

# SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

S. COLOMBO

## Phénomènes magnéto-hydrodynamiques

*Séminaire L. de Broglie. Théories physiques*, tome 26 (1956-1957), exp. n° 9, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SLDB\\_1956-1957\\_\\_26\\_\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A8_0)

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PHÉNOMÈNES MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUES

(Résumé de l'Exposé de S. COLOMBO, le 12.2.1957)

Considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \vec{V} + \vec{F}$$

relative à un fluide visqueux; au second membre de celle-ci on voit apparaître la force  $\vec{F}$  agissant par unité de masse et qui, généralement, est d'origine mécanique (gravitation, force de Coriolis). Elle peut, dans certains cas, avoir une origine électromagnétique. C'est ce qui a lieu en particulier lorsque le fluide est conducteur de l'électricité et s'écoule en présence d'un champ magnétique.

Cependant, la simple addition, dans l'expression de  $\vec{F}$  de termes correspondants aux forces électromagnétiques ne suffit pas à résoudre le problème de l'écoulement du fluide conducteur. Les courants électriques circulant au sein de celui-ci vont réagir sur le champ magnétique initial. Il faudra donc prendre simultanément en considération les équations générales de l'hydrodynamique (dans lesquelles interviendront les termes  $\vec{F}_e$  correspondant aux forces électromagnétiques) et les équations de Maxwell. Les problèmes ainsi posés sont appelés magnéto-hydrodynamiques.

Avant de les aborder nous allons préciser les conditions de possibilité d'interaction entre un fluide conducteur de l'électricité et un champ électromagnétique. Lors de l'étude de l'effet pelliculaire, on définit une épaisseur de pénétration de l'onde qui, avec un système d'unités rationalisées, est donnée par

$$(2) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$$

On peut lui faire correspondre un "temps de pénétration" pris arbitrairement égal à la fraction  $1/\pi$  de la période

$$\tau = \frac{2}{\omega} = \mu \sigma \delta^2$$

et de même une "vitesse de pénétration"

$$\frac{\delta}{\tau} = \frac{1}{\mu \sigma \delta}$$

Il est naturel de poser que les phénomènes magnéto-hydrodynamiques ne se produiront que si les vitesses des éléments du fluide sont très supérieures à cette vitesse de pénétration, d'où une première condition :

$$(3) \quad \frac{1}{\mu \sigma \delta} \ll v .$$

D'autre part, il est non moins naturel de poser que les densités d'énergie mécanique et d'énergie électromagnétique sont du même ordre de grandeur ; en égalant l'énergie cinétique à celle magnétique on a

$$(4) \quad \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{B^2}{2 \mu} .$$

De (3) et (4) on tire la condition, dans laquelle  $\delta$  est une longueur caractéristique de l'écoulement

$$(5) \quad B \delta \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \gg 1$$

et qui, évidemment, ne correspond pas à un raisonnement rigoureux mais fixe néanmoins quelques ordres de grandeur ; elle explique les difficultés que l'on rencontre pour reproduire des phénomènes magnéto-hydrodynamiques à l'échelle du laboratoire. C'est ainsi qu'avec du mercure,  $\delta = 10$  cm et  $B = 10.000$  Gauss fournissent pour le premier membre de (5) une valeur voisine de l'unité. Avec du sodium liquide on obtient une valeur 50 fois plus grande.

#### Equations magnéto-hydrodynamiques.

Nous adoptons, pour les équations de Maxwell, les notations et conventions utilisées par Sommerfeld dans son traité d'électrodynamique ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ). Si on admet que les phénomènes magnéto-hydrodynamiques ont uniquement pour cause les mouvements du fluide et que les vitesses de celui-ci sont faibles par rapport à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques ( $v \ll c$ ) on peut négliger le courant de déplacement. Les équations

de Maxwell deviennent

$$(6) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{div} \vec{D} &= \gamma \end{aligned}$$

Le fluide sera supposé caractérisable, du point de vue électrique par trois scalaires  $\epsilon, \mu, \sigma$  ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ). Ceci implique entre autres conditions, que le libre parcours moyen d'un ion ou d'un électron reste grand par rapport au rayon de courbure des trajectoires provenant de l'action du champ magnétique. Un calcul simple montrerait que cette condition n'est pas remplie dans les gaz raréfiés et que par conséquent les équations que nous allons établir sont inapplicables à des milieux tels que la couronne solaire ou les nuages interstellaires.

Le courant électrique est la somme du courant de conduction et de celui de convection.

$$(7) \quad \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \gamma \vec{V} ;$$

mais la condition  $V \ll C$  conduit à négliger le second. Enfin, la force d'origine électromagnétique agissant sur l'unité de masse est

$$\vec{F}_e = \frac{1}{\rho} \vec{J} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu \rho} (\operatorname{rot} \vec{B}) \wedge \vec{B} .$$

Supposons, pour simplifier, le fluide incompressible ( $\rho = \text{Const.}$ ). Les équations générales seront

$$(9) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\mu \rho} (\operatorname{rot} \vec{B}) \wedge \vec{B} + \vec{F}$$

$$(10) \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{\mu \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$(12) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Le problème consiste donc à déterminer deux champs de vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$  satisfaisant au système (9) et à des conditions aux limites appropriées.

