

# SÉMINAIRE LELONG.

## ANALYSE

MICHEL HERVÉ

**Quelques propriétés des applications holomorphes d'une  
boule à  $m$  dimensions dans elle-même**

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 5 (1962-1963), exp. n° 3, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SL\\_1962-1963\\_\\_5\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A3_0)

© Séminaire Lelong. Analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS HOLOMORPHES  
D'UNE BOULE À  $m$  DIMENSIONS DANS ELLE-MÊME

par Michel HERVÉ

Notations. - L'espace numérique  $C^m$  sera toujours envisagé comme espace vectoriel complexe ; les points de cet espace seront notés par des minuscules latines, et considérés, dans les calculs, comme des matrices à  $m$  lignes, une colonne ;  $a^*$  désignera la ligne transposée et conjuguée de la colonne  $a$ . Ainsi

$$b^* a = \sum_{j=1}^m \bar{b}_j a_j ,$$

où les  $a_j$  et  $b_j$  sont les coordonnées des points  $a$  et  $b$  ; enfin, on posera

$$\|a\|^2 = a^* a = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 .$$

Dans tout l'exposé,  $B_m$  désignera la boule-unité  $\|x\| < 1$ , où  $x$  est le point courant de  $C^m$ , et  $f$  une application holomorphe de  $B_m$  dans elle-même, autrement dit, un système de  $m$  fonctions holomorphes pour  $\|x\| < 1$  et dont les modules ont des carrés de somme  $< 1$ .

L'application  $f$  est un automorphisme de  $B_m$  si elle est de la forme

$$(0.1) \quad x' = A \Gamma_u \frac{x - u}{1 - u^* x} ,$$

où  $A$  est une matrice unitaire d'ordre  $m$ ,  $u \in B_m$ , et

$$(0.2) \quad \Gamma_u = \frac{uu^*}{1 + \sqrt{1 - \|u\|^2}} + \sqrt{1 - \|u\|^2} I_m ,$$

$I_m$  matrice-unité d'ordre  $m$ . Par suite :

a. les automorphismes de  $B_m$  qui laissent l'origine invariante sont les restrictions à  $B_m$  des applications linéaires unitaires de  $C^m$  sur lui-même ;

b. tout automorphisme  $f$  de  $B_m$  admet un prolongement continu  $\bar{f}$  à  $\bar{B}_m$ , qui applique biunivoquement la sphère  $\partial B_m$  sur elle-même ;

c. tout automorphisme de  $B_m$  est la restriction à  $B_m$  d'une application linéaire inversible de l'espace projectif  $P^m$  sur lui-même.

### 1. Le lemme de Schwarz.

Dans l'énoncé qui suit, la partie (a) est classique (cf. par exemple BOCHNER-MARTIN).

THÉOREME 1. -- Soit  $f$  une application holomorphe de la boule  $B_m$  dans elle-même, laissant l'origine invariante. Alors :

- a.  $\|f(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in B_m$  ;
- b. l'ensemble des points  $x \in B_m$ , tels que  $\|f(x)\| = \|x\|$ , est l'intersection de  $B_m$  avec un sous-espace vectoriel  $V$  de  $C^m$ , dont la dimension  $p$  peut aller de 0 à  $m$  ;
- c. la restriction de  $f$  à  $B_m \cap V$  coïncide avec la restriction à  $B_m \cap V$  d'un automorphisme de  $B_m$  ; en particulier, si  $V$  est de dimension  $m$ ,  $f$  est un automorphisme de  $B_m$ .

