

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Généralités sur les problèmes d'approximation et de biunivocité

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 14, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A15_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 14

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBLÈMES D'APPROXIMATION ET DE BIUNIVOCITÉ.

1.- Un théorème préliminaire.

Soient E, F deux espaces de Banach. Les espaces $E \hat{\otimes} F' (= E \hat{\otimes}_{F''} F')$ et $\mathcal{L}(E; F)$ sont en dualité (ceci est général) ; en effet

$$(E \hat{\otimes} F')' = B(E, F') = \mathcal{L}(E; F'') \supset \mathcal{L}(E; F).$$

Soit $\mathcal{J}_1$ l'ensemble des $u \in E \hat{\otimes} F'$ tels que

$$(1) \quad \langle u, A \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{L}(E; F)$$

[Il est possible que $\mathcal{J}_1 = \{0\}$ dans tous les cas ; noter que $E \hat{\otimes} F' / \mathcal{J}_1$ n'est pas nécessairement $L^1(F; E)$]. On a le :

Théorème 1. - Le dual de $\mathcal{L}_c(E; F)$ (convergence uniforme sur les compacts convexes de E) est identique à $E \hat{\otimes} F' / \mathcal{J}_1$.

Démonstration.

a) Soit $u \in E \hat{\otimes} F'$. Il faut montrer que u définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_c(E; F)$. On va montrer plus, à savoir :

$$(2) \quad \begin{cases} u \in E \hat{\otimes} F' \text{ définit une forme linéaire continue sur } \mathcal{L}_c(E; F_c) \text{ où} \\ F_c = \text{espace } F \text{ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les} \\ \text{compacts convexes de } F' \text{ fort.} \end{cases}$$

[La topologie de F_c est moins fine que la topologie initiale de F].

Or (Cf. exposé n° 5, théorème p. 3) u provient d'un élément de $E_A \hat{\otimes} F'_B$, A (resp. B) disque compact de E (resp. F').

Soit alors $\mathcal{V}(A, B)$ le voisinage de zéro suivant dans $\mathcal{L}_c(E; F_c)$: ensemble des $v \in \mathcal{L}(E; F_c)$ tels que

$$(3) \quad v(A) \subset B^\circ.$$

On aura donc montré (2) si l'on montre :

$$(4) \quad |\langle v, u \rangle| \leq \text{constante, pour } v \in \mathcal{V}(A, B).$$

Or on a :

$$(5) \quad |\langle v, u \rangle| \leq \|u\|_{E_A} \hat{\otimes} F'_B.$$

En effet $v \in \mathcal{L}(E; F'_C)$ définit $\tilde{v} \in B(E_A, F'_B)$ (par $\tilde{v}(e, f') = \langle v(e), f' \rangle$) - et la norme de $\tilde{v}$ dans $B(E_A, F'_B)$ est ≤ 1 , d'après (3) - d'où (5) et donc (2).

b) Reste à montrer ceci :

$$(6) \quad \text{Tout élément de } (\mathcal{L}_C(E; F))' \text{ provient d'un élément de } E \hat{\otimes} F' / \mathcal{J}_1.$$

On va montrer plus, à savoir : (6) est vrai pour $E = \text{Fréchet}$, F quelconque.

On utilisera le :

Lemme. - Soit P un espace vectoriel localement convexe complet, M un espace topologique compact, f une application continue $M \rightarrow P$, $\overline{\int}(f(M)) =$ enveloppe convexe équilibrée fermée de $f(M)$ dans P . Alors $\overline{\int}(f(M)) =$ ensemble des centres de gravité $\int_M f(m) d\mu(m)$, μ mesure de Radon sur M , $\|\mu\| \leq 1$.

Ceci posé, soit donc $X \in (\mathcal{L}_C(E; F))'$; il existe donc $W =$ voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_C(E; F)$ tel que

$$(7) \quad |\langle u, X \rangle| \leq 1, \text{ pour } u \in W.$$

Or W est du type suivant : il existe K compact de E , V voisinage convexe cerclé fermé de 0 dans F tels que :

$$u \in W \iff u(K) \subset V.$$

On pose $V^0 = B \subset F'$. Alors :

$$u \in W \iff |\langle u, x \otimes y' \rangle| = |\langle u(x), y' \rangle| \leq 1 \text{ pour } x \in K, y \in B.$$

Comparant avec (7) on en déduit ceci :

$$(8) \quad X \in (K \otimes B)^{00} = \overline{\int}(K \otimes B) = \text{enveloppe } \overline{\text{convexe}} \text{ équilibrée fermée de } K \otimes B \text{ dans le dual algébrique de } \mathcal{L}_C(E; F) \text{ muni de sa topologie faible.}$$

Appliquons le lemme avec :

$$P = (\mathcal{L}(E, F))^* \text{ faible.}$$

$M = K \times B$, topologie produit de la topologie de K et de la topologie faible de B , M est compact.

