelles à "variable" dans un e. v. t. sur  $\underline{\mathbb{K}}$ . - Soit  $E \in \text{Ob}(\text{e. v. t. } \underline{\mathbb{K}})$  (ici  $F = \underline{\mathbb{K}}$ ).

Définitions.

1° Nous appellerons ensemble des séries formelles à "variable" dans  $E$ ,

$$\underline{\mathbb{K}}[[E]] = \prod_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(E, \underline{\mathbb{K}}) ;$$

on munit de manière évidente cet ensemble d'une structure d'algèbre sur  $\underline{\mathbb{K}}$ .

2° On définit de même l'ensemble des polynômes,

$$\underline{\mathbb{K}}[E] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(E, \underline{\mathbb{K}}) ;$$

on le munit d'une structure de sous-algèbre de  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$ .

Soit  $F \in \text{Ob}(\text{e. v. t. } \underline{\mathbb{K}})$ , les définitions ci-dessus se généralisent : on définit

$$F[[E]] = \prod_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(E, F) \quad \text{et} \quad F[E] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(E, F)$$

(ces ensembles étant munis de leur structure naturelle d'espace vectoriel sur  $\underline{\mathbb{K}}$ ).

Notation. - Soit  $f \in \underline{\mathbb{K}}[[E]]$ , nous noterons  $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ , avec  $f_n \in \mathcal{L}^n(E, \underline{\mathbb{K}})$ .

Définition. - Soit  $f$  une série formelle non nulle ; nous appellerons ordre de  $f$  (noté  $\omega(f)$ ), le plus petit entier  $p$  tel que  $f_p$  ne soit pas l'élément nul de  $\mathcal{L}^p(E, \underline{\mathbb{K}})$ .

(c) Formule de Taylor. - Désignons par  $f^{(n)}(x_0)$  la dérivée  $n$ -ième (algébrique), au point  $x_0 \in E$ , du polynôme  $f$  de  $\underline{\mathbb{K}}[E]$ . Soit  $\mathcal{L}_n(E, F)$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires continues de  $E^n$  dans  $F$ , soit  $L_n(E, F)$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires de  $E^n$  dans  $F$ .

Moyennant l'injection canonique (de la catégorie (e. v. t.  $\underline{\underline{K}}$ )),

$$\mathcal{L}_1(E, \mathcal{L}_1(E, \dots, \mathcal{L}_1(E, \underline{\underline{K}}), \dots)) \rightarrow L_n(E, \underline{\underline{K}}),$$

$f^{(n)}(x_0)$  peut être considéré comme un élément de  $L_n(E, \underline{\underline{K}})$ . Introduisons la notation  $x^{(n)} = (x, \dots, x)$ ,  $n$  fois. On a alors la formule de Taylor (si  $f$  est de degré  $p$ ) :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) \cdot h + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0) \cdot h^{(p)},$$

qui donne la décomposition de  $f$  en ses composantes homogènes. En effet,

$$\begin{aligned} f_n^{(p)}(x_0) \cdot h^{(p)} &= p! C_n^p \tilde{f}_n(x_0, \dots, x_0, \underbrace{h, \dots, h}_{p \text{ fois}}), & \text{si } p \leq 0, \\ &= 0, & \text{sinon,} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $f^{(p)}(x_0)$  est en fait dans  $\mathcal{L}_n(E, \underline{\underline{K}})$ , et qu'on peut lui associer un élément de  $\mathcal{L}^n(E, \underline{\underline{K}})$ .

(d) Catégorie des algèbres de séries formelles sur  $\underline{\underline{K}}$  ( $\underline{\underline{K}}$  muni de sa topologie). - Substitution d'une série formelle dans une autre ( $E, F, G \in \text{Ob}(\text{e. v. t. } \underline{\underline{K}})$ ): On définit d'abord la substitution d'une application polynomiale homogène dans une autre, soit  $f \in F[E]$ , homogène de degré  $p$ , soit  $g \in G(F)$ , homogène de degré  $q$  :

$$f : E \rightarrow F, \quad g : F \rightarrow G,$$

$g \circ f : E \rightarrow G$  est évidemment polynomiale homogène de degré  $pq$ , si  $f$  et  $g$  sont continues,  $g \circ f$  l'est aussi. Nous sommes alors en mesure de définir la substitution d'une série formelle d'ordre supérieur ou égal à 1 de  $F[E]$  dans une série formelle de  $G(F)$ , le résultat est un élément de  $G[E]$ .

Soit  $\varphi \in F[[E]]$ ,  $\omega(\varphi) \geq 1$ , on définit le morphisme

$$\begin{cases} \varphi^* : \underline{\underline{K}}[[F]] \rightarrow \underline{\underline{K}}[[E]] & (\text{homomorphisme d'algèbres}), \\ \varphi^* : f \mapsto f \circ \varphi & (\text{substitué de } \varphi \text{ dans } f). \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'on a une catégorie.

