

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

**Suite de la démonstration (cf exposé n° 5)**

*Séminaire Schwartz*, tome 1 (1953-1954), exp. n° 6, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1953-1954\\_\\_1\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A7_0)

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Exposé n° 6

Suite de la démonstration (Cf. Exposé n° 5)

E. Si  $u$  parcourt un compact de  $\widehat{E \otimes F}$  contenu dans la semi-boule ouverte  $P_0 \otimes q_0(u) < 1$ , on peut supposer que  $\lambda$  reste sur un compact de  $\ell^1_{(\rho)}(K)$  contenu dans la semi-boule  $N_{1, \rho_0}(\lambda) < 1$ .

En effet la première semi-boule est l'image par  $\varphi$  de la deuxième. Il suffit alors d'appliquer le théorème suivant : Si  $\mathcal{E}$  est un espace métrique complet,  $R$  une relation d'équivalence ouverte sur  $\mathcal{E}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathcal{E}$ , tout compact de  $\mathcal{E}/R$  contenu dans l'image canonique de  $\Omega$  est l'image canonique d'un compact de  $\Omega$ . Prendre pour  $\mathcal{E}$  l'espace  $\ell^1_{(\rho)}(K)$ , pour  $\Omega$  l'ouvert  $N_{1, \rho_0}(\lambda) < 1$  et pour  $R$  la relation d'équivalence définie par  $\varphi$ .  $R$  est bien ouverte comme relation d'équivalence sur un E.V.T. D'autre part, d'après C., la semi-boule  $P_0 \otimes q_0(u) < 1$  est bien l'image par  $\varphi$  de la semi-boule  $N_{1, \rho_0}(\lambda) < 1$ .

F. Pour chaque compact  $H$  de  $\widehat{E \otimes F}$ , il existe deux suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  ( $x_n \in E, y_n \in F$ ) telles que pour tout  $u \in H$ , on ait

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) x_n \otimes y_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| p_{\gamma}(x_n) q_{\gamma}(y_n) < \infty$$

(pour tout  $\gamma$ )

Soit  $\lambda \in \ell^1_{(\rho)}(K)$ . Pour tout  $\gamma$ , l'ensemble des  $k$  tels que  $\lambda(k) p_{\gamma}(x_k) q_{\gamma}(y_k) \neq 0$  est dénombrable. L'ensemble des  $\gamma$  étant dénombrable, l'ensemble des  $k$  tels que  $\lambda(k) p_{\gamma}(x_k) q_{\gamma}(y_k) \neq 0$  pour au moins un  $\gamma$ , est dénombrable; or il contient l'ensemble  $N_{\lambda}$  des  $k$  tels que  $\lambda(k) \neq 0$ , car pour tout  $k$  il existe  $\gamma$  tel que  $p_{\gamma}(x_k) q_{\gamma}(y_k) \neq 0$ .

Si  $\lambda$  parcourt un ensemble dénombrable  $\Lambda$ ,  $\lambda(k)$  reste nul sauf sur un ensemble dénombrable fixe  $N_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_{\lambda}$ , et ceci reste vrai si  $\lambda$  décrit  $L$  puisque  $L$ , compact métrisable, admet un sous-ensemble dénombrable dense  $\Lambda$ . Il suffit alors d'identifier à  $N$ , ensemble des entiers  $\geq 0$ , l'ensemble  $N_0$  des  $k$  en dehors duquel  $\lambda(k)$  reste nul pour  $\lambda \in L$  (ou  $u \in H$ ).

Les mesures  $\rho$  s'identifient à des mesures sur  $N$ , et l'on a

G. Quand  $u$  varie dans  $H$ ,  $\lambda$  varie dans un compact  $L$  de  $\ell^1_{(\rho)}(N)$ . Si  $H$  est contenu dans la semi-boule  $(P_0 \otimes q_0)(u) < 1$ ,  $L$  est contenu dans

la semi-boule  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| p_0(x_n) q_0(y_n) < 1$  .

H. Lemme du type Du Bois Reymond : Il existe deux suites  $\mu(n)$ ,  $\nu(n)$  de nombres  $> 0$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\gamma}(x_n)}{\mu(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{\gamma}(y_n)}{\nu(n)} = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \\ \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) < \infty \end{array} \right.$$

et que de plus pour  $\lambda \in L$ ,  $\lambda$  reste dans un compact  $L'$  de l'espace  $\ell^1(N)$  relatif à la mesure unique  $\rho$  dont la masse au point  $n \in N$  est  $\rho(n) = \mu(n) \nu(n)$  .