La fonction f est l'application :

$$\begin{aligned} (x, y') &\longrightarrow x \otimes y' & \text{de} \\ K \times B &\longrightarrow (\mathcal{L}(E; F))^* . \end{aligned}$$

Conséquence : tout élément $Y \in \overline{\Gamma}(K \otimes B)$ est :

$$(9) \quad Y = \int_{K \times B} x \otimes y' \cdot d\mu(x, y') \quad , \quad \mu \text{ mesure sur } K \times B \quad , \quad \|\mu\| \leq 1 .$$

Mais comme $E = \text{Fréchet}$ (l'hypothèse "E Fréchet" intervient ici) il existe une suite $x_i \rightarrow 0$ telle que

(10) $K \subset \overline{\Gamma}(x_i) =$ enveloppe convexe équilibrée fermée de la suite x_i (Cf. exposé n° 6, Cor. B, p. 4) .

Soit donc : $K_0 = \text{compact } \{x_i\}_0^\infty$, $(x_0 = 0)$. On a :

$$\overline{\Gamma}(K \otimes B) \subset \overline{\Gamma}(K_0 \otimes B)$$

et donc tout $Y \in \overline{\Gamma}(K \otimes B)$ peut être représenté par une formule du type (9) avec : $\mu =$ mesure sur $K_0 \times B = \bigcup_i (\{x_i\} \times B)$, de norme ≤ 1 , donc :

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \quad , \quad \mu_i \text{ mesure sur } \{x_i\} \times B$$

donc $\mu_i = \delta_{(x_i)} \otimes \nu_i$, ν_i mesure sur B .

Donc :

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=0}^{\infty} \int x \otimes y' \cdot d\mu_i(x, y') = \sum_i \int x_i \otimes y' \cdot d\nu_i(y') \quad \text{soit :} \\ (11) \quad Y &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i \otimes y'_i \quad , \quad y'_i = \int_B y' \cdot d\nu_i(y') \in F' . \end{aligned}$$

D'après (8) , X est du type (11) - et (6) sera démontré si l'on montre que la série (11) converge dans $E \hat{\otimes} F'$ - Or il y a plus :

(12) la série (11) converge dans $E_A \hat{\otimes} F'_B$, $A = \overline{\Gamma}(K_0)$.

En effet $\|x_i\|_{E_A} \leq 1$ et $\|y'_i\|_{F'_B} \leq \|\nu_i\| = \|\mu_i\|$,

$$\sum_i \|y'_i\|_{F'_B} \leq \sum_i \|\mu_i\| = \|\mu\| \leq 1 \quad - \text{ce qui montre (12) -}$$

et le théorème.

2.- Les propriétés d'approximation.

Théorème 2.-

(I) E est un espace localement convexe séparé. Les propriétés suivantes,

portant sur E, sont équivalentes :

- (A) 1 est adhérent à $E' \otimes E$ dans $\mathcal{L}_c(E;E) = \mathcal{L}_c(E)$.
- (A₁) $\overline{E' \otimes E} = \mathcal{L}_c(E)$ (adhérence de $E' \otimes E$ dans $\mathcal{L}_c(E)$)
- (A₂) Pour tout espace F localement convexe, $\overline{E' \otimes F} = \mathcal{L}_c(E;F)$
- (A₃) Pour tout espace F, $\overline{F' \otimes E} = \mathcal{L}_c(F;E)$
- (A₄) Pour tout F localement convexe, $\overline{F \otimes E} = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;E) = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c;F)$
- (A₅) Quels que soient F localement convexe, $\mathcal{G}$ recouvrement filtrant croissant de F par des disques bornés, $u \in \mathcal{L}(F;E)$ transforment toute partie de F appartenant à $\mathcal{G}$ en une partie relativement compacte de E, alors

$$u \in (\overline{F' \otimes E})_{\mathcal{G}}, \text{ adhérence dans } \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(F;E)$$

(II) Si E est un espace de Fréchet, les propriétés précédentes sont équivalentes à :

(A₄ bis) comme A₄, avec F Banach

(A₅ bis) comme A₅, avec F Banach et $\mathcal{G} =$ boules de F

Remarque. Nous avons vu (exposé n° 8, prop. 5) que $E \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(F'_c;E)$ si E et F sont complets ; A₄ exprime que c'est cet espace lui-même.

