B. Malgrange

Compléments divers. Équations elliptiques

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. nº 3, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

26 novembre 1954

Exposé n° 3 (B. Malgrange)

COMPLEMENTS DIVERS. EQUATIONS ELLIPTIQUES

I.- Compléments aux exposés 1 et 2

1.- Equations homogènes.

Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants. On désignera par $\check{D}$ son adjoint et par R, $\mathcal{F}(\check{D}\,\delta)$.

Théorème 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que toute solution dans $\mathcal{E}$ de l'équation $Df = 0$ soit limite dans $\mathcal{E}$ de polynômes solutions est que chaque facteur irréductible de R s'annule à l'origine.

Démonstration. Pour que cette propriété d'approximation soit vérifiée, il faut et il suffit, évidemment, que l'on puisse approcher toute exponentielle-polynôme solution par des polynômes solutions. Or, dire que $\mu \in \mathcal{E}'$ est orthogonale à toute exponentielle-polynôme solution c'est dire que :

(1) $\dfrac{\mathcal{F}\mu}{R}$ est analytique entière (exposé 1)

Dire que $\mu \in \mathcal{E}'$ est orthogonale à tout polynôme solution, c'est dire que :

(1') $\dfrac{\mathcal{F}\mu}{R}$ est holomorphe à l'origine (exposé 1)

Nous devons donc démontrer que la condition de l'énoncé est nécessaire et suffisante pour que (1') $\Longrightarrow$ (1).

Soit $R = \prod_i R_i$ où R_i sont les facteurs irréductibles de R [(1)] (qui peuvent n'être pas tous distincts). Si, par exemple, on a : $R_1(0) \neq 0$, en prenant pour μ le polynôme de dérivation défini par $\mathcal{F}\mu = \dfrac{R}{R_1}$, on voit que :

$\dfrac{\mathcal{F}\mu}{R}$ est holomorphe à l'origine, mais non entière ; donc μ est orthogonale aux polynômes solutions, mais non à toutes les solutions S ; la condition est donc nécessaire.

---

(1) On démontre sans grande difficulté, et nous l'admettrons, que tout polynôme irréductible R_i a pour variété des zéros une variété irréductible en tant que variété analytique.

Supposons que, pour tout i, on ait : $R_i(0) = 0$; soit μ tel que $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$ soit holomorphe à l'origine ; la variété polaire de la fonction méromorphe $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$ est formée d'un certain nombre de composantes irréductibles de la variété $R = 0$; toutes ces composantes passent à l'origine ; puisque $\frac{\mathcal{F}_\mu}{R}$ est holomorphe à l'origine, sa variété polaire est vide et elle est holomorphe partout.

C.Q.F.D.

Exemple. La propriété vaut pour $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; Δ^2 ; $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Elle ne vaut pas pour $\Delta + \lambda$ $(\lambda \neq 0)$ (dans ce cas, où $R(0) \neq 0$, il n'y a pas de polynômes $\not\equiv 0$ solutions de l'équation).

2.- Propriétés de la solution élémentaire.

Proposition 1. Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants tel que l'hyperplan $x_1 = 0$ ne soit pas caractéristique.
Pour tout $r > 0$, il existe une constante $C(r,D)$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on ait :

$$(2) \qquad \|\varphi\|^2 \leq C(r,D)\left\{\|e^{2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2 + \|e^{-2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2\right\}$$

(on pose $\|\varphi\|^2 = \int \varphi\bar{\varphi}\, dx_1, \ldots, dx_n$)

La démonstration résultera de deux lemmes :

Lemme 1. Soit $H(\lambda)$ $(\lambda = \sigma + i\tau)$ une fonction d'une variable complexe, transformée de Fourier d'une fonction $h(x) \in \mathcal{D}(R^1)$; on pose :

$H_1(\lambda) = (\lambda - \alpha)\, H(\lambda)$, $\alpha \in C$ quelconque, et $h_1 = \bar{\mathcal{F}} H$,

Quels que soient ρ réel, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, il existe une constante $K > 0$ ne dépendant que de ρ, ρ_1, ρ_2 (mais non de H et de α) et telle que :

$$\frac{1}{K}\int_{\tau=\rho} |H(\lambda)|^2 d\lambda \leq \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda$$