On supposera désormais que  $\gamma$  parcourt  $N$ , et que  $p_{\gamma}$  et  $q_{\gamma}$  sont des suites croissantes de semi-normes.  $L$  étant compact, on peut (propriété des compacts d'un espace  $\ell^1$ ) déterminer une suite d'entiers croissants :  $n_0 = 0$ ,  $n_1, \dots, n_{\gamma}, \dots$  telle que pour tous les  $\lambda \in L$ , on ait

$$\sum_{n \geq n_{\gamma}} |\lambda(n)| p_{\gamma}(x_n) q_{\gamma}(y_n) \leq \frac{1}{8^{\gamma}} .$$

Déterminons  $\mu(n)$  et  $\nu(n)$  par la suite des conditions :

$$\text{Pour } n_{\gamma} \leq n < n_{\gamma+1}, \text{ on a } \begin{cases} \mu(n) = \sup [p_{\gamma}(x_n) 2^{\gamma}, \varepsilon_n] \\ \nu(n) = \sup [q_{\gamma}(y_n) 2^{\gamma}, \varepsilon_n] \end{cases}$$

$\varepsilon_n$  étant à déterminer . Alors :

a) Pour  $\delta \geq \gamma$  et  $n_{\delta} \leq n < n_{\delta+1}$ , on a

$$\frac{p_{\gamma}(x_n)}{\mu(n)} \leq \frac{p_{\delta}(x_n)}{p_{\delta}(x_n) 2^{\delta}} \leq \frac{1}{2^{\delta}}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\gamma}(x_n)}{\mu(n)} = 0$  et de même  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{\gamma}(y_n)}{\nu(n)} = 0$  .

$$\begin{aligned} \text{b) On a } & \sum_{n_{\gamma} \leq n < n_{\gamma+1}} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \\ & \leq \sum_{n \geq n_{\gamma}} |\lambda(n)| 4^{\gamma} p_{\gamma}(x_n) q_{\gamma}(y_n) + \sum_{n \geq n_{\gamma}} |\lambda(n)| 2^{\gamma} p_{\gamma}(x_n) \varepsilon_n \\ & + \sum_{n \geq n_{\gamma}} |\lambda(n)| 2^{\gamma} q_{\gamma}(y_n) \varepsilon_n + \sum_{n \geq n_{\gamma}} |\lambda(n)| \varepsilon_n^2 \end{aligned}$$

Le premier terme est  $\leq \frac{1}{2^{\gamma}}$  . Comme, pour tout  $n$ ,  $|\lambda(n)|$  reste borné pour  $\lambda \in L$ , on peut choisir la suite  $\varepsilon_n > 0$  telle que la somme des 3 autres termes soit  $\leq \frac{1}{2^{\gamma}}$  . On a alors :

$$\sum_{n_\gamma \leq n < n_{\gamma+1}} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \leq \frac{1}{2^{\gamma-1}}$$

$$\text{et } \sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \leq \frac{1}{2^{\gamma-2}}$$

Comme  $n_0 = 0$ ,  $\lambda$  reste dans un compact de  $\ell_p^1(N)$ .

c) Grâce à l'introduction des  $\varepsilon_n$ , on a  $\mu(n) \neq 0$ ,  $\nu(n) \neq 0$ .

I. Il existe deux suites  $\{x'_n\}$ ,  $\{y'_n\}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = 0$  et que, pour tout  $u \in H$ , on ait  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda'(n) x'_n \otimes y'_n$ .

Il suffit de poser  $x'_n = \frac{x_n}{\mu(n)}$ ,  $y'_n = \frac{y_n}{\nu(n)}$ ,  $\lambda'_n = \lambda(n) \mu(n) \nu(n)$ .

On a pour tout  $\gamma$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_\gamma(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_\gamma(x_n)}{\mu(n)} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ , et  
 de même  $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = 0$ .

D'autre part  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| \mu(n) \nu(n) \leq 4 < \infty$  et de plus

$\sum_{n \geq n_\gamma} |\lambda'(n)| \leq \frac{1}{2^{\gamma-2}}$ , donc  $\lambda'$  reste dans un compact  $L'$  de  $\ell_1$ .