#### Démonstration.

a. Etant donnés deux points  $a$  et  $b \in C^m$ , la fonction

$$(1.1) \quad \varphi_{a,b}(\zeta) = b^* f(\zeta a)$$

est holomorphe et de module  $\leq \|b\|$  pour  $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$ , et nulle avec  $\zeta$  ; d'après le lemme de Schwarz classique :

$$(1.2) \quad |\varphi_{a,b}(\zeta)| \leq \|a\| \|b\| |\zeta| \text{ pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|},$$

l'égalité dans (1.2) pour un  $\zeta$  entraînant

$$(1.3) \quad \varphi_{a,b}(\zeta) \equiv e^{i\alpha} \|a\| \|b\| \zeta, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En réunissant (1.1) et (1.2), on a :

$$\|f(\zeta a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f(\zeta a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi_{a,b}(\zeta)| \leq \|\zeta a\|,$$

pour tout  $\zeta a \in B_m$ .

b. On peut développer chaque coordonnée de  $f(x)$  en série de polynômes homogènes, d'où une série normalement convergente sur tout compact de  $B_m$  :

$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ , où chaque coordonnée de  $f_k(x)$  est un polynôme homogène et de degré  $k$  par rapport aux coordonnées de  $x$  ; les  $f_k$  sont donc des applications holomorphes de  $C^m$  dans  $C^m$ , et  $f_1$  est linéaire. Etant donnés  $a$  et  $b \in C^m$ , pour  $\|\zeta a\| < 1$  :

$$\varphi_{a,b}(\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} b^* f_k(\zeta a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k b^* f_k(a),$$

d'où en particulier :

$$(1.4) \quad \varphi'_{a,b}(0) = b^* f_1(a) \quad .$$

En réunissant (1.2) et (1.4), on a :

$$(1.5) \quad \|f_1(a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f_1(a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi'_{a,b}(0)| \leq \|a\| \quad ,$$

pour tout  $a \in C^m$  .

Prenons maintenant  $a \in B_m$  ,  $a \neq 0$  , et supposons  $\|f(a)\| = \|a\|$  . D'après (1.2) :

$$|\varphi_{a,f(a)}(\zeta)| \leq \|a\|^2 |\zeta| \quad \text{pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|} \quad ;$$

mais

$$\varphi_{a,f(a)}(1) = \|f(a)\|^2 = \|a\|^2 \quad ,$$

donc (1.3) est réalisé :

$$\varphi_{a,f(a)}(\zeta) \equiv \|a\|^2 \zeta \quad , \quad \varphi'_{a,f(a)}(0) = \|a\|^2 \quad .$$

Tenant compte de (1.4) et (1.5), on a  $f(a)^* f_1(a) = \|f(a)\|^2$  avec  $\|f_1(a)\| \leq \|f(a)\|$  , donc  $f_1(a) = f(a)$  .

Prenons toujours  $a \in B_m$  ,  $a \neq 0$  , et supposons au contraire  $\|f_1(a)\| = \|a\|$  . Si l'on pose

$$g(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) \quad ,$$

on a, pour  $\|\zeta a\| < 1$  :

$$\|f(\zeta a)\|^2 = \|f_1(\zeta a)\|^2 + \|g(\zeta a)\|^2 + 2 \operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \quad ,$$

alors que, d'après l'hypothèse et la partie (a) du théorème,  $\|f(\zeta a)\| \leq \|f_1(\zeta a)\|$  , donc  $\operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \leq 0$  . Or

$$f_1(\zeta a)^* g(\zeta a) = \zeta^* \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^k f_1(a)^* f_k(a) = |\zeta|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^{k-1} f_1(a)^* f_k(a) \quad ;$$

la dernière série converge pour  $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$  ; sa somme est nulle pour  $\zeta = 0$  et de partie réelle  $\leq 0$  partout ; elle est donc identiquement nulle, c'est-à-dire que  $f_1(a)^* f_k(a) = 0$  pour tout  $k \geq 2$  . Alors  $f_1(a)^* f(a) = \|f_1(a)\|^2$  avec  $\|f(a)\| \leq \|f_1(a)\|$  , donc  $f(a) = f_1(a)$  .