Démonstration de (I).

$$\text{Trivialement} \quad \begin{matrix} (A_2) \\ (A_3) \end{matrix} \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$$

A₄ entraîne A₃. Appliquons en effet A₄ à l'espace F'_c . Alors $(F'_c)'_c = F_{\gamma}$ F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts convexes de F'_c . Comme les parties équicontinues de F' sont relativement compactes dans F'_c , F_{γ} est plus fine que F ; donc $\mathcal{L}(F_{\gamma};E) \supset \mathcal{L}(F;E)$. La topologie $\mathcal{E}$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de F, polaires des voisinages de 0 de F'_c . A₄ implique que $F' \otimes E$ soit dense dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(F_{\gamma};E)$ donc a fortiori dans son sous-espace $\mathcal{L}_c(F;E)$, ce qui est A₃. Il est évident que A₅ implique A₄, en l'appliquant à F'_c , $\mathcal{G}$ étant l'ensemble des parties équicontinues de F'_c ; on sait en effet que $u \in \mathcal{L}(F'_c;E)$ applique toute partie équicontinue de F' sur une partie relativement compacte de E.

Enfin on voit que A implique A₅. Soit en effet $u \in \mathcal{L}(F;E)$. Si les v_i sont des applications linéaires continues de rang fini de E dans E,

convergeant vers 1 sur tout compact de E (hyp. A), les $v_i \circ u$ sont des applications linéaires continues de rang fini de F dans E (donc $\in F' \otimes E$); si alors l'image par u de toute partie de F appartenant à $\mathcal{C}$ est relativement compacte, les $v_i \circ u$ convergent vers u dans $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(F; E)$, d'où A_5 .

(A_2) est resté en plan. Comme il implique (A), il reste à montrer que (A) implique (A_2). Or si $u \in \mathcal{L}(E; F)$, et si les v_i sont comme ci-dessus les $u \circ v_i$ sont de rang fini et convergent vers u dans $\mathcal{L}_c(E; F)$, ce qui achève la démonstration de (I).

Démonstration de (II).

Il n'est pas mauvais d'énoncer (A_4 bis) et (A_5 bis) en termes compréhensibles de tout le monde :

(A_4 bis) Toute application d'un F' (F Banach), dans E , faiblement continue compacte, est limite (pour la norme) d'applications faiblement continues de rang fini.

(A_5 bis) Toute application compacte d'un Banach F dans E est limite (pour la norme) d'applications continues de rang fini.

1°) Les A impliquent A_4 bis et A_5 bis (E quelconque).

2°) A_4 bis implique A_5 bis (E quelconque).

Soit en effet $u \in \mathcal{L}(F; E)$ compacte, F Banach. Sa transposée u'' applique F'' dans E'' ; mais elle s'obtient en prolongeant u par continuité faible, et comme l'image par u de la boule unité A de F est relativement compacte dans E, l'image par u'' de la boule unité A'' de F'' est contenue dans $\overline{u(A)}$ et u'' applique F'' dans E. Appliquons alors (A_4 bis) à u'' : u'' et a fortiori u est limite uniforme sur A d'applications linéaires continues de rang fini, ce qui est (A_5 bis).

3°) (A_5 bis) $\longrightarrow$ (A), sous l'hypothèse $E = \text{Fréchet}$ (ce qui achèvera la démonstration du théorème).

On utilisera le

Lemme.- Si $E = \text{Fréchet}$, pour tout compact $K_0 \subset E$, il existe un disque compact $K \supset K_0$, tel que K_0 soit encore compact dans E_K .

Démonstration du Lemme.

a) Il existe une suite $x_i \longrightarrow 0$, avec $K_0 \subset \overline{\Gamma}((x_i))$.