J. Fin de la construction.

Pour  $\lambda' \in L'$ , on a  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| p_0(x'_n) q_0(y'_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)| p_0(x_n) q_0(y_n) < 1$ ,

donc  $\leq 1 - \alpha < 1$ . Déterminons  $N$  tel que

$$\left. \begin{array}{l} p_0(x'_n) \leq 1 \\ q_0(y'_n) \leq 1 \end{array} \right\} \text{ pour } n > N, \quad \sum_{n \geq N} |\lambda'(n)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \lambda' \in L'.$$

Posons  $x''_n = x'_n$ ,  $y''_n = y'_n$ ,  $\lambda''(n) = \lambda'(n)$  pour  $n > N$ , et pour  $n \leq N$

$$\left\{ \begin{array}{l} x''_n = \frac{x'_n}{p_0(x'_n)} \quad y''_n = \frac{y'_n}{q_0(y'_n)} \quad \lambda''_n = \lambda'_n p_0(x'_n) q_0(y'_n) \\ \text{si } p_0(x'_n) q_0(y'_n) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x''_n = \frac{x'_n}{p_0(x'_n)} \quad y''_n = \frac{y'_n}{\varepsilon} p_0(x'_n) \quad \lambda''(n) = \varepsilon \lambda'(n) \\ \text{si } p_0(x'_n) \neq 0 \text{ et } q_0(y'_n) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x''_n = \frac{x'_n}{\varepsilon} q_0(x'_n) & y''_n = \frac{y'_n}{q_0(y'_n)} & \lambda''(n) = \varepsilon \lambda'(n) \\ \text{si } p_0(x'_n) = 0 \text{ et } q_0(y'_n) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_n = x'_n & y''_n = \frac{y'_n}{\varepsilon} & \lambda''_n = \varepsilon \lambda'_n \\ \text{si } p_0(x'_n) = q_0(y'_n) = 0 \end{cases}$$

a) On a encore  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda''(n) x''_n \otimes y''_n$ , les suites  $\{x''_n\}$  et  $\{y''_n\}$  étant fixes et telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y''_n = 0$ ,  $p_0(x''_n) < 1$ ,  $q_0(y''_n) < 1$ .

b) Pour tout  $n \leq N$ ,  $|\lambda''(n)|$  est uniformément borné quand  $u$  parcourt  $H$ . De plus pour  $n \geq N$ ,  $\sum_{n \geq N} |\lambda''(n)| < \frac{1}{2^{N-2}}$  donc  $\lambda$  reste dans un compact  $L''$  de  $\ell_1$ .

$$\begin{aligned} \text{c) On a } \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda''(n)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| p_0(x'_n) q_0(y'_n) \\ &+ \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda'(n)| + \sum_{n \geq N} |\lambda'(n)| \\ &\leq (1 - \alpha) + 4\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Si on a choisi  $\varepsilon$  tel que  $1 - \alpha + 5\varepsilon < 1$ , on a bien  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda''(n)| < 1$

### Corollaires.

A. - Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Tout élément  $u$  de la boule unité ouverte de  $E \hat{\otimes} F$  admet une décomposition de la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n \quad \text{avec} \quad \|x_n\| < 1, \quad \|y_n\| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < 1.$$

B. - Si  $E$  est un Fréchet,  $H$  un compact de  $E$ , il existe une suite  $x_n \rightarrow 0$  telle que tout  $u \in H$  admette une décomposition de la forme  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|$  étant uniformément borné.

C. - Si  $E$  est un Fréchet, tout compact  $H$  de  $E$  est contenu dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une suite tendant vers zéro.

D. - Si  $E$  et  $F$  sont deux Fréchet, tout compact de  $E \hat{\otimes} F$  est contenu

de la semi-norme  $N_{1;\mu_\gamma}$  sur  $E$  (resp.  $N_{1;\nu_\gamma}$  sur  $F$ ). Par suite  $p_\gamma \otimes q_\gamma$  est la semi-norme sur  $E \hat{\otimes} F$  quotient de la semi-norme  $N_{1;\mu_\gamma} \otimes N_{1;\nu_\gamma} = N_{1;p_\gamma}$ . On peut encore exprimer  $D.$  de la façon suivante :

Pour  $u \in E \hat{\otimes} F$ , tout couple  $(p_0, q_0)$  de semi-normes sur  $E$  et  $F$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\lambda \in l^1_{(p)}(K)$  tel que  $u = \sum_n \lambda(k) x_k \otimes y_k$  avec :

$$\sum_k |\lambda(k)| p_0(x_k) q_0(y_k) \leq (p_0 \otimes q_0)(u) + \varepsilon$$

(Suite et fin de la démonstration dans l'exposé n° 6)

---