En réunissant les résultats des deux alinéas précédents, nous voyons que l'ensemble des points  $x \in B_m$  tels que  $\|f(x)\| = \|x\|$  est aussi celui des points  $x \in B_m$  tels que  $\|f_1(x)\| = \|x\|$  , et que  $f$  et  $f_1$  ont la même restriction à cet ensemble. Il reste à prouver que  $V = \{x \in C^m \mid \|f_1(x)\| = \|x\|\}$  est un sous-espace vectoriel de  $C^m$  .

Soient donc  $a$  et  $b \in V$  ; on a, pour  $\zeta \in \mathbb{C}$  :

$$\|\zeta a + b\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\zeta b^* a)$$

et

$$\|f_1(\zeta a + b)\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \quad .$$

Par suite, en tenant compte de (1.5) :

$$\operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \leq \operatorname{Re}(\zeta b^* a) \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{C} \quad ,$$

donc

$$f_1(b)^* f_1(a) = b^* a \quad \text{et} \quad \|f_1(\lambda a + \mu b)\| = \|\lambda a + \mu b\|$$

quels que soient  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{C}$  .

c. Supposant  $p \geq 1$  , on choisit une base orthonormée  $\{e_1, \dots, e_p\}$  de  $V$  , que l'on complète en une base orthonormée de  $\mathbb{C}^m$  , ainsi que le système orthonormé  $\{f_1(e_1), \dots, f_1(e_p)\}$  .

## 2. Conséquences du lemme de Schwarz.

On ne suppose plus que  $f$  laisse l'origine invariante.

### A. L'ensemble des points de $B_m$ invariants par $f$ .

COROLLAIRE 1. — Etant donnée une application holomorphe  $f$  de la boule  $B_m$  dans elle-même, l'ensemble des points de  $B_m$  invariants par  $f$  est vide ou est l'intersection de  $B_m$  avec une variété linéaire affine de  $\mathbb{C}^m$  , dont la dimension peut aller de 0 à  $m$  .

### B. Le lemme de Pick.

Soient  $x_0$  et  $x_1 \in B_m$  :

$$\delta(x_0, x_1) = \left\| \frac{x_1 - x_0}{1 - x_0^* x_1} \right\|$$

est une distance dans  $B_m$  invariante par les automorphismes de  $B_m$  , et  $\delta(0, x) = \|x\|$  .

Pour énoncer le lemme de Pick, notons  $d_{a,b}$  la droite complexe, ou variété linéaire affine de dimension 1 , passant par deux points donnés  $a$  et  $b \in \mathbb{C}^m$  ,  $a \neq b$  ,  $d_{a,b}$  est le lieu, pour  $\zeta \in \mathbb{C}$  , du point  $a + \zeta(b - a)$  ; l'ensemble des  $\zeta$  pour lesquels  $\|a + \zeta(b - a)\| < 1$  est vide ou est un disque ouvert de  $\mathbb{C}$  , dont le centre est le point qui rend  $\|a + \zeta(b - a)\|$  minimum.

COROLLAIRE 2. - Etant donnée une application holomorphe  $f$  de la boule  $B_m$  dans elle-même :

a.  $\delta[f(x_0), f(x_1)] \leq \delta(x_0, x_1)$  quels que soient  $x_0$  et  $x_1 \in B_m$  ;

b. si l'égalité se produit avec  $x_0 \neq x_1$ , alors la restriction de  $f$  au disque  $B_m \cap d_{x_0, x_1}$  l'applique biunivoquement sur le disque  $B_m \cap d_{f(x_0), f(x_1)}$ , et

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient  $x$  et  $x' \in B_m \cap d_{x_0, x_1}$  ;

c. réciproquement, si deux droites complexes  $d$  et  $d'$ , rencontrant  $B_m$ , sont telles que la restriction de  $f$  au disque  $B_m \cap d$  l'applique biunivoquement sur le disque  $B_m \cap d'$ , alors

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient  $x$  et  $x' \in B_m \cap d$  ;

d. étant donné  $x_0 \in B_m$ , l'ensemble des points  $x \in B_m$ , tels que

$$\delta[f(x_0), f(x)] = \delta(x_0, x),$$

est l'intersection de  $B_m$  avec une variété linéaire affine  $V$  de  $C^m$ , contenant  $x_0$ , dont la dimension  $p$  peut aller de 0 à  $m$  ; la restriction de  $f$  à  $B_m \cap V$  coïncide avec la restriction à  $B_m \cap V$  d'un automorphisme de  $B_m$  ; en particulier, si  $p = m$ ,  $f$  est un automorphisme de  $B_m$ .