- b) Il existe une suite α_i de nombres > 0 , $\alpha_i \rightarrow 0$, avec $\frac{1}{\alpha_i} \cdot x_i \rightarrow 0$
- c) Soit $K = \overline{\bigcup (\frac{1}{\alpha_i} x_i)}$, disque compact, $\supset K_0$. On a : $\|x_i\|_{E_K} \leq \alpha_i \rightarrow 0$.

Alors dans E_K , l'enveloppe convexe équilibrée fermée de la suite (x_i) est un compact (donc compact de E) contenu dans K_0 donc $= K_0$.

C.Q.F.D.

Démonstration du 3°.

Supposant (Λ_5 bis), il faut montrer : pour tout compact $K_0 \subset E$ et V voisinage de 0 dans E , il existe $v \in E' \otimes E$ avec

$$(13) \quad v(x) - x \in V \quad \text{pour tout } x \in K_0.$$

Soit u l'application identique de E_K (Banach) dans E . L'image par u de la boule unité de E_K est compacte, donc, par (Λ_5 bis)

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } w, \text{ application linéaire continue de rang fini de } E_K \text{ dans} \\ E, \text{ telle que } w(x) - x \in \frac{V}{2} \text{ pour } x \in K. \end{array} \right.$$

Nous utiliserons alors le lemme :

Lemme.- Si w est une application linéaire continue de rang fini de E_K dans F , K_0 un compact dans K , W un voisinage de 0 donné dans F' , il existe une application linéaire continue v de rang fini de E dans F vérifiant :

$$(15) \quad v(x) - w(x) \in W \quad \text{pour } x \in K_0.$$

Démonstration du Lemme :

Comme w est de rang fini, on a

$$w = \sum_{i=1}^N w'_i \otimes f_i \quad w'_i \in (E_K)', \quad f_i \in F.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon f_i \in W$, $i = 1, 2, \dots, N$. Si on trouve $v'_i \in E'$ telles que

$$|v'_i(x) - w'_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{pour } x \in K_0,$$

$$v = \sum_{i=1}^N v'_i \otimes f_i \quad \text{répondra à la question.}$$

Il reste donc à montrer que les restrictions à E_K des formes linéaires continues sur E sont denses parmi les formes linéaires continues sur E_K , pour

la topologie $\mathcal{C}_c$ de la convergence uniforme sur les compacts de E_K .

u étant l'injection de E_K dans E , cela veut dire que ${}^t u(E')$ est dense dans $(E_K)'$ pour $\mathcal{C}_c$; comme $\mathcal{C}_c$ est compatible avec la dualité faible, il suffit pour cela que ${}^t u(E')$ soit faiblement dense dans $(E_K)'$, ce qui résulte de ce que u est biunivoque.

Comme ici $F = E$, prenons $W = \frac{V}{2}$, alors (14) et (15) donnent (13), d'où (A).

C.Q.F.D.

3.- Les propriétés de biunivocité.

Théorème 3.- Soit E un espace de Banach. Les propriétés suivantes portant sur E , sont équivalentes entre elles, et équivalentes aux (A) du théorème 2 :

(B) pour tout $u \in E' \hat{\otimes} E$, tel que l'application nucléaire correspondante $\tilde{u}$ ($\tilde{u} \in L^1(E;E)$, Cf. exposé n° 12) vérifie $\tilde{u} = 0$, on a : $\text{Tr } u = 0$.

(B₁) L'application naturelle de $E' \hat{\otimes} E$ dans $\mathcal{L}(E;E)$ est biunivoque.

(B₂) Pour tout espace de Banach F , l'application naturelle de $F' \hat{\otimes} E$ dans $\mathcal{L}(F;E)$ est biunivoque.

(B₃) Pour tout espace de Banach F , l'application naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\otimes} F$ est biunivoque.

Démonstration.

1°) $B_2 \implies B_1 \implies B$. Evident.

2°) $B_3 \implies B_2$.

On applique en effet B_3 à F' ; alors l'application naturelle de $F' \hat{\otimes} E$ dans $F' \hat{\otimes} E$ est biunivoque, or $F' \hat{\otimes} E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F;E)$, d'où B_2 .

3°) $(B) \longrightarrow (B_3)$.