Morphismes de restriction. - Soit  $F$  un sous-espace (topologique) de  $E$ ; l'injection canonique

$$i : F \xrightarrow{c} E$$

est linéaire continue, elle peut donc être considérée comme un élément de  $E[[F]]$ , d'ordre  $\geq 1$ , et elle permet de définir le morphisme de restriction

$$i^* : \underline{\underline{K}}[[E]] \rightarrow \underline{\underline{K}}[[F]] ,$$

qui est surjectif si  $F$  est facteur direct.

## 2. Propriétés de $\underline{\underline{K}}[[E]]$ .

(a) PROPOSITION 2. - L'anneau  $\underline{\underline{K}}[[E]]$  est intègre.

Démonstration. - Soient  $f$  et  $g \in \underline{\underline{K}}[[E]]$ ,  $f \neq 0$ ,  $g \neq 0$ . On pose  $\omega(f) = p$ ,  $\omega(g) = q$ , soit  $h = fg$ . On a évidemment  $h_n = 0$  pour  $n < p + q$ , montrons que  $h_{p+q} = 0$  (d'où  $\omega(fg) = \omega(f) + \omega(g)$ ) :

$$\text{soit } x_1 \in E \text{ tel que } f_p(x_1) \neq 0 ,$$

$$\text{soit } x_2 \in E \text{ tel que } g_q(x_2) \neq 0 ;$$

soit  $F$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $x_1$  et  $x_2$  ( $F$ , de dimension 1 ou 2, est muni de la topologie induite), soient  $i^*(f_p)$  et  $i^*(g_q)$  les restrictions de  $f_p$  et de  $g_q$  à  $F$ ,  $i^*(f_p)$  et  $i^*(g_q)$  sont polynomiales homogènes, non identiquement nulles (d'après le choix de  $F$ ), ce sont des éléments de  $\underline{\underline{K}}[F]$  qui est intègre (en tant que sous-anneau de  $\underline{\underline{K}}[X]$  ou  $\underline{\underline{K}}[X, Y]$ ). On a donc

$$i^*(h_{p+q}) = i^*(f_p) \cdot i^*(g_q) \neq 0 ,$$

et a fortiori

$$h_{p+q} = f_p \cdot g_q \neq 0 .$$

PROPOSITION 3. -  $\underline{\underline{K}}[[E]]$  est un anneau local. Son idéal maximal est

$$\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E]]) = \{f \mid f \in \underline{\underline{K}}[[E]] , \text{ avec } \omega(f) \geq 1\} .$$

Démonstration. - Soit  $f$  tel que  $\omega(f) = 0$ ,  $f$  s'écrit :  $f = f_0 - g$ , avec  $f_0 \in \underline{\underline{K}}$ , on peut supposer  $f_0 = 1$ , soit  $f = 1 - g$ , on substitue  $g$  dans les deux séries (de  $\underline{\underline{K}}[X] = \underline{\underline{K}}[[X]]$ ),  $1 - X$  et  $1 + X + X^2 + \dots$ , ce qui montre que  $f$  est inversible.

Remarque : Quand  $E$  est de dimension infinie,  $\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E]])$  n'est plus engendré en tant qu'idéal par les éléments de  $\mathcal{L}^1(E, \underline{\underline{K}})$ , comme c'est le cas en dimension finie. Notons

$$\mathfrak{M}_n(\underline{\underline{K}}[[E]]) = \{f \mid f \in \underline{\underline{K}}[[E]] , \text{ avec } \omega(f) \geq n\} ,$$

il en résulte que l'inclusion  $[\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E]])]^n \subset \mathfrak{M}_n(\underline{\underline{K}}[[E]])$  peut être stricte.

(b) Topologies sur  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  .

(1) On a la topologie définie par les  $\{\mathfrak{M}_n(\underline{\mathbb{K}}[[E]])\}_{n \in \mathbb{N}}$  , qui est métrisable, par exemple par

$$d(f, g) = \begin{cases} e^{-w(f-g)} & , \text{ si } f \neq g \text{ ,} \\ 0 & , \text{ si } f = g \text{ .} \end{cases}$$

(2) On a également la topologie  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E]])$ -adique.

Remarquons que la topologie  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E]])$ -adique est plus fine que la topologie d'espace métrique (d'après les inclusions ci-dessus), donc séparée (c'est-à-dire  $\bigcap_{n \geq 0} [\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E]])]^n = 0$  ). La "bonne" topologie semble être la topologie (1).

## II. Séries convergentes

$\underline{\mathbb{K}}$  est, dans toute cette partie, un corps commutatif de caractéristique nulle, valué non discret. Nous ne ferons pas d'hypothèse de complétion, soit  $\hat{\underline{\mathbb{K}}}$  le complété de  $\underline{\mathbb{K}}$  auquel on prolonge la valeur absolue de  $\underline{\mathbb{K}}$  . Nous noterons  $\mathfrak{N}_{\underline{\mathbb{K}}}$  la catégorie des espaces normés sur  $\underline{\mathbb{K}}$  .

