

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Ensembles m -polaires

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A18_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-

Exposé n° 15ENSEMBLES m-POLAIRES.

-:-:-

Soit, comme d'habitude, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous allons maintenant nous intéresser au problème de savoir quand on a $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$.

Nous avons rencontré cette situation pour $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nous savons qu'alors le problème de Dirichlet, en tant que problème aux limites, subit une sorte de dégradation. En effet, il revient à chercher $u \in \mathcal{O}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $(-\Delta + \lambda)u = f$, avec $f \in \mathcal{O}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n)$.

Et nous avons vu que $(-\Delta + \lambda)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{O}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n)$; il y a toujours une solution et une seule (en particulier, le problème homogène $(-\Delta + \lambda)u = 0$ n'admet que la solution $u = 0$) et la seule condition aux limites qui soit possible est exprimée par le fait même que $u \in \mathcal{O}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbb{R}^n)$. On aura les mêmes conclusions si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par Ω et si $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$: la seule condition aux limites qui soit possible est que u soit nulle au contour de Ω . C'est à caractériser ce contour que vont servir les ensembles m-polaires.

ENSEMBLES m-POLAIRES.

Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dira que E est m-polaire si toute distribution $\in \mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$, ayant son support dans E , est nécessairement nulle.

Proposition 1 : Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) E est m-polaire ;
- b) toute distribution T , localement d'ordre $\leq m$ (ordre par rapport à L^2) et ayant son support dans E , est nulle ;
- c) toute distribution T , à support compact, d'ordre $\leq m$, et ayant son support dans E , est nulle.

Rappelons qu'une distribution est localement d'ordre $\leq m$ par rapport à L^2 , si elle peut s'exprimer, sur tout ouvert borné, par une somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de L^2 . Une telle distribution appartient à $\mathcal{O}'^m_{L^2}(\mathbb{R}^2)$ s'il existe une telle représentation indépendante de l'ouvert borné considéré.

Il est donc évident que $b) \implies a) \implies c)$. Montrons que $c) \implies b)$. Prenons une fonction $\alpha(x) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Si T est une distribution localement d'ordre $\leq m$, αT est à support compact (contenu dans E) et d'ordre $\leq m$, donc est nulle. Et comme α est quelconque, ceci entraîne la nullité de T .

Proposition 2 : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\int \Omega$ est m-polaire ;
- b) $\mathcal{O}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$.

C'est évident. Car dire que $\mathcal{O}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ équivaut par dualité, à dire que toute distribution de $\mathcal{O}'^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$, nulle dans Ω , est égale à zéro.

Corollaire : Si $\int \Omega$ est m-polaire, $\mathcal{O}^m_{L^2}(\Omega)$ est isomorphe à $\mathcal{O}^m_{L^2}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$.

Immédiat, étant donné que $\mathcal{O}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{O}^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ induisent la même topologie sur $\mathcal{O}(\Omega)$.

Donnons quelques exemples : dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble 0-polaire est un ensemble de mesure nulle ; un ensemble 1-polaire est ce qu'on appelle, en théorie du potentiel, un ensemble de capacité nulle. Toujours dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble $([\frac{n}{2}] + 1)$ -polaire est vide. Cela résulte de ce que l'ordre de la mesure de Dirac en un point est exactement $[\frac{n}{2}] + 1$ (rappelons qu'il s'agit ici de l'ordre par rapport à L^2). Plus précisément :

Proposition 3 : Quel que soit l'opérateur de dérivation D , à coefficients constants, d'ordre k , la distribution $D\delta$ est d'ordre $[\frac{n}{2}] + k + 1$ par rapport à L^2 .