<u>Démonstration</u>. Partageons la droite $\tau = \rho$ en deux ensembles, L_1 et L_2 :

L_1 l'ensemble des points où $|\lambda - \alpha| \geqslant K_1 = \min\left(\frac{\rho_1}{4}, \frac{\rho_2}{4}\right)$

$L_2 = \complement L_1$

et majorons séparément $\int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda$ et $\int_{L_2} |H(\lambda)|^2 d\lambda$

1°) Si $\lambda \in L_1$, on a : $|H(\lambda)| \leqslant \frac{1}{K_1} |H_1(\lambda)|$

d'où : $$\int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \frac{1}{K_1^2} \int_{\tau=\rho} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda$$

$$\leqslant K_2 \int |e^{2\pi\rho x} h_1(x)|^2 dx$$

$$\leqslant K_3 \left\{ \int |e^{2\pi(\rho+\rho_1)x} h_1(x)|^2 dx + \int |e^{2\pi(\rho-\rho_2)x} h_1(x)|^2 dx \right\}$$

et finalement :

$$\int_{L_1} |H(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant K_3 \left\{ \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\lambda)|^2 d\lambda \right\} \tag{3}$$

K_3 ne dépendant que de ρ, ρ_1, ρ_2.

2°) Si $\lambda \in L_2$, on a :

$$|H(\lambda)| \leqslant \max_{|\zeta-\alpha|=K_1} |H(\zeta)| = \max_{|\zeta-\alpha|=K_1} \frac{1}{K_1} |H_1(\zeta)|$$

Mais $\mathfrak{I}(\lambda) = \rho_1$ donc, si $|\zeta - \alpha| = K_1$, on aura : $|\mathfrak{I}\zeta - \rho| \leqslant 2K_1 \leqslant \frac{\rho_1}{2}$ et $\leqslant \frac{\rho_2}{2}$,

c'est-à-dire :

$$|H(\lambda)| \leqslant \frac{1}{K_1} \operatorname*{Max}_{|\mathfrak{I}\zeta-\rho| \leqslant 2K_1} |H_1(\zeta)| \quad , \text{si } \lambda \in L_2 \tag{4}$$

Si l'on a : $|\Im\zeta - \rho| \leq 2K_1$, on aura : $\rho - \rho_2 \leq \Im\zeta < \rho + \rho_1$;

par suite, on peut écrire :

$$H_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau=\rho-\rho_2} \frac{H_1(\zeta')d\zeta'}{\zeta'-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau=\rho+\rho_1} \frac{H_1(\zeta')d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

d'où

$$|H_1(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi^2}\left|\int_{\tau=\rho-\rho_2} \frac{H_1(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\right|^2 + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\tau=\rho+\rho_1} \frac{H_1(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}^{\;2}$$

(parce que $u = v+w$ entraîne $|u|^2 \leqslant 2(v^2 + w^2)$)

En appliquant Cauchy-Schwarz au second membre, il vient :

$$|H_1(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2}\int_{\tau=\rho-\rho_2} \frac{1}{|\zeta'-\zeta|^2}\,d\zeta' \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\zeta')|^2 d\Im\,' + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\tau=\rho+\rho_1} \int_{\tau=\rho+\rho_1}$$

Mais $\displaystyle\int_{\tau=\rho-\rho_2} \frac{1}{|\zeta'-\zeta|^2}\,d\zeta' = \frac{\pi}{|\Im\zeta - |\rho-\rho_2|}$ et, comme $|\Im\zeta - \rho| \leqslant \frac{\rho_2}{2}$,

et qu'on a une inégalité analogue pour $\displaystyle\int_{\tau=\rho+\rho_1}$

(5) $$|H_1(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\rho_2}\int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\zeta')^2\,d\zeta' + \frac{1}{\pi\rho_1}\int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\zeta')|^2 d\zeta'$$

lorsque ζ est dans la bande considérée dans (4)

(4) + (5) montrent qu'il existe K_4 ne dépendant que de ρ, ρ_1, ρ_2, tel que :

$$|H(\lambda)|^2 \leq K_4\left\{ \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta + \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta \right\} \quad , \text{ si } \lambda \in L_2$$

Mais L_2 est un intervalle de longueur $\leq 2K_1$, donc il existe K_5 , ne dépendant que de ρ , ρ_1, ρ_2 , tel que :

$$(6) \qquad \int_{L_2} |H(\lambda)|^2 d\lambda \leq K_5\left\{ \int_{\tau=\rho-\rho_2} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta + \int_{\tau=\rho+\rho_1} |H_1(\zeta)|^2 d\zeta \right\}$$

et (3) + (6) démontre le lemme 1.

