

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## Les opérateurs invariants par rotation, l'opérateur $\Delta$

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A10_0)

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-

Exposé n° 7LES OPÉRATEURS INVARIANTS PAR ROTATION, L'OPÉRATEUR  $\Delta$ .

(Exposé du 7.1.1955)

-:-:-

NOTATIONS :  $S_n$  désignera dans la suite la surface de la sphère de rayon 1 dans l'espace  $R^n$ , qu'on suppose rapporté à un système de coordonnées cartésiennes données une fois pour toutes : on note

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |x|^2 = \sum x_i^2 = r^2, \quad \Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\varphi^H(x)$  désigne la moyenne d'une fonction  $\varphi$  sur la sphère de rayon  $r = |x|$ , dont l'élément de surface est noté  $dS$  :

$$\varphi^H(x) = \frac{1}{r^{n-1} \cdot S_n} \int_{|\xi|=|x|=r} \dots \int \varphi(\xi) \cdot dS$$

Sur cette formule il est clair que  $\varphi^H(x)$  peut s'exprimer en fonction de  $r$ . On montrera tout à l'heure que  $\Delta(\varphi^H) = (\Delta\varphi)^H$

$\rho$  désigne une rotation de centre l'origine, et  $O(n)$  désigne le groupe de Lie compact de toutes ces rotations,  $d\rho$  désigne la mesure de Haar invariante de  $O(n)$ , normalisée, c'est-à-dire telle que  $\int_{\rho \in O(n)} d\rho = 1$ .

$\rho.f$  désigne la fonction  $x \rightarrow f(\rho^{-1}.x)$

UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE L'OPÉRATEUR  $\Delta$ .

Nous allons montrer que, pour  $n \neq 2$ ,  $\frac{-1}{(n-2) S_n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$  est une solution élémentaire de  $\Delta$ , la seule d'ailleurs (à une constante près) qui soit "invariante" par rotation (cette notion est précisée plus loin). Pour calculer  $\Delta(\frac{1}{r^{n-2}})$  au sens des distributions on revient à la définition. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ , alors :

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\frac{1}{r^{n-2}}), \varphi \rangle &= \langle \frac{1}{r^{n-2}}, \Delta \varphi \rangle = \int_{R^n} \dots \int \frac{1}{r^{n-2}} \cdot \Delta \varphi \cdot dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^{n-2}} \cdot \int_{|x|=r} \Delta \varphi \cdot dS = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^{n-2}} \cdot (\Delta \varphi)^H \cdot (r^{n-1} \cdot S_n) \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \langle \Delta(\frac{1}{r^{n-2}}), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} r \cdot \Delta(\varphi^h) \cdot dr$$

$\varphi^h$  est une fonction de  $r$ . Posons  $r^2 = t$ ,  $\varphi^h$  devient une fonction de  $t$ . Or soit  $\psi$  une fonction de  $r$  en posant  $t = r^2$  et  $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ ,  $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dt^2}$ , il vient  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = 2 \cdot \psi' + 4 \cdot x_i^2 \psi''$  d'où  $\Delta \psi = 2 \cdot n \cdot \psi' + 4 \cdot r^2 \cdot \psi''$  et

en portant cette expression dans l'intégrale à calculer avec le changement de variable  $t = r^2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\frac{1}{r^{n-2}}), \varphi \rangle &= \frac{S_n}{2} \int_0^{+\infty} (2n \varphi^h + 4t \varphi^{h''}) dt \\ &= \frac{S_n}{2} \int_0^{+\infty} [(4t \varphi^h)' + (2n-4) \varphi^h] dt \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \langle \Delta(\frac{1}{r^{n-2}}), \varphi \rangle = - (n-2) S_n \varphi(0) \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\Delta(\frac{1}{r^{n-2}}) = - (n-2) S_n \delta \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour  $n = 2$  un calcul analogue montrerait que  $-\frac{1}{2\pi} \log(\frac{1}{r})$  est la solution élémentaire de  $\Delta$ , d'où le

THÉOREME 1.-  $\Delta$  est un opérateur analytique elliptique.

#### FONCTIONS ET DISTRIBUTIONS INVARIANTES P.L.R. ROTATION.

Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $R^n$ .  $f$  est dite invariante par rotation si  $\rho.f = f$  pour tout  $\rho \in O(n)$ ,  $f^h(x)$  pouvant s'exprimer en fonction de  $r(x)$ , qui est invariant par rotation, est invariante par rotation.