1°) L'ordre de δ est $\leq [\frac{n}{2}] + 1$. Ceci entraînera que l'ordre de $D\delta$ est $\leq [\frac{n}{2}] + k + 1$. Pour établir ce point, il suffit de prouver que la transformée de Fourier de δ , à savoir la fonction 1, est une somme finie de produits de polynômes de degré $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ par des fonctions de

L^2 . Or on peut écrire :

$$1 = \frac{1 + \sum_{i=1}^n |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}}{1 + \sum_{i=1}^n |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n y_i^{[\frac{n}{2}]+1} \left(\frac{|y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}}{y_i} \right) \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}}.$$

Or la fonction $\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} \in L^2$ et $\left(\frac{|y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}}{y_i} \right)^{[\frac{n}{2}]+1}$

est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et de module $= 1$.

2°) L'ordre de $D\delta$ n'est pas $\leq [\frac{n}{2}] + k$

Car supposons qu'il le soit. Il existe alors une expression de $D\delta$ de la forme :

$$D\delta = \sum_{\nu} D_{\nu} f_{\nu}$$

où la somme est finie, où les $f_{\nu} \in L^2$ et où les D_{ν} sont d'ordre $\leq [\frac{n}{2}] + k$. Par transformation de Fourier, on a :

$$P(y) = \sum_{\nu} Q_{\nu}(y) g_{\nu}(y)$$

où $P(y)$ est un polynôme de degré k , et les $Q_{\nu}(y)$ sont des polynômes de degré $\leq [\frac{n}{2}] + k$.

Introduisons alors la définition suivante : un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ sera dit étroit si $\int_{\underbrace{\dots}_{n}} \int_E \frac{dx}{r^n}$ est finie. Soit alors $u(x)$ une fonction

intégrable sur $\mathbb{R}^n$; quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $|u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{r^n}$ sauf au plus sur un ensemble étroit (dépendant de ε , bien entendu). C'est évident, car si $|u(x)|$ était $> \frac{\varepsilon}{r^n}$ sur un ensemble non étroit F , on aurait

$$\int_F |u(x)| dx > \int_F \frac{\varepsilon}{r^n} dx = +\infty \text{ et } u \notin L^1(\mathbb{R}^n).$$

Alors, puisque les g_{ν} sont de carré sommable, on a

$$|g_{\nu}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{r^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{r^{[\frac{n}{2}]}} \text{ sauf au plus sur un ensemble étroit } E_{\varepsilon} \text{ (choisi}$$

pour tous les indices ν simultanément). D'autre part, il existe une

constante A_ν telle qu'en dehors d'un voisinage compact K de l'origine, on ait $|Q_\nu(y)| \leq A_\nu r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k}$, d'où l'on déduit :

$$|P(y)| \leq \sum_\nu |Q_\nu(y)| |g_\nu(y)| \leq \varepsilon A r^k, \quad A = \sum_\nu A_\nu$$

est sur $E_\varepsilon \cap K$. Comme un tel ensemble E_ε existe quel que soit $\varepsilon > 0$, on voit que l'on parvient à une absurdité. En effet, $P(y)$ étant un polynôme de degré k , il existe un cône d'angle au sommet non nul, tel que $|P(y)|$ soit $\geq Br^k$ dans ce cône, B fixe.

Un tel cône n'est certainement pas étroit.

C.Q.F.D.

Nous allons démontrer une propriété des ouverts Ω dont le complémentaire est 1-polaire.

Proposition 4 : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, dont le complémentaire $\int \Omega$ est 1-polaire. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ ($m \geq 1$)

le prolongement $\tilde{f}$ est dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ et l'on a : $D^p(\tilde{f}) = (D^p f)^\sim$ si $|p| \leq m$. (Le prolongement $\tilde{f}$ s'obtient en prolongeant f par 0 dans $\int \Omega$).

Il suffit de faire la démonstration pour $|p| \leq 1$, c'est-à-dire pour les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. On a évidemment $\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f} = (\frac{\partial f}{\partial x_i})^\sim$ dans Ω , donc $S = \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f} - (\frac{\partial f}{\partial x_i})^\sim$ a son support dans $\int \Omega$; mais, si $m \geq 1$, $S \in \mathcal{D}_{L^2}'^1(\mathbb{R}^n)$ et puisque $\int \Omega$ est 1-polaire, il s'ensuit que $S = 0$.