<u>Lemme 2</u>. $H(\lambda)$ <u>est défini de la même manière que dans le lemme 1</u>.
Soit $Q(\lambda) = \lambda^m + \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda^{m-j}$ <u>un polynôme de degré</u> m ;
et soit $H_m(\lambda) = Q(\lambda)H(\lambda)$; quel que soit $r > 0$, il existe une constante C, dépendant de r et de m , mais non des a_i, telle que :

$$\int |H(\sigma)|^2 d\sigma \leq C\left\{ \int |H_m(\sigma+ir)|^2 d\sigma + \int |H_m(\sigma - ir)|^2 d\sigma \right\}$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit d'appliquer le lemme 1 par récurrence sur le degré m du polynôme Q .

On pose : $Q(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \alpha_j)$, $Q_K(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \alpha_j)$, $H_K(\lambda) = Q_K(\lambda)H(\lambda)$

Montrons que, si le lemme 2 est vrai pour H_k , il sera vrai pour H_{k+1} .
Par hypothèse, il existe une constante $C(r,k)$ telle que :

$$(7) \qquad \int |H(\sigma)|^2 d\sigma \leq C(r,k)\left\{ \int |H_k(\sigma + i\tfrac{r}{2})|^2 d\sigma + \int |H_k(\sigma - i\tfrac{r}{2})|^2 d\sigma \right\}$$

En appliquant le lemme 1 à $\rho = \frac{r}{2}$, $\rho + \rho_1 = r$, $\rho - \rho_2 = -r$, il vient :

$$\int |H_k(\sigma + i\tfrac{r}{2})|^2 d\sigma \leq C_1\left\{ \int |H_{k+1}(\sigma+ir)|^2 d\sigma + \int |H_{k+1}(\sigma-ir)|^2 d\sigma \right\}$$

C_1 ne dépendant que de r

en majorant de même $\int |H_k(\sigma - i\frac{r}{2})|^2 d\sigma$ et en portant ces deux majorations dans (7), on obtient le résultat cherché.

Démonstration de la proposition 1. En multipliant au besoin D par une constante (ce qui chargera la constante C, mais non l'existence de l'inégalité), on peut supposer que R a la forme suivante :

$$R(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \lambda_1^m + \sum_{j=1}^{m} R_j \lambda_1^{m-j} \qquad , R_j \text{ polynôme en } x_2,\ldots,x_n .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \mathcal{F}\varphi$, $G = RF$.

Pour $\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ fixés, on a, en appliquant le lemme 2 :

$$\int |F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)|^2 d\sigma_1 \leq C(r,D)\left\{ \int |G(\sigma_1+ir,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)|^2 d\sigma_1 + \right.$$
$$\left. + \int |G(\sigma_1-ir,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)|^2 d\sigma_1 \right\}$$

où $C(r,D)$ ne dépend pas de $\sigma_2,\ldots,\sigma_n$. Par suite :

$$\int |F| \sigma_1,\ldots,\sigma_n)|^2 d\sigma_1,\ldots,d\sigma_n \leq C(r,D)\left\{ \int |G(\sigma_1+ir,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)|^2 \right.$$
$$\left. d\sigma_1,\ldots,d\sigma_n + \int |G(\sigma_1+ir,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)|^2 d\sigma_1,\ldots,d\sigma_n \right\}$$

et, par transformation de Fourier :

$$\|\varphi\|^2 \leq C(r,D)\left\{ \|e^{2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2 + \|e^{-2\pi r x_1} \check{D}\varphi\|^2 \right\}$$

C.Q.F.D.

Théorème 2. Tout opérateur différentiel à coefficients constants D opérant sur R^n admet une solution élémentaire E somme finie de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ de fonctions localement de carré sommable (en particulier, $T \in \mathcal{D}'^{[\frac{n}{2}]+1}$).

Ceci améliore un résultat donné dans l'exposé 2 ($T \in \mathcal{D}'^{n+1}$).