### 1. Généralités (cf. [2]).

(a) Soit  $E \in \text{Ob } \mathfrak{N}_{\underline{\mathbb{K}}}$  , soit  $f \in \underline{\mathbb{K}}[[E]]$  . On pose

$$\|f_n\| = \sup_{x \in B_E} |f_n(x)| \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}_n\| = \sup_{\substack{x_i \in B_E \\ i=1, \dots, n}} |\tilde{f}_n(x_1, \dots, x_n)|$$

(  $B_E$  étant la boule unité de  $E$  ), on a  $\|f_n\| \leq \|\tilde{f}_n\|$  .

A la série  $f = \sum_{n \geq 0} f_n$  , on associe les séries numériques (de  $\underline{\mathbb{R}}[[X]]$  )

$$|f|(r) = \sum_{n \geq 0} \|f_n\| r^n \quad \text{et} \quad |\tilde{f}|(r) = \sum_{n \geq 0} \|\tilde{f}_n\| r^n ,$$

nous appellerons série majorante (resp. majorante stricte) de  $f$  , toute série numérique  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n r^n$  telle que  $\alpha_n \geq \|f_n\|$  (resp.  $\alpha_n \geq \|\tilde{f}_n\|$  ).

Définitions. - Si  $|f|$  a un rayon de convergence  $R$  non nul, on dit que  $f$  est convergente et admet  $R$  pour rayon de convergence. On définit de la même manière le rayon de convergence strict  $\tilde{R}$  (c'est celui de  $|\tilde{f}|$  ). On a (cf. [2])

$$R \neq 0 \iff \tilde{R} \neq 0 \quad \text{et} \quad R \geq \tilde{R} .$$

La boule ouverte de  $E$ ,  $B(0, R)$ , est dite boule de convergence de  $f$ ,  $B(0, \tilde{R})$  est dite boule de convergence stricte,  $B(0, \tilde{R}) \subset B(0, R)$ .

La série convergente  $f$  définit une application de  $B(0, R)$  dans  $\hat{\underline{K}}$  (qui est complet), dont la valeur en  $x \in B(0, R)$  est notée  $f(x)$ .

Remarquons que l'on peut à partir de là définir la notion d'application analytique d'un ouvert  $U$  de  $E$  dans  $\hat{\underline{K}}$  (la définition est donnée pour  $\underline{R}$  ou  $\underline{C}$  dans [2]).

Notation. - L'ensemble des séries convergentes de  $\underline{K}[[E]]$  muni de la structure de  $\underline{K}$ -algèbre induite par celle de  $\underline{K}[[E]]$  sera noté  $\underline{K}\{E\}$ .

On a les inclusions triviales :

$$\underline{K}[E] \subset \underline{K}\{E\} \subset \underline{K}[[E]] .$$

On peut montrer qu'il existe un isomorphisme canonique entre  $\underline{K}\{E\}$  et l'anneau des germes de fonctions analytiques en  $0 \in E$ .

(b) Propriétés de  $\underline{K}\{E\}$ . - On définit comme précédemment les séries convergentes  $F\{E\}$  de  $F[[E]]$  ( $E, F \in \mathcal{N}_{\underline{K}}$ ).

LEMME 1. - Soient  $f \in F\{E\}$ ,  $g \in G\{F\}$ , avec  $\omega(f) \geq 1$ ; soit  $g \circ f$  obtenue par substitution de  $f$  dans  $g$ , alors  $g \circ f$  est convergente ( $g \circ f \in G\{E\}$ ).

Démonstration. -  $|g| \circ |f|$  (obtenue par substitution de  $|f|$  dans  $|g|$ ) est évidemment une série majorante de  $g \circ f$ , elle a un rayon de convergence non nul ( $|f|(r) \rightarrow 0$  avec  $r \neq 0$ ), il en est donc de même de  $|g \circ f|$ , et  $g \circ f$  est bien convergente.

PROPOSITION 1.

(i)  $\underline{K}\{E\}$  est un anneau d'intégrité ;

(ii)  $\underline{K}\{E\}$  est un anneau local d'idéal maximal défini par

$$\mathfrak{M}(\underline{K}\{E\}) = \mathfrak{M}(\underline{K}[[E]]) \cap \underline{K}\{E\} = \{f \mid f \in \underline{K}\{E\}, \omega(f) \geq 1\} ;$$

(iii)  $\underline{K}[[E]]$  et  $\mathfrak{M}(\underline{K}[[E]])$  sont respectivement les complétés de  $\underline{K}\{E\}$  et  $\mathfrak{M}(\underline{K}\{E\})$  pour la topologie induite par la topologie (1).

Démonstration.

(i) se déduit de l'inclusion  $\underline{K}\{E\} \subset \underline{K}[[E]]$ .

(ii) résulte du lemme 1 (cf. I, § 2, proposition 3).

(iii) se déduit de l'inclusion  $\underline{\underline{K}}[E] \subset \underline{\underline{K}}\{E\}$  et du fait que  $\underline{\underline{K}}[[E]]$  est le complété de  $\underline{\underline{K}}[E]$ .

Restriction à un sous-espace.