Nous allons maintenant établir le théorème principal de cette partie :

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, si $m \geq 1$, il faut et il suffit que $\int \Omega$ soit m-polaire.

Il est clair que l'énoncé de ce théorème n'est plus valable pour $m = 0$. Car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ quel que soit Ω .

Remarquons que tout ensemble 1-polaire est vide sur la droite.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme : Si $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ ($m \geq 1$), $\int \Omega$ est de mesure nulle.

Supposons que $\int \Omega$ ne soit pas de mesure nulle ; il existe un ouvert U relativement compact tel que $U \cap \int \Omega$ ne soit pas de mesure nulle et

tel que $U \cap \Omega \neq \emptyset$ (ce qui est possible puisque $\Omega \neq \emptyset$). Notons 1_Ω la fonction définie et partout égale à 1 sur Ω et soit $\alpha(x) \in \mathcal{O}$, égale à 1 sur $U \cap \Omega$. Notons α_Ω la restriction de α à Ω ; évidemment, $\alpha_\Omega 1_\Omega \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, donc $\alpha_\Omega 1_\Omega \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$. Mais alors il est possible de prolonger par zéro $\alpha_\Omega 1_\Omega$ à $\mathbb{R}^n$ entier. Notons $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée; $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\Omega 1_\Omega \right)^\sim.$$

Or $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\Omega 1_\Omega \right)^\sim$ est nulle sur U , donc aussi $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$. Il s'ensuit que $\tilde{f}$ est constante presque partout sur U ; mais comme $\tilde{f}$ prolonge $\alpha_\Omega 1_\Omega$, donc vaut 1 sur $U \cap \Omega$ et 0 sur $U \cap \bigcup \Omega$, cela signifie bien que $U \cap \bigcup \Omega$ est de mesure nulle, contrairement à ce qu'on a prétendu au départ.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.

1°) Si $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, $\bigcup \Omega$ est m-polaire.

Le prolongement $g \rightarrow \tilde{g}$ de $g \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ par zéro sur $\bigcup \Omega$ constitue un monomorphisme de $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$; notons $\tilde{I}$ ce monomorphisme. Il existe en outre une projection canonique π de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$: c'est la restriction à Ω d'une fonction $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$. On a donc le schéma suivant :

$$\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) \xrightarrow{\tilde{I}} \mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega).$$

Puisque $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, on a $\pi \circ \tilde{I} = I$; on voit que π est un homomorphisme de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$. Cet homomorphisme est biunivoque (donc est un isomorphisme). En effet, deux prolongements f_1 et f_2 à $\mathbb{R}^n$ de $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ ne diffèrent que sur $\bigcup \Omega$. Puisque $\bigcup \Omega$ est négligeable (lemme), cela veut dire que $f_1 = f_2$ au sens de L^2 .

Il en résulte que $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$, autrement dit, que $\mathcal{O}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$. Le résultat annoncé découle alors de la proposition 2.

2°) Si $\bigcup \Omega$ est m-polaire, alors $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$.

Puisque $m \geq 1$, la proposition 1 s'applique. Elle peut s'énoncer de la façon suivante : π est une projection de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$.

En appliquant encore la proposition 2, on voit que, par hypothèse, $\mathcal{D}(\Omega)$ s'envoie (par le prolongement $\tilde{I}$) sur un sous-espace dense de R^n . Du schéma précédent :

$$\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega) \xrightarrow{\tilde{I}} \mathcal{D}_L^m(R^n) = \mathcal{E}_{L^2}^m(R^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega),$$

on déduit que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, i.e. que

$$\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} = \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega).$$

C.Q.F.D.

