

SÉMINAIRE SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

**Esquisse d'une résolution du problème mixte par la
méthode des ondes stationnaires**

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 7, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A8_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

6 juin 1956

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Exposé n° 7

Année 1955/56

-:-:-:-

ESQUISSE D'UNE RÉOLUTION DU PROBLÈME MIXTE PAR
LA MÉTHODE DES ONDES STATIONNAIRES.

par Laurent SCHWARTZ

On se servira désormais de la suite des V_ν :

$$V_\nu = \sqrt{1 + s_\nu^2} U_\nu, \quad (\text{donc } \|V_\nu\|_{L^2} = 1)$$

On posera également : $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}'_{-k}$ et $L^2 = \mathcal{O}'_0$.

On se propose d'abord d'étudier si les critères d'appartenance à $\mathcal{O}'_{-1}$, $\mathcal{O}'_0$, $\mathcal{O}'_1$ trouvés dans l'exposé précédent peuvent se généraliser aux autres espaces $\mathcal{O}'_k$. Ce n'est sûrement pas le cas pour $k \leq -2$ car alors les V_ν ne font plus partie de $\mathcal{O}'_k$. En tout état de cause on a vu qu'il ne peut plus y avoir d'unicité. Par contre on a le

THÉORÈME - Pour $k \geq -1$ une condition nécessaire et suffisante pour que $T \in \mathcal{O}'_k$ est qu'il existe un développement $T = \sum c_\nu V_\nu$ dans $\mathcal{O}'$ avec

$$\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty.$$

- La condition est suffisante. Si k est pair, puisque $\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty$ il existe $S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^k} V_\nu$ dans $\mathcal{O}'_0$. Alors $\Delta S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k-2}} V_\nu$ dans $\mathcal{O}'_2$; $(-\Delta)^2 S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k-4}} V_\nu$ dans $\mathcal{O}'_4$... $(-\Delta)^{k/2} S = \sum c_\nu V_\nu = T$ dans $\mathcal{O}'_k$. Si k est impair, il existe $S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k+1}} V_\nu$ dans $\mathcal{O}'_{-1}$. La suite du raisonnement est la même.

- La condition est nécessaire.

Supposons d'abord k pair. On rappelle que $(-\Delta + 1)^k$ établit un isomorphisme topologique de $\mathcal{O}'_{-k}$ sur $\mathcal{O}'_k$, ([1]). Donc il existe R tel que

$(-\Delta + 1)^k R = T$ mais alors $S = (-\Delta + 1)^{k/2} R \in \mathcal{D}'_0$ donc $S = \sum d_\nu V_\nu$ avec $\sum |d_\nu|^2 < \infty$ d'où :

$$T = (-\Delta + 1)^{k/2} S = \sum d_\nu (1 + s_\nu^2)^{k/2} V_\nu = \sum c_\nu V_\nu, \text{ avec } \sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty$$

Supposons ensuite k impair. On raisonne de même en passant par

$$S = (-\Delta + 1)^{\frac{k-1}{2}} R \in \mathcal{D}'_{-1}.$$

résolution du problème mixte

On cherche une fonction u de t à valeurs dans un espace de distributions sur Ω et satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(t) \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

$g(t)$ est une fonction de t à valeurs dans un $\mathcal{D}'_k$. Elle a donc un développement (non unique si $k \geq 2$) $g(t) = \sum g_\nu(t) V_\nu(x)$. On va chercher un développement de la même forme pour u :

$$u = \sum u_\nu(t) V_\nu(x)$$

La fonction ainsi définie satisfera aux conditions demandées si :

$$\begin{cases} u''_\nu(t) + s_\nu^2 u_\nu(t) = g_\nu(t) \\ u_\nu(0) = u'_\nu(0) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle ayant pour solution élémentaire :

$$e_\nu(t) = \gamma(t) \frac{\sin s_\nu t}{s_\nu}$$

on aura :

$$u_\nu(t) = e_\nu(t) * g_\nu(t).$$

Nous ne discuterons pas plus en détail le problème ; on voit que l'arbitraire dans le développement de $g(t)$ introduit un arbitraire dans la solution (sauf pour $k = 1$).

Référence bibliographique

- [1] SCHWARTZ, L., Séminaire 2.- Paris, 1954/55 (multigraphié), page 17-03, exemple 1°) après la proposition 2.