Remarque. - Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux droites complexes rencontrant  $B_m$ , ayant un point commun  $x_0$  et un seul, telles que la distance  $\delta$  soit conservée par les restrictions de  $f$  aux disques  $B_m \cap d_1$  et  $B_m \cap d_2$  : d'après le corollaire 2 (d), si  $x_0 \in B_m$ ,  $\delta$  est encore conservée par la restriction de  $f$  à l'intersection de  $B_m$  avec la variété linéaire affine de dimension 2 qui contient  $d_1$  et  $d_2$ . Mais cette propriété ne subsiste plus si  $x_0 \in \partial B_m$  ou  $x_0 \in C^m - \bar{B}_m$ .

### 3. La dérivée angulaire.

Etant données une application holomorphe  $f$  de  $B_m$  dans elle-même et deux points  $a$  et  $b$  de la sphère  $\partial B_m$ , posons

$$(3.1) \quad F(x) = F(x; f, a, b) = \frac{|1 - b^* f(x)|^2}{|1 - a^* x|^2} \frac{1 - \|x\|^2}{1 - \|f(x)\|^2}, \quad x \in B_m,$$

et définissons  $\lambda = \lambda(f, a, b)$ ,  $0 < \lambda \leq +\infty$ , par

$$(3.2) \quad \lambda(f; a, b) = \sup_{x \in B_m} F(x; f, a, b).$$

THÉOREME 2. - Soit  $f$  une application holomorphe de la boule  $B_m$  dans elle-même, et soient  $a$  et  $b$  deux points de la sphère  $\partial B_m$ .

a. S'il existe une suite de points  $y_n \in B_m$  tels que  $y_n \rightarrow a$  et  $f(y_n) \rightarrow b$ , alors

$$\lambda \leq \liminf_n \frac{1 - \|f(y_n)\|}{1 - \|y_n\|}.$$

b. Si  $f$  est un automorphisme de  $B_m$ , et  $b$  l'image de  $a$  par le prolongement continu de  $f$  à  $\bar{B}_m$ , alors  $\lambda < +\infty$  et  $F(x) = \lambda$  pour tout  $x \in B_m$ .

c. Si  $\lambda < +\infty$  et si  $x_0 \in B_m$  est tel que  $F(x_0) = \lambda$ , alors  $F(x) = \lambda$  pour tout  $x \in B_m \cap d_{x_0, a}$ , et la restriction de  $f$  au disque  $B_m \cap d_{x_0, a}$  l'applique biunivoquement sur le disque  $B_m \cap d_{f(x_0), b}$ .

d. Si  $\lambda < +\infty$ , étant donné un cône

$$(K) \quad \operatorname{Re}(1 - a^* x) \geq k \|a - x\|, \quad \text{où } k \in ]0, 1[ ,$$

$$\frac{1 - \|f(x)\|}{1 - \|x\|}, \frac{1 - \|b^* f(x)\|}{1 - \|x\|}, \frac{1 - b^* f(x)}{1 - a^* x} \rightarrow \lambda \quad \text{quand } x \rightarrow a, \quad x \in B_m \cap K.$$

Remarque. - Dans le cas classique  $m = 1$ ,  $K$  est un angle saillant de sommet  $a$  dont la bissectrice intérieure passe par l'origine, et le dernier résultat signifie que la restriction de  $f$  à l'angle  $B_1 \cap K$  possède une application affine tangente au point  $a$ , d'où le nom de dérivée angulaire; mais ceci n'est plus vrai si  $m \geq 2$ .