On peut définir une nouvelle moyenne de  $f$ , invariante par rotation, à savoir :

$$f_h(x) = \int_{\rho \in O(n)} f(\rho^{-1}.x) \cdot d\rho$$
 L'invariance à gauche de la mesure de Haar entraîne que  $\sigma \cdot f_h = f_h$ , et son invariance à droite entraîne que  $(\sigma.f)_h = f_h$ , pour tout  $\sigma \in O(n)$ ; la première identité exprime l'invariance par rotation,  $f_h$  étant invariante par rotation est constante sur la sphère de rayon  $r$ . On a donc  $(f_h)^h = (f_h)$ .  $f^h$  étant invariante par rotation, on a :  $(f^h)_h = f^h$ .

$$(f^h)_h(x) = \int_{\rho \in O(n)} d\rho \cdot \int_{|\xi|=|x|=r} f(\rho^{-1}\xi) \frac{dS}{S_n \cdot r^{n-1}}$$

On peut permuter les intégrales car tous les champs d'intégration sont compacts et les fonctions continues. Donc :

$$(f^h)_h(x) = \int_{|\xi|=|x|=r} \dots \int \frac{dS}{S_n \cdot r^{n-1}} \cdot \int_{\rho \in O(n)} f(\rho^{-1} \xi) d\rho = (f_h)_h$$
 donc  $f^h = f_h$  ; la deuxième notation est superflue.

$$\frac{1}{S_n \cdot |x|^{n-1}} \cdot \int_{|\xi|=|x|} f(\xi) d\xi = \int_{\rho \in O(n)} f(\rho^{-1} x) d\rho$$

On a remarqué que si  $f$  est invariante par rotation alors  $f = f^h$ . Si  $f$  est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, la fonction  $f(\rho^{-1} x)$  définie sur  $O(n) \times \mathbb{R}^n$  est indéfiniment dérivable en  $\rho$  et  $x$  et lorsque  $\rho$  décrit  $O(n)$ , les supports des fonctions (en  $x$ )  $f(\rho^{-1} x)$  restent dans une boule fixe. Les propriétés classiques de l'intégrale de Riemann assurent alors que  $f^h(x)$  est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, donc appartient à  $\mathcal{D}$ , et que l'application  $f \rightarrow f^h$  est continue de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{D}$ . Soit  $\mathcal{D}^h$  le sous-espace formé des fonctions de  $\mathcal{D}$  invariantes par rotation. Les propriétés énumérées ci-dessus signifient que l'application  $h : f \rightarrow f^h$  est un projecteur de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$  sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}^h$ .

$\mathcal{D}$  admet donc une décomposition topologique  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^h + h^{-1}(0)$ ,  $h^{-1}(0)$  étant l'espace des fonctions de  $\mathcal{D}$  dont la moyenne sphérique est nulle. Nous allons étendre ces résultats à l'espace des distributions.

#### Effet d'une rotation sur une distribution.

On désigne par  $\rho.T$  la distribution définie par  $\langle \rho.T, \varphi \rangle = \langle T, \rho^{-1} \cdot \varphi \rangle$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ . La distribution  $\rho.T$  est dite la distribution obtenue à partir de  $T$  par la rotation  $\rho$ .

DÉFINITION 1.- On dit que la distribution  $T$  est invariante par rotation autour de l'origine si  $\rho.T = T$  pour tout  $\rho \in O(n)$ .

EXEMPLES :  $\delta$  est une distribution invariante par rotation, de même  $\frac{1}{r^{n-2}}$ . Soit  $T$  quelconque, ( $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}^n}$ ).

On peut définir une moyenne invariante de  $T$ , à savoir  $\int (\rho.T) d\rho = T^h$ ; cette expression a un sens car la fonction  $\rho \rightarrow \rho.T$  à valeur dans  $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^n}$  est continue sur  $O(n)$  qui est compact, et  $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^n}$  est complet, ce qui rend possible l'intégration. On peut encore définir  $T^h$  par l'égalité suivante équivalente :

$$\langle T^h, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^h \rangle \text{ où } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$$

On a :

$$\langle \sigma.T^h, \varphi \rangle = \langle T^h, \sigma^{-1} \cdot \varphi \rangle = \langle T, (\sigma^{-1} \cdot \varphi)^h \rangle = \langle T, \varphi^h \rangle$$

donc l'invariance à droite de la mesure de Haar entraîne que  $T^h$  est invariante par rotation. On a :

$$\langle (\rho.T)^H, \varphi \rangle = \langle \rho.T, \varphi^H \rangle = \langle T, \rho^{-1} \cdot \varphi^H \rangle = \langle T, \varphi^H \rangle$$

l'invariance à gauche de la mesure de Haar entraîne que :  $(\rho.T)^H = T^H$  pour tout  $\rho \in O(n)$ . Si  $T$  est invariante par rotation, on a  $T = T^H$ , donc  $(T^H)^H = T^H$ .