Par un changement de variable linéaire, nous pouvons nous ramener au cas où l'hyperplan $x_1 = 0$ n'est pas caractéristique.

Désignons par V l'espace des fonctions f qui vérifient :

$$e^{2\pi r x_1} f \in L^2 \quad \text{et} \quad e^{-2\pi r x_1} f \in L^2 .$$

V est un espace de Hilbert (produit scalaire évident).

L'inégalité (2) montre qu'il existe une application continue $\check{G}$ de $\check{D}\mathcal{D} \subset V$ dans L^2 telle que $\check{G}(\check{D}\varphi) = \varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$. Mais toute application linéaire continue d'un sous-espace d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel topologique complet et prolongeable à l'espace de Hilbert entier. On peut donc supposer $\hat{G}$ linéaire continue de V dans L^2.

$$\check{G}\,\check{D} = \varphi \quad \text{lorsque } \varphi \in \mathcal{D}$$

Le transposé G de $\check{G}$ applique L^2 dans le dual V' de V. V' est comme on le voit immédiatement, l'espace des fonctions que l'on peut écrire sous la forme :

$$e^{2\pi r x_1} f_1 + e^{-2\pi r x_1} f_2 \,, \qquad \text{avec } f_1 \in L^2 \,, \quad f_2 \in L^2$$

Si $f \in L^2$, on a : $\langle D\,G\,f, \varphi\rangle = \langle f, \check{G}\,\check{D}\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, donc $D(Gf) = f$. On a ainsi résolu les équations avec second membre $\in L^2$, la solution étant localement - L^2.

Mais δ est somme de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}]+1$ de fonctions $\in L^2$: on pourra donc trouver ainsi une solution élémentaire E somme de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ de fonctions $\in V'$, donc localement $\in L^2$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>. Ce résultat est le meilleur possible : si $D =$ identité, $T = \delta$ est somme de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$, mais non $< [\frac{n}{2}] + 1$ de fonctions localement de carré sommable.

On peut voir ces résultats par les méthodes indiquées au tome II des distributions (page 44, formule (VI,6;16) et ce qui suit). Toute fonction φ dont les dérivées (au sens distribution) d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ sont localement - L^2 est continue, et la forme linéaire $\varphi \to \varphi(0)$ (c'est-à-dire δ) est continue sur l'espace $(\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n}{2}]+1})$ de ces fonctions. Le dual de $(\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n}{2}]+1})$ est précisément l'espace des sommes finies de dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ de fonctions à support compact de L^2, d'où le résultat positif annoncé pour δ.

Mais il n'en est plus de même si on remplace $[\frac{n}{2}] + 1$ par $[\frac{n}{2}]$, comme le montre l'exemple de $\varphi = (\log \frac{1}{r})^k$, qui, pour $0 < k < \frac{1}{2}$, a ses dérivées d'ordre $\leq [\frac{n}{2}]$ localement-L^2 mais n'est pas bornée au voisinage de $x = 0$, d'où le résultat négatif relatif à δ.

II.- Equations à coefficients constants avec second membre, dans un ouvert quelconque.

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert</u> $\subset R^n$ <u>et</u> D <u>un opérateur différentiel à</u> n <u>variables à coefficients constants</u>. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1°) $D\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$

2°) <u>Il existe un entier</u> k' <u>tel que</u> $D\mathcal{D}'^{k'}(\Omega) \supset \mathcal{D}'^{0}(\Omega)$ (2)

3°) <u>Pour tout compact</u> $K \subset \Omega$, <u>il existe un compact</u> $K' \subset \Omega$ <u>qui vérifie ceci: si</u> $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ <u>et si le support de</u> $\check{D}S$ <u>est contenu dans</u> K, <u>alors le support de</u> S <u>est contenu dans</u> K'.