PROPOSITION 2. - Soit  $E \in \text{Ob } \mathcal{K}_{\underline{\underline{K}}}$ ; soit  $F$  un sous-espace de  $E$ ; soit  $i^*$  l'homomorphisme de restriction,

$$i^* : \underline{\underline{K}}[[E]] \rightarrow \underline{\underline{K}}[[F]] ,$$

alors  $i^*$  induit un homomorphisme  $\underline{\underline{K}}\{E\} \rightarrow \underline{\underline{K}}\{F\}$ . De plus, si  $F$  est facteur direct, ce dernier homomorphisme est surjectif.

Démonstration. - Soit  $f \in \underline{\underline{K}}\{E\}$ ,  $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ , par définition :

$$i^*(f) = \sum_{n \geq 0} i^*(f_n) , \quad \text{et} \quad i^*(f_n) = f_n \circ i ,$$

puisque  $f$  est convergente,  $|f|$  est convergente, or  $|f|$  est majorante de  $|i^*(f)|$ , donc cette dernière série est convergente, et il en est de même pour  $i^*(f)$ .

(c) Séries dérivées. - Soit  $f_n \in \underline{\underline{K}}[E]$ , homogène de degré  $n$ ; sa dérivée  $p$ -ième en  $x_0 \in E$  est un élément de  $\mathcal{L}_p(E, \underline{\underline{K}})$  auquel on peut associer un élément de  $\mathcal{L}^p(E, \underline{\underline{K}})$ , cet élément est polynomial homogène de degré  $n - p$  ou nul, et continu.

Soit  $f \in \underline{\underline{K}}[[E]]$ , on définit la dérivée  $p$ -ième de  $f$  par

$$f^{(p)} = \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} , \quad f^{(p)} \in (\mathcal{L}^p(E, \underline{\underline{K}}))[[E]] .$$

Remarquons que

$$f^{(p)}(0) = n! f_n .$$

PROPOSITION 3. - Soit  $f \in \underline{\underline{K}}\{E\}$ , soit  $\tilde{R}$  son rayon de convergence strict. Alors  $f'$  admet le même rayon de convergence strict  $\tilde{R}$ .

Démonstration.

$$\|\tilde{f}'_n\| = \sup_{\substack{x_i \in B_E \\ i=1, \dots, n-1}} \|\tilde{f}'_n(x_1, \dots, x_{n-1})\| = \sup_{\substack{x_i \in B_E \\ h \in B_E \\ i=1, \dots, n-1}} |\tilde{f}'_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot h| ,$$



Or

$$\tilde{f}'_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot h = C_n^1 \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h) = n \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h),$$

d'où

$$\|\tilde{f}'_n\| = n \|\tilde{f}_n\|,$$

et le résultat.

On montrerait de même

$$\|f'_n\| \leq n \|f_n\|.$$

### III. Les théorèmes de Weierstrass

#### 1. Remarques préliminaires.

Soit  $E_0 \in \text{Ob}(e. v. t. \underline{K})$  ; soit  $E_0^*$  son dual topologique, on pose

$$\text{Ann } E_0^* = \{x \mid x \in E_0, \text{ avec } f(x) = 0, \forall f \in E_0^*\},$$

c'est évidemment un sous-espace fermé de  $E_0$  (qui peut être  $E_0$  tout entier).  
Considérons l'e. v. t. sur  $\underline{K}$  défini par  $E = E_0 / \text{Ann } E_0^*$ . Il possède la propriété suivante :

Tout sous-espace de dimension 1 dans  $E$  admet un supplémentaire topologique dans  $E$ . En effet, soit  $F \subset E$  de dimension 1, soit  $a_0 \in E_0$  tel que sa classe soit  $a \neq 0$ ,  $a \in F$  ; il existe une forme linéaire continue sur  $E_0$  qui ne s'annule pas en  $a_0$  (sinon  $a_0$  appartiendrait à  $\text{Ann } E_0^*$ ) ; par passage au quotient, on obtient une forme linéaire  $f$  continue sur  $E$  qui ne s'annule pas en  $a$ . Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \underline{K} &\rightarrow F \rightarrow \underline{K}, \\ x &\mapsto ax \mapsto f^{-1}(a) f(x), \end{aligned}$$

elles sont continues, ce qui montre que  $\underline{K}$  et  $F$  sont homéomorphes et

$$E = \underline{K}a \oplus \text{Ker } f = F \oplus \text{Ker } f.$$

Soit  $C_{\underline{K}}$  la classe des  $\underline{K}$ -e. v. t.  $E$  tels que  $\text{Ann } E^* = 0$ , on a un isomorphisme  $p^* : \underline{K}[[E]] \rightarrow \underline{K}[[E_0]]$  (si  $E = E_0 / \text{Ann } E_0^*$ ), déduit de la projection  $p : E_0 \rightarrow E$  ( $p \in E[E_0]$ ) (il est facile de vérifier que toute application polynomiale homogène de degré  $n$ , continue de  $E_0$  dans  $\underline{K}$ , s'annule sur les points de  $\text{Ann } E_0^*$ ). Ceci permet de restreindre notre étude aux objets de  $C_{\underline{K}}$ .