On peut définir des ensembles m -polaires sur une variété V indéfiniment différentiable. Remarquons que, tout comme pour R^n (proposition 1), cette définition peut n'être que locale : soit donc E un ensemble contenu entièrement dans le domaine ouvert U d'un système de coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$. Soit u l'homéomorphisme canonique $v \longrightarrow (x^1(v), \dots, x^n(v))$ de U dans R^n ; $u(U)$ est un ouvert de R^n . Nous dirons que E est m -polaire dans V^n si $u(E)$ est m -polaire dans R^n . Plus généralement, un ensemble E sera dit m -polaire dans V^n si son intersection avec tout domaine d'un système de coordonnées locales est m -polaire. On vérifie sans peine que cette définition est (au voisinage de chaque point de V^n) indépendante du système de coordonnées locales choisi.

Théorème 2 : Soient V^n une variété indéfiniment différentiable, W^p une sous-variété de V^n . Pour que W^p soit m -polaire dans V^n , il faut et il suffit que l'on ait : $p \leq n - 2m$.

Le fait d'être m -polaire étant un caractère purement local, on peut se borner à considérer une carte locale de V^n et à la plonger dans R^n . Il revient au même de remplacer carrément V^n par R^n ; de même, on peut remplacer W^p par R^p et identifier R^p à un sous-espace coordonnées de R^n . C'est-à-dire que l'on pose :

$$R^n = X^p \times Y^{n-p}.$$

Il s'agit de prouver que " $p \leq n - 2m$ " équivaut à " X^p est m -polaire dans R^n ". Notons x un point variable de X^p , y un point variable de Y^{n-p} .

1°) Supposons $m \geq [\frac{n-p}{2}] + 1$

Nous allons voir qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'_{L^2}^m(R^n)$ dont le support est contenu dans X^p . Il suffit de prendre :

$$T = \alpha(x) \otimes \delta(y)$$

où $\alpha \in \mathcal{D}_x$ et où $\delta(y)$ est la mesure de Dirac dans Y^{n-p} . D'après la prop. 3, $\delta(y)$ est d'ordre $[\frac{n-p}{2}] + 1$, donc d'ordre $\leq m$; donc somme de dérivées (en y) d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(Y)$; alors T est somme de dérivées (en y) d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ donc d'ordre $\leq m$. Donc X^p n'est pas $([\frac{n-p}{2}] + 1)$ -polaire.

2°) X^p est $[\frac{n-p}{2}]$ -polaire.

Il nous faut montrer que toute distribution d'ordre $\leq [\frac{n-p}{2}]$ (sur $\mathbb{R}^n$), portée par X^p , est nulle.

Or toute distribution T portée par X^p peut s'écrire :

$$T = \sum_h T_h(x) \otimes D^h \delta(y) .$$

Dire que T est d'ordre $\leq [\frac{n-p}{2}]$, c'est dire que T est une forme linéaire continue sur

$\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(\mathbb{R}^n)$, ou encore sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(\mathbb{R}^n)$. Prenons une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de la forme $\varphi(x) \psi_\nu(y)$, où $\varphi \in \mathcal{D}_x$ est fixe et où les ψ_ν convergent vers 0 au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(Y^{n-p})$, ce qui fait converger vers 0 les $\varphi(x) \psi_\nu(y)$, au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\langle T, \varphi \psi_\nu \rangle = \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle \langle D^h \delta, \psi_\nu \rangle = \langle \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h \delta, \psi_\nu \rangle$$

et l'on doit avoir $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \psi_\nu \rangle = 0$.

$\sum_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h \delta$ est une combinaison linéaire finie de dérivées de δ , dont l'ordre effectif⁽¹⁾ (si cette distribution n'est pas nulle) est certainement au moins égal à $[\frac{n-p}{2}] + 1$. Mais alors on peut trouver une suite $\{\psi_\nu\}$, convergeant vers 0 au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\langle \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h \delta, \psi_\nu \rangle$ ne converge pas vers 0. Il faut donc que la distribution $\sum_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h \delta$ soit nulle, autrement dit que tous les $\langle T_h, \varphi \rangle$ soient nuls, et comme φ est arbitraire dans $\mathcal{D}_x$, cela implique que tous les T_h soient nuls, donc que $T = 0$.

C.Q.F.D.

(1) toujours par rapport à L^2