Soit $u \in F \hat{\otimes} E$, d'image $\tilde{u}$ dans $F \hat{\otimes} E \subset \mathcal{L}(F';E)$ nulle. On veut en conclure (en s'aidant de (B)) que $u = 0$, soit que :

$$(17) \quad \langle u, X \rangle = 0 \quad \text{pour tout } X \in B(F,E).$$

Or X définit $\tilde{X} \in \mathcal{L}(F;E')$. Si alors

$$v = (X \otimes 1) \cdot u, \quad \text{on a} \quad (\text{Cf. exposé n° 12}) :$$

$$(18) \quad \langle u, X \rangle = \text{Tr } v$$

Or $v \in E' \hat{\otimes} E$ définit $\tilde{v} \in L^1(E; E)$ et $\tilde{v} = \tilde{u} {}^t \tilde{X}$, donc $\tilde{v} = 0$ (car $\tilde{u} = 0$). Donc grâce à (B), on a : $\text{Tr } v = 0$, ce qui, avec (18), entraîne (17).

C.Q.F.D.

4°) (A) $\longleftrightarrow$ (B) (ce qui achèvera la démonstration du théorème).

(A) équivaut à ceci :

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \text{Toute forme linéaire continue sur } \mathcal{L}_0(E; E), \text{ nulle sur } E' \hat{\otimes} E \text{ est nulle} \\ \text{sur } 1. \end{array} \right.$$

Mais d'après le théorème 1, une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_0(E; E)$ provient d'un élément u de $E \hat{\otimes} E'$; pour $v \in \mathcal{L}_0(E; E)$, on a : $\langle u, v \rangle = \text{Tr } (v \otimes 1) \cdot (u)$. Dire que u est orthogonale à 1 revient donc à dire :

$$(20) \quad \text{Tr } u = 0.$$

Par ailleurs si $v = a' \otimes b$, on a

$$(21) \quad \langle u, v \rangle = \langle \tilde{u}(b), a' \rangle, \tilde{u} \text{ étant l'élément de } \mathcal{L}(E; E) \text{ associé à } u, \text{ comme on le voit par continuité en partant de } u = x \otimes y'. \text{ Dire que } u \text{ est orthogonal à } E' \hat{\otimes} E, \text{ revient donc à dire que } \tilde{u} = 0.$$

Alors (19) ou (A) est bien équivalent à (B).

Définition.— On dit d'un espace E vérifiant toutes les propriétés équivalentes précédentes qu'il a la propriété d'approximation. La plupart des espaces connus ont cette propriété; pour quelques uns d'entre eux, on ignore s'ils l'ont ou non; on ne connaît pas d'espace qui ne l'ait pas.

Proposition.— Si E est un espace de Banach, pour que E' ait la propriété d'approximation, il faut et il suffit que l'on ait l'une quelconque des propriétés suivantes :

(B'₂) Pour tout espace de Banach F , l'application naturelle de $E' \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}(E; F)$ est biunivoque.

(A₅ bis) Toute application linéaire compacte de E dans un espace de Banach F est limite (pour la norme) d'applications linéaires continues de rang fini.

1°) Compte tenu de ce que $E' \hat{\otimes} F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E; F)$, (B'₂) relative à E n'est autre que (B₃) relative à E' .

2°) Montrons maintenant l'équivalence de (A₅ bis') et de la condition d'appro-

ximation pour E' . Supposons que l'on ait $(A_5 \text{ bis}')$, et soit u une application compacte de F Banach dans E' . Alors ${}^t u$ est compacte de E'' dans F' , donc a fortiori de E dans F' ; elle est alors en vertu de $(A_5 \text{ bis}')$ limite, pour la norme, d'applications linéaires continues de rang fini de E dans F' ; donc ${}^{tt} u$ et par suite u est limite, pour la norme, d'applications continues de rang fini de F dans E' , et E' vérifie $(A_5 \text{ bis})$.

Réciproquement supposons que $E' = G$ vérifie la condition d'approximation. Soit u une application compacte de E dans un Banach F . ${}^t u$ est alors compacte de F' dans G ; d'autre part ${}^{tt} u$ applique (voir démonstration du théorème 2, II, 2°) $E'' = G'$ dans F , donc ${}^t u$ est faiblement continue de F' dans G ; G vérifiant la propriété d'approximation, on peut appliquer $(A_4 \text{ bis})$ à G et ${}^t u$, donc ${}^t u \in F \hat{\otimes} G$ ou $u \in E' \hat{\otimes} F$, ce qui est $(A_5 \text{ bis}')$.

Corollaire.— Si E est un Banach et si E' vérifie la condition d'approximation alors E aussi.

En effet (B'_2) , pour $F = E$, devient B_1 .