L'étude que nous allons faire sera valable pour trois cas particuliers ; pour mettre en évidence l'analogie entre ces trois cas, nous adopterons autant que possible une notation commune. Les trois cas sont les suivants :

- (a) Anneau des polynômes :  $A = \underline{\underline{K}}[E]$ , les hypothèses sur  $\underline{\underline{K}}$  sont celles du début ;  
 (b) Anneau des séries formelles :  $A = \underline{\underline{K}}[[E]]$ , mêmes hypothèses sur  $\underline{\underline{K}}$  ;  
 (c) Anneau des séries convergentes :  $A = \underline{\underline{K}}\{E\}$ , les hypothèses sur  $\underline{\underline{K}}$  sont celles de la partie II.

Nous noterons (cas (b) et (c))  $A[[T]]$ , l'algèbre des séries formelles d'éléments de  $A$ , où  $A$  est un anneau topologique ; on a, sur  $A[[T]]$ , la topologie produit déduite de  $A[[T]] = \underline{\underline{A}}^{\mathbb{N}}$ , nous l'appellerons topologie de la convergence simple des coefficients. Nous noterons (cas (a))  $A[T]$ , l'anneau des polynômes sur  $A$ .

LEMME 1. - Soit  $E \in \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{K}}}$ . Une décomposition de l'espace  $E = F \oplus E'$  (somme de (e. v. t.  $\underline{\underline{K}}$ )), telle que  $F$  soit de dimension 1, étant choisie ainsi qu'une base de  $F$  ( $F \approx \underline{\underline{K}}a$ ), on a un homomorphisme canonique de  $\underline{\underline{K}}$ -algèbres

$$(A' = \underline{\underline{K}}[[E']], \underline{\underline{K}}[E'], \underline{\underline{K}}\{E'\}) ,$$

$$\alpha : A \rightarrow A'[[T]] \quad (\text{cas (b) et (c)}),$$

$$\alpha : A \rightarrow A'[T] \quad (\text{cas (a)}) ;$$

on peut de plus préciser, dans les cas (a) et (b),  $\alpha$  est bijectif, dans le cas (c),  $\alpha$  est injectif.

Démonstration. - Traitons d'abord le cas d'un polynôme  $f$ , on écrit la formule de Taylor (on note  $x = ta + x'$ , avec  $t \in \underline{\underline{K}}$ ,  $x' \in E'$ ) :

$$f(ta + x') = f(x') + t f'(x').a + \dots + t^p f^{(p)}(x').a^{(p)} ,$$

qui donne immédiatement  $\alpha$ .

Soit maintenant  $f$  une série formelle,  $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ ,  $f_n$  est un polynôme, on pose

$$\alpha f = \sum_{n \geq 0} f_n(x') + t \left( \sum_{n \geq 0} f_n'(x').a \right) + \dots + t^p \left( \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}(x').a^{(p)} \right) + \dots .$$

Enfin, si  $f$  est convergente, les séries

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x'), \quad \sum_{n \geq 0} f_n'(x').a, \quad \dots$$

sont convergentes (leur rayon de convergence strict est au moins  $\frac{\tilde{R}}{\|a\|}$  ; cf. II, proposition 3).

La surjectivité, dans les cas (a) et (b), se démontre en remarquant que  $x \mapsto t$  et  $x \mapsto x'$  sont continues.

On a, de plus, un critère de convergence pour une série de  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  :

LEMME 2. - Posons  $h_{ij}(f) = C_{i+j}^j \|\tilde{f}_{i+j}\|$ , et

$$\bar{f}(\tau, r') = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{ij}(f) \tau^i r'^j .$$

Pour que f soit convergente, il faut et il suffit que la série double  $\bar{f}(\tau, r')$  soit convergente.

Démonstration. - On pose  $r = \tau + r'$  ;  $|\tilde{f}|(r)$  est obtenue en regroupant les termes de  $\bar{f}(\tau, r')$ , d'où le résultat.

## 2. Les théorèmes de Weierstrass.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite. Soit  $E \in \underline{\mathbb{C}}_{\underline{\mathbb{K}}}$ .

THÉORÈME 1 (a). - Soit B un polynôme de  $\underline{\mathbb{K}}[E]$  non nul, soit n son degré.

(i) On peut trouver une décomposition,  $E = F \oplus E'$  (somme de (e. v. t.  $\underline{\mathbb{K}}$ ), avec  $\dim F = 1$ ), telle que, si l'on identifie  $\underline{\mathbb{K}}[E]$  à  $(\underline{\mathbb{K}}[E'])[T]$ , le polynôme  $B(t)$  à coefficients dans  $\underline{\mathbb{K}}[E']$  soit de degré n ; le coefficient de  $t^n$  est alors dans  $\underline{\mathbb{K}}$ .

(ii) S'il en est ainsi, pour tout  $A \in \underline{\mathbb{K}}[E]$ , il existe des polynômes Q et R de  $\underline{\mathbb{K}}[E]$ , tels que  $A = BQ + R$ , avec  $\deg R(t) < n$  ( $R(t) \in (\underline{\mathbb{K}}[E'])[T]$ ). De plus, Q et R sont déterminés de manière unique par ces conditions.

THÉORÈME 1 (b). - Soit B une série de  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E]])$  non nulle.