Soit, par exemple,  $m = 2$ , les coordonnées étant notées  $\xi$  et  $\eta$ , soit

$$\varphi(\xi) = \frac{2\xi + \sqrt{1 - \xi^2}}{2 + \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad |\xi| < 1,$$

la détermination adoptée pour  $\sqrt{1 - \xi^2}$  valant 1 à l'origine, et soit enfin  $\psi$  une fonction holomorphe et non nulle sur le disque-unité  $B_1$ , telle que  $\log|\psi|$  soit la plus grande minorante harmonique, sur  $B_1$ , de la fonction surharmonique  $\log\sqrt{1 - |\varphi|^2}$ . Prenons l'application holomorphe  $f$  de la boule  $B_2$  dans elle-même définie par  $\xi' = \varphi(\xi)$ ,  $\eta' = \psi(\xi)$ ,  $|\xi| < 1$ , et les points  $a, b$  confondus avec le point de coordonnées 1, 0 : quand  $t \rightarrow 1$ ,  $t \in ]-1, +1[$ , on a  $\varphi(t) \rightarrow 1$ ,  $\psi(t) \rightarrow 0$ ,  $1 - \varphi(t) \sim 1 - t$ ,  $\log|\psi(t)| \sim \frac{3}{4} \log(1 - t)$ , donc

$$ta \rightarrow a, \quad f(ta) \rightarrow a, \quad \frac{1 - \|f(ta)\|}{1 - \|ta\|} \rightarrow 1;$$

ainsi  $\lambda(f, a, a) = 1$ , mais la restriction de  $f$  à  $B_2 \cap K$  n'a pas d'application affine tangente au point  $a$ , puisque  $\frac{\psi(t)}{1 - t}$  n'est pas borné quand  $t \rightarrow 1$ ,  $t \in ]-1, +1[$ .

#### 4. La suite des itérées d'une application holomorphe de $B_m$ dans elle-même.

Soit  $f_n$  la  $n$ -ième itérée de l'application  $f$ ,  $f_1 = f$ . De toute suite d'itérées de  $f$  on peut extraire une suite partielle uniformément convergente sur toute partie compacte de  $B_m$ ; la limite  $g$  de cette suite partielle peut être, ou bien une application holomorphe de  $B_m$  dans  $B_m$ , ou bien une application constante de  $B_m$  sur un point de la sphère  $\partial B_m$ . Si  $f$  est un automorphisme de  $B_m$ , il en est de même des  $f_n$ , et de  $g$  dans la première éventualité ci-dessus. (Cf. H. CARTAN (\*).)

**THÉOREME 3.** — Si  $f$  est un automorphisme de  $B_m$ , autre que l'identité : ou bien  $f$  laisse invariant un point au moins de  $B_m$ , alors la suite  $f_n$  ne converge pas, et les limites de suites partielles convergentes sont encore des automorphismes de  $B_m$ ; ou bien  $f$  ne laisse invariant aucun point de  $B_m$ , alors la suite  $f_n$  converge, uniformément sur tout compact de  $B_m$ , vers une application constante sur un point de la sphère  $\partial B_m$ , invariant par le prolongement continu de  $f$  à  $\bar{B}_m$ .

Démonstration. — Si le point  $x_0 \in B_m$  est invariant par  $f$ , il l'est aussi par les limites d'itérées de  $f$ , qui sont donc des automorphismes de  $B_m$ ; si la suite partielle  $f_{n_k} \rightarrow g$  ( $n_k \rightarrow +\infty$  avec  $k$ ), la suite  $f_{n_k+1} \rightarrow f \circ g \neq g$ , donc la suite  $f_n$  ne converge pas.

Si  $f$  ne laisse invariant aucun point de  $B_m$ , la propriété à établir est classique dans  $B_1$ ; on va donc la supposer vraie dans  $B_{m-1}$ , et envisager successivement les cas suivants :

a. Le prolongement linéaire de  $f$  à l'espace projectif  $P^m$ ; défini par (0.1), laisse invariant dans son ensemble un hyperplan (ou variété linéaire affine de dimension  $m-1$ )  $H$  de  $C^m$  rencontrant  $B_m$ .