L'application  $H$ , qui est linéaire et continue de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  dans  $\mathcal{D}'_{R^n}$ , est donc un projecteur de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  sur le sous-espace  $\mathcal{D}'_{R^n}$  des distributions invariantes par rotation. On a donc une décomposition

$\mathcal{D}'_{R^n} = \mathcal{D}'_{R^n}{}^H + H^{-1}(0)$  où  $H^{-1}(0)$  est l'espace des distributions dont la moyenne par rotation est nulle.

L'orthogonal de  $\mathcal{D}'_{R^n}{}^H$  dans  $\mathcal{D}'_{R^n}$  est formé des  $\varphi$ , telles que  $0 = \langle T^H, \varphi \rangle$  pour toute  $T \in \mathcal{D}'_{R^n}$  ou  $0 = \langle T, \varphi^H \rangle$  pour toute  $T$ , donc  $\varphi^H = 0$ . C'est donc  $H^{-1}(0)$  ( $0 \in \mathcal{D}'_{R^n}$ ). De même l'orthogonal de  $\mathcal{D}'_{R^n}{}^H$  dans  $\mathcal{D}'_{R^n}$  est  $H^{-1}(0)$  ( $0 \in \mathcal{D}'_{R^n}$ ). On peut donc énoncer la

PROPOSITION 1.- 1)  $\mathcal{D}'_{R^n}$  admet une décomposition en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés,  $\mathcal{D}'_{R^n}{}^H$  espace des éléments de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  invariants par rotation, et  $H^{-1}(0)$  espace des éléments de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  de moyenne sphérique nulle.  $f \rightarrow f^H$  est un projecteur continu de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  sur  $\mathcal{D}'_{R^n}{}^H$ .

2)  $\mathcal{D}'_{R^n}$  admet une décomposition duale de la précédente.  $(\mathcal{D}'_{R^n}{}^H)'$ , dual de  $\mathcal{D}'_{R^n}{}^H$  est l'espace  $\mathcal{D}'_{R^n}$  des distributions invariantes par rotation, et l'application  $T \rightarrow T^H$  transposée de l'application  $(f \rightarrow f^H)$  est un projecteur de  $\mathcal{D}'_{R^n}$  sur  $\mathcal{D}'_{R^n}$ .

Nous allons montrer qu'on peut identifier l'espace des distributions invariantes par rotation dans  $R^n$  et celui des distributions sur la demi-droite positive  $R_+ : \{t \mid t \geq 0\}$ . Pour cela il nous suffira de montrer que la correspondance  $f(t) \rightarrow f(\hat{r}^2)$  établit un isomorphisme topologique entre  $\mathcal{D}'_{R^n}$  et  $\mathcal{D}'_{R_+}$ .

L'application  $f(t) \rightarrow f(\hat{r}^2)$  applique manifestement d'une façon biunivoque, linéaire et continue  $\mathcal{D}'_{R_+}$  dans  $\mathcal{D}'_{R^n}$ . Montrons qu'elle est épijective.

Soit  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}'_{R^n}$ ,  $\varphi$  étant invariante par rotation et indéfiniment dérivable. C'est une fonction de la forme  $\Psi(\sum_1^n x_i^2)$  ou  $\Psi$  est en tout cas continue.

D'autre part  $\Psi(t) = \varphi(\sqrt{t}, 0, \dots, 0)$ , et  $\varphi(\hat{u}, 0, \dots, 0)$  est indéfiniment dérivable et paire. Pour voir que  $\Psi$  est indéfiniment dérivable, on appliquera le

LEMME : Soit  $\Theta(\hat{x})$  une fonction indéfiniment dérivable et paire sur la droite, alors la fonction  $t \rightarrow \Theta(\sqrt{t})$  définie sur  $R_+$  y est indéfiniment dérivable.