(i) On peut trouver une décomposition,  $E = F \oplus E'$ , telle que la restriction  $i^*(B)$  (déduite de  $i : F \xrightarrow{c} E$ ) de B à F ne soit pas nulle (soit, dans ces conditions, p l'ordre de  $i^*(B)$ ).

(ii) S'il en est ainsi, pour toute série  $A \in \underline{\mathbb{K}}[[E]]$ , il existe des séries Q et R de  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$ , telles que  $A = BQ + R$ , avec  $R \in (\underline{\mathbb{K}}[[E']])[T]$  de degré  $< p$ . De plus, Q et R sont déterminés de manière unique par ces conditions.

THÉORÈME 1 (c). - Même énoncé que pour le théorème 1 (b), en remplaçant

$$\underline{\mathbb{K}}[[E]] \text{ par } \underline{\mathbb{K}}\{E\}, \quad \underline{\mathbb{K}}[[E']] \text{ par } \underline{\mathbb{K}}\{E'\} .$$

Démonstration du théorème 1 (a).

(i)  $B = B_1 + \dots + B_n$ , les  $B_i$  étant homogènes, on choisit  $a \in E$  tel que  $B_n(a) \neq 0$ , on pose alors  $F = \underline{\underline{K}}a$ .

(ii) On fait la division de  $A$  par  $B$  dans l'anneau  $(\underline{\underline{K}}[[E']])[T]$ , ce qui est possible (d'après (i)), l'unicité est évidente.

Démonstration du théorème 1 (b).

(i)  $B = \sum_{n \geq 1} B_n$ , on choisit un sous-espace  $F$  sur lequel au moins l'un des  $B_n$  ne s'annule pas, ce qui est toujours possible puisque  $B \neq 0$ .

(ii) Nous avons vu (lemme 1) que  $\underline{\underline{K}}[[E]]$  s'identifie à  $(\underline{\underline{K}}[[E']])[[T]]$ ; nous considérerons que nous sommes dans ce dernier ensemble.

Nous allons d'abord montrer l'existence de la "division" :

$$B = b_0 + tb_1 + \dots + t^n b_n + \dots,$$

avec  $b_0, \dots, b_{p-1} \in \mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']])$  et  $b_p \notin \mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']])$  (on fait  $t = 0$ ).

$$B = b_0 + tb_1 + \dots + t^{p-1} b_{p-1} + t^p(b_p + tb_{p+1} + \dots).$$

Puisque  $b_p \notin \mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']])$ ,  $b_p + \dots \notin \mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E]])$ , et  $b_p + tb_{p+1} + \dots$  est un élément inversible de  $\underline{\underline{K}}[[E]]$ , que nous noterons  $S$ .

D'où  $B = S(t^p - T)$ , avec  $S$  inversible et  $T \in (\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']]))[[T]]$ . On voit immédiatement ( $t^p - T = S^{-1}B$ ) qu'il suffit de faire la division pour  $B = t^p - T$ , avec  $T \in (\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']]))[[T]]$ .

Soit  $A \in (\underline{\underline{K}}[[E']])[[T]]$ ,  $A = a_0 + \dots + t^{p-1} a_{p-1} + t^p(a_p + ta_{p+1} + \dots)$ , posons

$$R_1 = a_0 + \dots + t^{p-1} a_{p-1} \quad \text{et} \quad Q_1 = a_p + ta_{p+1} + \dots.$$

On a

$$A = (t^p - T)Q_1 + R_1 + A_1, \quad \text{avec} \quad A_1 = Q_1 T, \quad A_1 \in (\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']]))[[T]].$$

De même,  $A_1$  s'écrit :

$$A_1 = (t^p - T)Q_2 + R_2 + A_2,$$

avec

$$A_2 = Q_2 T, \quad A_2 \in (\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']]))^2 [[T]],$$

$$Q_2, R_2 \in (\mathfrak{M}(\underline{\underline{K}}[[E']]))[[T]].$$

On obtient ainsi par récurrence trois suites  $\{A_n\}$ ,  $\{Q_n\}$ ,  $\{R_n\}$ , vérifiant

$$A_n = (t^p - T)Q_{n+1} + R_{n+1} + A_{n+1}, \quad \text{avec } A_{n+1} = Q_{n+1} T,$$

$$A_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))^{n+1} [[T]], \quad Q_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))^n [[T]], \quad R_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))^n [T].$$

Considérons la suite  $\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $(\underline{\mathbb{K}}[[E']])[[T]]$ , cette suite est convergente (pour la convergence simple des coefficients); il suffit de montrer que, quel que soit  $\mathfrak{M}$ , le coefficient de  $t^m$  converge, ce qui est évident (il est de la forme  $c_1 + \dots + c_n$ , avec  $c_n \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))^n$ , et  $\underline{\mathbb{K}}[[E']]$  est complet). On a donc

$$A' = A_1 + A_2 + \dots \in (\underline{\mathbb{K}}[[E']])[[T]],$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \in (\underline{\mathbb{K}}[[E']])[[T]],$$

et

$$R = R_1 + R_2 + \dots \in (\underline{\mathbb{K}}[[E']])[T], \text{ de degré } < p.$$

Montrons

$$A = (t^p - T)Q + R.$$

En passant à la limite, on obtient  $A + A' = (t^p - T)Q + R + A'$  (la topologie est séparée) et  $A = (t^p - T)Q + R$ .