Alors, la restriction de  $f$  à  $B_m \cap H$  applique biunivoquement  $B_m \cap H$  sur lui-même; or, si l'on rapporte  $H$  à une base orthonormée,  $B_m \cap H$  est une boule ouverte de  $C^{m-1}$ , pour laquelle la restriction de  $f$  à  $B_m \cap H$  est un automorphisme sans point invariant. Par hypothèse, les restrictions des  $f_n$  à  $B_m \cap H$  ont pour limite un point appartenant à  $\partial B_m \cap H$ ; alors, il en est de même des  $f_n$ .

---

(\*) CARTAN (Henri). — Sur les fonctions de plusieurs variables complexes, L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Z., t. 35, 1932, p. 760-773.



b. Le prolongement linéaire de  $f$  à  $P^m$  laisse invariant un point  $x_1 \in \overline{B}_m$  (qui peut être à l'infini).

$x'$  et  $y'$  étant les images par (0.1) de deux points quelconques  $x$  et  $y \in P^m$ , on a

$$(4.1) \quad 1 - y'^* x' = \frac{1 - \|u\|^2}{(1 - u^* y)(1 - u^* x)} (1 - y^* x) \quad .$$

Alors, il résulte de l'hypothèse que le prolongement linéaire de  $f$  à  $P^m$  laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan  $x_1^* x = 1$  de  $C^m$ , qui rencontre  $B_m$ , et l'on est ramené au cas (a).

c. Le prolongement linéaire de  $f$  à  $P^m$  laisse invariant un point  $a \in \partial B_m$ .

D'après (4.1), il laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan  $a^* x = 1$  de  $C^m$ , dont tous les points, sauf  $a$ ,  $\in \overline{B}_m$ ; si l'on écarte le cas (b),  $a$  est le seul point invariant de l'hyperplan. D'autre part, le prolongement de  $f$  laisse invariante, dans son ensemble, au moins une droite complexe  $d$  issue de  $a$  dans l'hyperplan; si  $d$  est le lieu, pour  $\zeta \in C$ , du point  $a + \zeta b$ , où  $b \neq 0$ ,  $a^* b = 0$ , alors le prolongement de  $f$  transforme  $a + \zeta b$  en  $a + \zeta_1 b$ , où  $\zeta_1$  est lié à  $\zeta$  par une relation homographique, non dégénérée, ne laissant invariant que  $0$ , donc de la forme

$$(4.2) \quad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{\zeta} + h, \quad h = C_0 \neq 0 \quad .$$

En itérant (4.2) : le prolongement linéaire de  $f_n$  à  $P^m$  transforme  $a + \zeta b$  en  $a + \zeta_n b$ , où

$$\frac{1}{\zeta_n} = \frac{1}{\zeta} + nh \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad ;$$

autrement dit : si  $y \in d$  ( $y$  pouvant être à l'infini), les images  $y_n$  de  $y$  par les prolongements des  $f_n$  ont pour limite  $a$ .

Alors, étant donné  $x \in B_m$ , choisissons  $y \in d$  tel que  $y^* x = 1$  : d'après (4.1), on a, de proche en proche,  $y_n^* f_n(x) = 1$ , et  $y_n \rightarrow a$  entraîne  $f_n(x) \rightarrow a$ .

Comme toute application linéaire inversible de  $P^m$  sur lui-même laisse invariant un point au moins de  $P^m$ , tous les cas possibles ont été envisagés. Ainsi, lorsque  $f$  ne laisse invariant aucun point de  $B_m$ , la suite  $f_n$  a pour limite un point  $a \in \partial B_m$ ; enfin, étant donné  $x \in B_m$ ,  $f_n(x) \rightarrow a$  et

$$f \circ f_n(x) = f_{n+1}(x) \rightarrow a \quad ,$$

donc  $a$  est invariant par le prolongement continu de  $f$  à  $\overline{B}_m$ .