<u>Démonstration</u>. <u>Première partie</u> :

1°) $\Rightarrow$ 3°) . Soit K un compact $\subset \Omega$ et soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et telles que $|\check{D}\varphi|$ ait son support dans K et soit ≤ 1 . $\check{D}\Phi$ est un ensemble borné dans $\mathcal{E}'(\Omega)$. Mais Φ est aussi un ensemble borné dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Pour le voir, il suffit, puisque $\mathcal{E}$ est complet, de montrer que Φ est faiblement borné dans $\mathcal{E}'(\Omega)$, donc que, pour toute $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $|\langle f, \varphi\rangle|$ reste borné pour $\varphi \in \Phi$. L'hypothèse 1°) indique qu'il existe $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que $Dg = f$. Alors

$$\sup_{\varphi\in\Phi}|\langle f, \varphi\rangle| = \sup_{\varphi\in\Phi}|\langle Dg, \varphi\rangle| = \sup_{\varphi\in\Phi}|\langle g, \check{D}\varphi\rangle| = \sup_{\psi\in\check{D}\Phi}|\langle g, \psi\rangle| < +\infty,$$

puisque $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ et que $\check{D}\Phi$ est borné dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Comme Φ est borné, les $\varphi \in \Phi$ ont leurs supports dans un compact fixé, soit K'.

Si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $\check{D}\varphi$ ait son support dans K , il existe $C > 0$, tel que $C\varphi \in \Phi$, donc φ aura aussi son support dans K', ce qui montre 2°) dans le cas particulier de $S = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Cette démonstration est valable même si D est à coefficients variables, et Ω une variété ; $\check{D}$ est alors le transposé de D .

Passons à $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ quelconque

Soit L un voisinage compact de K, $L \subset \Omega$. Si $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est telle que $\check{D}S$ a son support dans K , le support de $\alpha * \check{D}S = \check{D}(\alpha * S)$ sera contenu dans L dès

---

(2) Nous mettons k' parce que, si k est l'ordre de la solution élémentaire, on pourra, comme il est montré plus loin, prendre $k' = k + 1$.

que $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$ aura son support assez voisin de l'origine ; alors il existe L' compact $\subset \Omega$ tel que $\alpha * S$ ait son support dans L', et par passage à la limite $\alpha \longrightarrow \delta$, S aura aussi son support dans L'.

<u>Deuxième partie</u> :

2°) ⇒ 3°) On procède de la même manière (on prendra pour Φ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que $\check{D}\varphi$ ait son support dans K, et soit en module ≤ 1 ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k' ; on montre que Φ est borné dans $\mathcal{D}^0$, et on achève comme précédemment).

<u>Troisième partie</u>:

3°) ⇒ 1°) Il suffit de démontrer

a) que l'application $\check{D} : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega)$ est biunivoque ;

b) que $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ (fortement ou faiblement, $\mathcal{E}$ étant réflexif).

a) prouve en effet que $D\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$; (b) prouve que D est un homomorphisme faible de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ donc un homomorphisme fort puisque $\mathcal{E}(\Omega)$ est un Fréchet, donc $D\mathcal{E}(\Omega)$ est complet donc fermé, donc $D\mathcal{E}(\Omega)$ sera bien $\mathcal{E}(\Omega)$.

a) est immédiat : si S distribution à support compact vérifie $\check{D}S = 0$, on a, par transformation de Fourier : $\mathcal{F}(\check{D}\delta).\mathcal{F}S = 0$, et comme c'est un produit de fonctions analytiques, l'une est nulle, donc $\mathcal{F}S = 0$, et $S = 0$

b) Il suffit de montrer que l'intersection de $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$ avec tout ensemble borné faiblement fermé est faiblement fermée ; les distributions d'un ensemble borné ayant leur support dans un compact fixe, il suffit de démontrer ceci : <u>pour tout</u> K <u>compact</u> $\subset \Omega$, $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{E}'_K$ <u>est fermé</u> dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Soit $\check{E}$ une solution élémentaire de $\check{D}$; si des $T_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$ sont telles que les $\check{D}T_i$ aient leurs supports dans K et convergent vers S, on aura : $T_i = \check{E} * \check{D}T_i$ donc les T_i tendent vers $\check{E} * S$ dans $\mathcal{D}'(R^n)$; mais les T_i ont leurs supports dans un compact fixe $K' \subset \Omega$ en vertu de 3°), donc $T = \check{E} * S$ a son support dans $K'(\Omega)$ et l'on a $= \check{D}T = S$, donc S appartient aussi à $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{E}'_K$ et 3°) entraîne bien 1°)

<u>Quatrième partie</u>:

3°) ⇒ 2°) Soit $\check{E} \in \mathcal{D}'^k$ une solution élémentaire de $\check{D}$.