L'existence étant montrée, démontrons maintenant l'unicité. Supposons que l'on ait  $0 = (t^p - T)Q + R$ , montrons que

$$Q \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))^n [[T]], \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{ce qui entraîne bien } Q = 0);$$

$t^p Q$  est d'ordre  $\geq p$  en  $t$ ,  $R$  est de degré  $p$  en  $t$ , par suite  $t^p Q$  est égal à un terme provenant de  $TQ$ , ce qui montre que les coefficients de  $Q$  sont dans  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']])$  (ceux de  $T$  y sont). On raisonne alors par récurrence. On est ainsi ramené à  $R = 0$ ,  $Q = 0$ , et il y a bien unicité.

Passons maintenant au cas des séries convergentes.

Démonstration du théorème 1 (c).

(i) est identique à 1 (b) (i).

(ii) Il faut montrer que, lorsque les séries  $A$  et  $B$  sont convergentes, les séries  $Q$  et  $R$  sont convergentes. Pour cela, nous allons faire un calcul de majorations ( $|t| = \tau$ ,  $\|x'\| = r$ ).

Pour  $\tau \leq \tau_0$  et  $r' \leq r'_0$  ( $\tau_0, r'_0 > 0$ ), les séries doubles  $\overline{A}(\tau, r')$  et

$\bar{T}(\tau, r')$  sont convergentes. Nous supposons donc, dans la suite, que  $\tau$  et  $r'$  vérifient ces conditions (qui entraînent que toutes les séries écrites sont convergentes).

$$\bar{A}(\tau, r') = (\tau^p - \bar{T}(\tau, r')) \bar{Q}_1(\tau, r') + \bar{R}_1(\tau, r') + \alpha_1(\tau, r') ,$$

avec  $\alpha_1(\tau, r') = \bar{Q}_1(\tau, r') \bar{T}(\tau, r')$ . On a évidemment

$$\bar{A}_1(\tau, r') \leq \bar{T}(\tau, r') \bar{Q}_1(\tau, r') ,$$

c'est-à-dire  $\bar{A}_1(\tau, r') \leq \alpha_1(\tau, r')$  (tous les coefficients de l'une sont inférieurs ou égaux à ceux de l'autre). De même,

$$\bar{\alpha}_1(\tau, r') = (\tau^p - \bar{T}(\tau, r')) \beta_2(\tau, r') + \gamma_2(\tau, r') + \alpha_2(\tau, r') ,$$

avec  $\alpha_2(\tau, r') = \beta_2(\tau, r') \bar{T}(\tau, r')$ ; de plus,

$$\bar{Q}_2(\tau, r') \leq \beta_2(\tau, r') , \quad \bar{R}_2(\tau, r') \leq \gamma_2(\tau, r') , \quad \bar{A}_2(\tau, r') \leq \alpha_2(\tau, r')$$

(les inégalités étant vérifiées par les coefficients correspondants).

On obtient par récurrence trois suites  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$ ,  $\{\gamma_n\}$ , vérifiant

$$\alpha_n(\tau, r') = (\tau^p - \bar{T}(\tau, r')) \beta_{n+1}(\tau, r') + \gamma_{n+1}(\tau, r') + \alpha_{n+1}(\tau, r') ,$$

avec

$$\alpha_{n+1}(\tau, r') = \beta_{n+1}(\tau, r') \bar{T}(\tau, r') ,$$

$$\bar{Q}_{n+1}(\tau, r') \leq \beta_{n+1}(\tau, r') \quad (\text{terme à terme}) ,$$

$$\bar{R}_{n+1}(\tau, r') \leq \gamma_{n+1}(\tau, r') \quad (\text{terme à terme}) ,$$

$$\bar{A}_{n+1}(\tau, r') \leq \alpha_{n+1}(\tau, r') \quad (\text{terme à terme}) .$$

On a

$$\bar{Q}_1(\tau, r') \leq \frac{\bar{A}(\tau, r')}{\tau^p} ,$$

d'où

$$\alpha_1(\tau, r') \leq \frac{\bar{T}(\tau, r')}{\tau^p} \bar{A}(\tau, r') ,$$

et, par récurrence,

$$\alpha_n(\tau, r') \leq \left( \frac{\bar{T}(\tau, r')}{\tau^p} \right)^n \bar{A}(\tau, r') .$$

Dans  $\bar{T}(\tau, r')$ , on peut mettre  $r'$  en facteur ( $T \in (\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']]))[[T]]$ ), et par suite obtenir une majoration de la forme  $\bar{T}(\tau, r') \leq \lambda r'$  ( $\lambda$  constant), il existe  $r'_1 > 0$  tel que

$$\frac{\bar{T}(\tau_0, r')}{\tau_0^p} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{pour } r' \leq r'_1 .$$