THEOREME 4. - Si l'application  $f$  ne laisse invariant aucun point de  $B_m$ , la suite  $f_n$  converge, uniformément sur tout compact de  $B_m$ , vers une application constante sur un point de la sphère  $\partial B_m$ .

Démonstration.

a. Envisageons d'abord le cas où une suite d'itérées  $f_{n_k}$ ,  $n_k \rightarrow +\infty$  avec  $k$ , a une limite  $g$  appliquant  $B_m$  dans  $B_m$  : on peut supposer, en remplaçant au besoin la suite  $n_k$  par une suite partielle, que  $n_{k+1} > n_k$  et  $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \rightarrow h$ . Comme  $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \circ f_{n_{2k}} = f_{n_{2k+1}}$ ,  $g(B_m)$  est contenu dans l'ensemble analytique

$$B_q = \{x \in B_m \mid h(x) = x\} \quad ;$$

ainsi  $B_q \neq \emptyset$ , donc  $h$  est une application holomorphe de  $B_m$  dans  $B_m$  ; d'autre part,

$$f \circ h = \lim_k f_{1+n_{2k+1}-n_{2k}} = h \circ f \quad ,$$

donc :

$$(4.3) \quad x \in B_q \text{ entraîne } f(x) \in B_q \quad .$$

Or (n° 2, corollaire 1 appliqué à  $h$ ),  $B_q$  est l'intersection de  $B_m$  avec une variété linéaire affine  $W$ , dont la dimension  $q$  peut aller de 0 à  $m$  ; si  $q = 0$ ,  $B_0$  est réduit à un point  $x_0 \in B_m$ , (4.3) signifie que  $x_0$  est invariant par  $f$ . Si  $q \geq 1$ ,  $B_q = B_m \cap W$  est une boule à  $q$  dimensions ; la restriction de  $f$  à  $B_q$  est, d'après (4.3), une application holomorphe de  $B_q$  dans  $B_q$ , dont les itérés de rangs  $n_{2k+1} - n_{2k}$  ont pour limite l'application identique : cette restriction est donc (cf. l'article de H. CARTAN déjà cité au début du n° 4) un automorphisme de la boule  $B_q$ , qui (théorème 3) laisse invariant un point au moins de  $B_q$ .

b. Supposons maintenant que  $f$  ne laisse invariant aucun point de  $B_m$  : alors aucune limite d'itérées de  $f$ , dont les rangs tendent vers  $+\infty$ , ne peut être une application de  $B_m$  dans  $B_m$ , autrement dit  $\|f_n(x)\| \rightarrow 1$  pour tout  $x \in B_m$ . On peut extraire de la suite des entiers une suite partielle  $n_j \rightarrow +\infty$  telle que

$$\|f_{n_{j+1}}(0)\| \geq \|f_{n_j}(0)\| \quad ,$$

et de celle-ci une suite partielle  $n_k \rightarrow +\infty$  telle que

$$\frac{1 - \|f_{n_{k+1}}(0)\|}{1 - \|f_{n_k}(0)\|} \leq 1$$

et que la suite  $f_{n_k}$  converge ; sa limite est une constante  $a \in \partial B_m$ , donc

$$f_{n_k}(0) \rightarrow a, \quad f \circ f_{n_k}(0) = f_{n_k} \circ f(0) \rightarrow a \quad .$$

Alors (théorème 2 (a)),  $\lambda(f, a, a) \leq 1$ , donc

$$\frac{|1 - a^* f(x)|^2}{1 - \|f(x)\|^2} \leq \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout } x \in B_m \quad ;$$

en itérant cette inégalité :

$$|1 - a^* f_n(x)|^2 \leq [1 - \|f_n(x)\|^2] \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout } x \in B_m \quad ,$$

et  $\|f_n(x)\| \rightarrow 1$  entraîne  $f_n(x) \rightarrow a$  .

---