Démonstration : Supposons que nous ayons démontré le lemme d'ordre  $m$  : si  $\Theta$  vérifie les conditions ci-dessus, alors  $\Theta(\sqrt{t})$  est  $m$  fois continuellement différentiable. Nous en déduisons alors, comme suit, le lemme d'ordre  $m+1$ . Soit  $\Theta$  vérifiant les hypothèses du lemme. En dehors de l'origine  $\frac{d}{dt} [\Theta(\sqrt{t})] = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Theta'(\sqrt{t})$  ou  $\Theta'$  désigne la fonction  $\frac{d}{dx} (\Theta(x))$ , indéfiniment dérivable et impaire.  $\Theta'(0) = 0$ . Donc la fonction  $\frac{\Theta'(x)}{x}$  est indéfiniment dérivable sur l'axe réel (Distributions, tome 1, page 121), et paire. Elle vérifie donc les hypothèses du lemme d'ordre  $m$ , donc  $\frac{\Theta'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$  est  $m$  fois continuellement différentiable sur  $R_+$  donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (\Theta(\sqrt{t})) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} \Theta'(\sqrt{t}) \right)$$

existe et il est classique que c'est alors la dérivée de  $\frac{d^m}{dt^m} (\Theta(\sqrt{t}))$  à l'origine. Ce qui démontre le lemme d'ordre  $m+1$ . Or le lemme d'ordre zéro est vrai car il signifie que  $\Theta(\sqrt{t})$  est continue sur  $R_+$ . Donc la récurrence peut démarrer et le lemme est complètement démontré.

L'application  $f(t) \rightarrow f(r^2)$  est donc bien épijective. Mais la récurrence précédente montre en même temps que si des  $f_j(r^2)$  tendent vers zéro dans  $\mathcal{O}_{R^n}^H$  alors il en est de même des  $f_j(t)$  dans  $\mathcal{O}_{R_+}$ . On a donc bien défini ainsi un isomorphisme topologique entre ces deux espaces. Il induit par dualité un isomorphisme topologique entre  $\mathcal{O}_{R^n}^{!H}$  et  $\mathcal{O}_{R_+}^!$  d'où la

PROPOSITION 2.- 1) L'application  $f(t) \rightarrow f(r^2)$  établit un isomorphisme topologique entre  $\mathcal{O}_{R_+}$  et  $\mathcal{O}_{R^n}$ .

2) L'application transposée de l'application précédente est un isomorphisme topologique entre  $\mathcal{O}_{R^n}^{!H}$  et  $\mathcal{O}_{R_+}^!$ .

Soit  $\tilde{T}$  l'image de  $T \in \mathcal{O}_{R^n}^{!H}$  dans  $\mathcal{O}_{R_+}^!$ , définie par l'application canonique de la proposition 2.  $\tilde{T}$  vérifie l'identité  $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T_x, \varphi(r^2) \rangle$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{O}_{R_+}$ .

Calculons explicitement quelques transformées.

Mesure de Dirac. Soit  $\delta(\hat{x})$  la mesure de Dirac dans  $R^n$ ,  $\tilde{\delta}$  son image.

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta(x), \varphi(r^2) \rangle = \varphi(0)$$

donc  $\tilde{\delta} = \delta(t)$ , mesure de Dirac sur  $R_+$ .

Transformée de  $f(r^2)$  .

Soit  $f(t)$  une fonction sur  $R_+$ , telle que  $f(\hat{r}^2)$  soit localement sommable sur  $R^n$ . Calculons l'image  $T$  de  $f(\hat{r}^2)$  (considérée comme distribution sur  $R^n$ ).

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle f(r^2), \varphi(r^2) \rangle = \iint \dots \int f(r^2) \varphi(r^2) dx \\ &= S_n \int_0^{+\infty} f(r^2) \varphi(r^2) r^{n-1} dr = \frac{S_n}{2} \int_0^{+\infty} f(t) \varphi(t) t^{\frac{n-2}{2}} dt \\ &= \langle \frac{S_n}{2} t^{\frac{n-2}{2}} f(t), \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

donc l'image de  $f(\hat{r}^2)$  est, non pas  $f(t)$ , comme ce serait le cas si on considérait  $f$  comme une fonction sur  $R^n$ , mais

$$\frac{S_n}{2} t^{\frac{n-2}{2}} f(t) .$$

Il en résulte que si  $f(t)$  est maintenant une fonction localement sommable sur  $R_+$ , considérée comme distribution sur  $R_+$ , son image dans  $\mathcal{D}'_{R^n}$  est

$\frac{2}{S_n} \frac{1}{\hat{r}^{n-2}} f(\hat{r}^2)$  . En particulier :

$$1 \in \mathcal{D}'_{R^n} \rightarrow \frac{S_n}{2} t^{\frac{n-2}{2}} \in \mathcal{D}'_{R_+} \quad \text{et} \quad \frac{2}{S_n} \frac{1}{\hat{r}^{n-2}} \in \mathcal{D}'_{R^n} \rightarrow 1 \in \mathcal{D}'_{R_+} .$$


---