On en déduit que

$$\alpha_n(\tau, r') \leq \alpha_n(\tau_0, r') \leq \frac{1}{2^n} \bar{A}(\tau_0, r'_1), \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0, \quad r' \leq r'_1 .$$

Par suite, les trois séries

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau, r') + \alpha_2(\tau, r') + \dots, \\ \bar{Q}_1(\tau, r') + \beta_2(\tau, r') + \dots, \\ \bar{R}_1(\tau, r') + \gamma_2(\tau, r') + \dots, \end{aligned}$$

sont convergentes pour  $\tau \leq \tau_0$ ,  $r' \leq r'_1$ . Pour des raisons évidentes de majoration, les deux séries

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(\tau, r') + \bar{Q}_2(\tau, r') + \dots, \\ \bar{R}_1(\tau, r') + \bar{R}_2(\tau, r') + \dots, \end{aligned}$$

sont convergentes dans les mêmes conditions. On a

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\tau, r') &\leq \bar{Q}_1(\tau, r') + \dots, \\ \bar{R}(\tau, r') &\leq \bar{R}_1(\tau, r') + \dots, \end{aligned}$$

et, d'après le lemme 2,  $Q$  et  $R$  sont convergentes.

### Définitions.

(a) On appellera polynôme distingué de  $(\underline{\mathbb{K}}[E'])[T]$ , un polynôme unitaire de cet anneau.

(b) On appellera polynôme distingué de  $(\underline{\mathbb{K}}[[E']])[T]$ , un polynôme unitaire dont les coefficients non dominants sont dans  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}[[E']])$ .

(c) On appellera polynôme distingué de  $(\underline{\mathbb{K}}\{E'\})[T]$ , un polynôme unitaire dont les coefficients non dominants sont dans  $\mathfrak{M}(\underline{\mathbb{K}}\{E'\})$ .

COROLLAIRE du théorème 1 (théorème de préparation de Weierstrass).

(a) Soit  $B \in \underline{\mathbb{K}}[E]$ , non nul.

(i) Comme dans le théorème 1 (a).

(ii) S'il en est ainsi, B s'écrit de manière unique,  $B = HP$ , avec  $H \in \underline{\mathbb{K}}$  (inversible) et P distingué de degré n.

(b) Soit  $B \in \underline{\mathbb{K}}[[E]]$ , non nulle.

(i) Comme dans le théorème 1 (b).

(ii) S'il en est ainsi, B s'écrit de manière unique,  $B = HP$ , avec H inversible dans  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  et P distingué de degré P dans  $(\underline{\mathbb{K}}[[E']])[T]$ .

(c) Même énoncé que (b), en remplaçant  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  par  $\underline{\mathbb{K}}\{E\}$ , et  $\underline{\mathbb{K}}[[E']]$  par  $\underline{\mathbb{K}}\{E'\}$ .

Démonstration.

(a) est évident.

(b) et (c) résultent du théorème 1, en faisant  $A = t^P$ .

Remarques.

1°  $E'$  étant facteur direct de  $E$ , la projection  $p : E \rightarrow E'$  est continue, ce qui permet de définir les homomorphismes d'algèbres :

$$\begin{cases} p^* : \underline{\mathbb{K}}[[E']] \rightarrow \underline{\mathbb{K}}[[E]] , \\ \hat{p}^* : \underline{\mathbb{K}}\{E'\} \rightarrow \underline{\mathbb{K}}\{E\} ; \end{cases}$$

soient alors  $B.\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  et  $B.\underline{\mathbb{K}}\{E\}$  les idéaux engendrés par  $B$  dans  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  et  $\underline{\mathbb{K}}\{E\}$ , par passage au quotient on obtient des homomorphismes d'algèbres :

$$\begin{cases} \beta : \underline{\mathbb{K}}[[E']] \rightarrow \underline{\mathbb{K}}[[E]]/B.\underline{\mathbb{K}}[[E]] , \\ \hat{\beta} : \underline{\mathbb{K}}\{E'\} \rightarrow \underline{\mathbb{K}}\{E\}/B.\underline{\mathbb{K}}\{E\} ; \end{cases}$$

$\beta$  fait de  $\underline{\mathbb{K}}[[E]]/B.\underline{\mathbb{K}}[[E]]$  un  $\underline{\mathbb{K}}[[E']]$ -module, d'après le théorème 1, il est de type fini engendré par les images dans le quotient de  $1, \dots, t^{P-1}$ ; de même,  $\underline{\mathbb{K}}\{E\}/B.\underline{\mathbb{K}}\{E\}$  est un  $\underline{\mathbb{K}}\{E'\}$ -module de type fini engendré par les images de

$$1, \dots, t^{P-1} .$$

2° Si  $\underline{\mathbb{K}} = \underline{\mathbb{C}}$ , la démonstration classique des théorèmes de Weierstrass se transpose sans difficulté, on se ramène à écrire la formule de Cauchy pour un cercle de  $F$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Polynômes, dans le cours de Mathématiques 2, professé en 1965/66 à la Faculté des Sciences de Paris.
  - [2] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques complets d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1-98 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).
  - [3] RAMIS (Jean-Pierre). - Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, C. R. Acad. Sciences, Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 904-906.
-