<u>Lemme 1. Soit</u> $\mathcal{O}$ <u>un voisinage convexe de l'origine dans</u> $\mathcal{D}^0(\Omega)$; <u>pour tout compact</u> K <u>contenu dans</u> Ω, <u>il existe un ouvert convexe contenant zéro</u> $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{D}^k_K$ <u>tel que l'on ait</u> : $\check{D}\mathcal{O} \cap \mathcal{D}^k_K \supset \mathcal{O}_K \cap \check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$

Cela revient à dire : si des $\varphi_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$ sont telles que les $\check{D}\varphi_i$ soient dans $\mathfrak{D}^k_K$ et y convergent vers zéro, les φ_i sont continues et convergent vers zéro dans $\mathfrak{D}^0(\Omega)$.

Or les φ_i vérifient : $\varphi_i = \check{E} * \check{D}\varphi_i$; comme $\check{E} \in \mathfrak{D}'^k$, $\check{D}\varphi_i \in \mathfrak{D}^k$, φ_i est continue, et converge vers zéro uniformément sur tout compact ; comme les φ_i ont (par l'hypothèse 3°)) leurs supports dans un compact $K' \subset \Omega$, elles tendent bien vers zéro dans $\mathfrak{D}^0(\Omega)$.

Nous allons maintenant montrer ceci :

<u>Lemme 2</u>. $\mathcal{O}$ <u>étant défini comme au lemme 1, il existe un ouvert</u> $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$ <u>et contenant zéro tel que</u> : $\check{D}\mathcal{O} \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega) \supset \mathcal{O}' \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega)$.

Cela revient à dire : si des $\varphi_i \in \mathcal{E}'(\Omega)$ sont telles que les $\check{D}\varphi_i$ convergent vers 0 dans $\mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$, alors φ_i convergent vers 0 dans $\mathfrak{D}^0(\Omega)$. (La difficulté provient des topologies limites inductives).

Soit L l'ensemble des fonctions φ dont les dérivées d'ordre $\leq k+1$ (<u>au sens distributions</u>) sont des fonctions à support compact, mesurables, majorées en module par 1 . L est dans $\mathfrak{D}^k(\Omega)$ ~~et~~ $L \cap \mathfrak{D}^k_K$ est compact d'après Ascoli. Pour tout compact K, déterminons l'ouvert $\mathcal{O}_K$ de $\mathfrak{D}^k_K$ d'après le lemme 1.

Posons $M = L \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega)$. Le lemme 1 nous montre que $M \cap \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega) \subset \subset \check{D}\mathcal{O} \cap \mathfrak{D}^k_K \subset \check{D}\mathcal{O}$. Donc si $\mathcal{O}''$ est l'enveloppe convexe de tous les ouverts $M \cap \mathcal{O}_K$ des $M \cap \mathfrak{D}^k_K$, K compacts de Ω, $\check{D}\mathcal{O}$ contient $\mathcal{O}''$. Le lemme 3 qui va suivre nous permet de montrer que $\mathcal{O}''$ est ouvert dans M pour la topologie induite par $\mathfrak{D}^k(\Omega)$ (en prenant $F = \mathfrak{D}^k(\Omega)$, $F_p = \mathfrak{D}^k_K$, M et $\mathcal{O}''$ pour appliquer ce lemme. $M \cap \mathfrak{D}^k_K$ est bien compact, car $L \cap \mathfrak{D}^k_K$ est compact, et $\mathfrak{D}^k_K \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega)$ est fermé dans $\mathfrak{D}^k_K$, même pour la topologie induite par $\mathcal{E}'(\Omega)$, puisque, dans l'hypothèse 3°) où nous nous sommes placés, $\check{D}\mathcal{E}'(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega)$). Alors $\mathcal{O}'' \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$ est ouvert sur $M \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$, et contenu dans $\check{D}\mathcal{O} \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$. Un tel ouvert est de la forme $M \cap \mathcal{O}'''$ où $\mathcal{O}'''$ est un ouvert de $\mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$ pour la topologie induite par $\mathfrak{D}^k$ donc a fortiori pour la sienne propre, ou encore $L \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{O}'''$; mais $L \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$ est l'ensemble des $\varphi \in \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$ dont les dérivées d'ordre $\leq k+1$ sont majorées en module par 1 , c'est un ouvert de $\mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$, donc finalement $\mathcal{O}' = L \cap \mathcal{O}'''$ est ouvert dans $\mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$, et on a bien $\mathcal{O}' \cap \check{D}\,\mathcal{E}'(\Omega) = M \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega) \subset \check{D}\mathcal{O} \cap \mathfrak{D}^{k+1}(\Omega)$. Reste à montrer le lemme 3.

<u>Lemme 3</u>. (B.Malgrange, C.R. Acad.Sc. 12.1.1954). <u>Soit</u> F <u>un espace</u> $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, F_p <u>une suite de définiton de</u> F , <u>et</u> M <u>un convexe contenant zéro, tel que les</u>

$M \cap F_p = M_p$ <u>soient compacts</u> ; <u>tout</u> $\mathcal{O} \subset M$ <u>convexe contenant zéro et tel que les</u> $\mathcal{O}''_p = \mathcal{O} \cap M_p$ <u>soient des ouverts dans</u> M_p <u>est un voisinage de zéro dans</u> M .

Pour la démonstration, consulter la note de Malgrange.

Démontrons maintenant que 3°) $\Rightarrow$ 2°) . Soit $f \in \mathcal{D}'^0$ et considérons la forme linéaire suivante h sur $\check{D}\mathcal{D}(\Omega)$: $\check{D}\varphi \to \langle f, \varphi \rangle$

Du lemme 2 résulte immédiatement : si des $\check{D}\varphi_i$ convergent vers zéro dans $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$, les φ_i convergent vers zéro dans $\mathcal{D}^0(\Omega)$; par suite $\langle f, \varphi_i \rangle \to 0$; h est donc une forme linéaire continue sur $\check{D}\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^{k+1}(\Omega)$; donc on peut les prolonger en un $g \in \mathcal{D}'^{k+1}(\Omega)$; et si $\varphi \in \mathcal{D}$, on a : $\langle Dg, \varphi \rangle = \langle g, \check{D}\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ d'où $Dg = f$; c'est-à-dire $D\mathcal{D}'^{k+1}(\Omega) \supset \mathcal{D}^0(\Omega)$, ce qui est 2°), avec $k' = k + 1$.

<u>Remarques</u>.

a) Pour $\Omega = R^n$ (de Ω convexe) 3°) est vérifié immédiatement (théorème des supports). On retrouve ainsi les résultats de l'exposé 2.

b) 2°) entraîne évidemment $D\mathcal{D}'^{m+k'}(\Omega) \supset \mathcal{D}'^m(\Omega)$ d'où $D\mathcal{D}'_F(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$ ($\mathcal{D}'_F$ = espace des distributions d'ordre fini) ; on ne sait pas si la réciproque est vraie.

<u>Cas des équations elliptiques</u>.

<u>Définition</u>. D (opérateur différentiel quelconque sur une variété) <u>est dit "elliptique"</u> (resp. " analytique - elliptique) <u>si, étant donnés</u> S <u>et</u> T <u>dans</u> $\mathcal{D}'$ <u>tels que</u> $D\,S = T$, S <u>est indéfiniment différentiable</u> (resp. analytique) <u>dans tout ouvert où</u> T <u>est indéfiniment différentiable</u> (resp. analytique)

Nous verrons dans les exposés suivants que si D est un opérateur différentiel à coefficients constants sur R^n,

"D elliptique" équivaut à "Il existe une solution élémentaire indéfiniment différentiable en dehors de l'origine ".

"D analytique-elliptique" équivaut à "Il existe une solution élémentaire analytique en dehors de l'origine ".

En particulier, " D analytique elliptique " $\Longrightarrow$ "D elliptique".

Enfin, si D est elliptique (resp. analytique-elliptique), $\check{D}$ est évidemment elliptique (resp. analytique-elliptique) puisqu'il a comme solution élémentaire $\check{E}$, E étant une solution élémentaire de D .

Théorème 4.

a) Si D est elliptique, l'une quelconque des propriétés 1°), 2°), 3°) du théorème 3 équivaut à :

$$4°)\ D\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$$

b) Si D est analytique-elliptique, 1°), 2°), 3°), 4°) sont vraies pour tout ouvert $\Omega \subset R^n$.

a) Si D est elliptique, 4°) $\Rightarrow$ 1°) ; en effet, si $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, il existe $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $Dg = f$; mais g est indéfiniment différentiable d'après l'ellipticité.

Si D est elliptique, 1°) $\Rightarrow$ 4°) . Soit $\{\mathcal{O}_i\}$ un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts $\mathcal{O}_i \subset \Omega$ et relativement compacts dans Ω ; et soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à $\{\mathcal{O}_i\}$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; on peut trouver, $S_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que : $D\,S_i = T$ dans $\mathcal{O}_i$ (il suffit de prendre $S_i = E * \beta_i T$, où E désigne une solution élémentaire de D et β_i une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur $\mathcal{O}_i$).

Dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, on a : $D(S_i - S_i) = 0$; donc $S_i - S_i$ est une fonction indéfiniment différentiable dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, d'après l'ellipticité.

Soit $S_i' = \sum_{j \neq i} \alpha_j(S_i - S_j)$ $\quad S_i'$ est une distribution définie dans $\mathcal{O}_i$: en effet S_i est définie dans $\mathcal{O}_i$ et α_j partout, donc $\alpha_j S_i$ dans $\mathcal{O}_i$; $\alpha_j S_j$ est définie partout.

S_i' possède les propriétés suivantes :

1/ S_i' est indéfiniment différentiable dans $\mathcal{O}_i$, car $\alpha_j(S_i - S_j)$ a son support dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, où $S_i - S_j$ est indéfiniment différentiable.

2/ $S_i' - S_j' = S_i - S_j$ dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ car :

$$S_i' - S_j' = \sum_{k \neq i,j} \alpha_k[(S_i - S_k) - (S_j - S_k)] + \alpha_j(S_i - S_j) - \alpha_i(S_j - S_i)$$

$$= \sum_k \alpha_k(S_i - S_j) = S_i - S_j$$

On a donc aussi $S_i' - S_i = S_j' - S_j$ dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

Il existe donc $\Sigma \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que : $\Sigma = S_i' - S_i$ dans $\mathcal{O}_i$, pour tout i (principe du recollement des morceaux).

Alors : $D\Sigma = D\,S_i' - D\,S_i$ dans $\mathcal{O}_i$;

donc $D\Sigma + T = \varphi$ est indéfiniment différentiable (puisque dans $\mathcal{O}_i, \varphi = D\,S_i'$)

Par hypothèse, il existe $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que : $D\psi = \varphi$; d'où :

$$T = D(\psi - \Sigma) ,$$ C.Q.F.D.

b) Montrons que 3°) est vérifié pour tout ouvert Ω lorsque D est analytique-elliptique.

Soit K un compact $\subset \Omega$; considérons $\complement K \cap \Omega$, et décomposons le en ses composantes connexes ; les unes, soient $\mathcal{O}'_i$, sont des ouverts relativement compacts, les autres $\mathcal{O}'_j$ sont des ouverts non relativement compacts.

Soit $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tel que $\check{D} S$ ait son support dans K ; S est analytique sur les $\mathcal{O}'_j$ (et sur les $\mathcal{O}'_i$) en vertu de l'hypothèse d'ellipticité

S étant à support compact, est nécessairement nulle sur un ouvert $\subset \mathcal{O}'_j$, donc sur $\mathcal{O}'_j$.

Finalement, on trouve que le support de S est nécessairement contenu dans $K' = K \cup (\cup \mathcal{O}'_i)$.

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que K' est compact ; K' est fermé (car son complémentaire dans Ω est $\cup \mathcal{O}'_j$) . Soit V un voisinage compact de K, et F la frontière de V ; $F \cap K'$ est compact ; comme il est recouvert par les $\mathcal{O}'_i$, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux, soit $\mathcal{O}'_{i_1}$,..., $\mathcal{O}'_{i_k}$;

Si $i \neq i_1,\dots,i_k$, $\mathcal{O}'_i$, qui est disjoint des $\mathcal{O}'_{i_j}$ ne peut rencontrer F ; comme il est adhérent à K et connexe, on a donc : $\mathcal{O}'_i \subset V$; finalement :

$K' \subset V \cup \mathcal{O}'_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{O}'_{i_k}$ et K' est bien borné, donc compact.