On remarquera que si la vitesse  $V$  est faible et que par conséquent le premier terme du second membre de (11) est négligeable devant le second ,

(11) n'est autre que l'équation de diffusion. Le champ magnétique initial, en l'absence de source doit décroître exponentiellement dans le temps. Par contre, si la conductivité  $\sigma$  est élevée, c'est le second terme qui est négligeable devant le premier. Dans ces conditions il est possible de démontrer que le flux magnétique à travers toute surface se déplaçant et se déformant avec le fluide reste constant. Les lignes de force magnétique sont alors "figées" dans le fluide.

#### Nombre de Reynolds magnétique.

Considérons toujours l'équation (11). Si  $L$  désigne une longueur caractéristique du fluide, plus exactement, une distance séparant deux points entre lesquels la valeur du champ varie de façon appréciable, le second terme du second membre de (11) sera négligeable par rapport au premier si la quantité  $LV\mu\sigma$  (qui est un nombre sans dimensions) possède une valeur élevée. Considérons d'autre part l'équation fondamentale de l'hydrodynamique écrite sous la forme

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{V} \wedge \vec{W}) + \nu \Delta \vec{W} \quad , \quad (\vec{W} = \text{rot} \vec{V}) \quad ,$$

(équation de Helmholtz) et qui est analogue à (11). Ici, la même circonstance se produira si le "nombre de Reynolds"  $LV/\nu$  est grand, et on sait que c'est la valeur de ce nombre qui fixe le caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement du fluide.

On peut dès lors préciser les conditions envisagées plus haut relatives à la possibilité de créer des phénomènes magnéto-hydrodynamiques en disant que ceux-ci ne peuvent avoir lieu que pour des valeurs élevées du "nombre de Reynolds magnétique"  $LV/\nu_m$  (où  $\nu_m = \frac{1}{\mu\sigma}$ ) car alors le mouvement du fluide crée une déformation notable des lignes magnétiques avant que le champ n'ait diminué sensiblement de son intensité.

#### Ondes hydromagnétiques d'Alfven. [1]

Envisageons un liquide parfaitement incompressible ( $\rho = \text{Constante}$ ), parfaitement conducteur ( $\sigma = \infty$ ) et dénué de viscosité ( $\nu = 0$ ). Supposons qu'un champ magnétique agisse suivant l'axe  $Oz$  et linéarisons le système (9) - (12) en posant

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad ,$$

$\vec{B}_0$  étant l'induction constante dirigée suivant Oz, et en remplaçant  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  par  $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ , on obtient

$$\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + \frac{1}{\mu\rho} \left[ \text{grad} (\vec{B}_0 \cdot \vec{b}) + B_0 \frac{\partial\vec{b}}{\partial z} \right].$$

Si l'on néglige le terme gradient, on constate que le fluide est susceptible de propager des ondes hydromagnétiques transversales ( $\vec{B}_0 \cdot \vec{b} = 0$ ) car le système ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\partial^2\vec{b}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2\vec{b}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}.$$

La vitesse de propagation est  $B_0(\mu\rho)^{-\frac{1}{2}}$ . L'absence de dispersion et d'amortissement s'explique par les hypothèses simplificatrices qui viennent d'être faites.

Des expériences sur les ondes hydromagnétiques ont été effectuées par Lundqvist [2] avec du mercure et par Lehnert [3] avec du sodium liquide. Les problèmes posés par les propagations de telles ondes ont été aussi étudiés par Walen [4] et par Baños [5].

#### Effet dynamo.

L'existence de champs magnétiques stellaires et du champ magnétique terrestre posent la question suivante : une masse fluide conductrice de l'électricité est-elle susceptible de maintenir son propre champ magnétique, et cela par un processus analogue à celui de la dynamo homopolaire ?

L'étude d'un tel "effet dynamo" a suscité d'importantes recherches [6] [7].

Remarquons d'abord, en ce qui concerne le champ terrestre que si l'on attribue celui-ci à des mouvements de convection du noyau central comportant des vitesses de l'ordre de  $10^{-4}$  m/sec. et en adoptant une conductivité  $\sigma = 10^5$  unités M.K.S.A., on obtient un nombre de Reynolds magnétique  $R_m = 10^2$ , donc des conditions favorables à l'évolution de phénomènes magnéto-hydrodynamiques.

Toutefois, Cowling [6] a démontré qu'un champ de type dipolaire ne pouvait être entretenu par une masse fluide sphéroïdale et pour laquelle les

trajectoires des particules fluides restent situées dans des plans méridiens.

En effet, un tel champ magnétique comporte un cercle de champ nul qui perce le plan de figure en A et B (fig. 1). De plus, comme par hypothèse  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , on a  $\vec{E} = \text{grad } \bar{\Phi}(\varpi, z)$ ,  $\varpi$  étant la distance à l'axe. Il en résulte que la composante  $E_\varphi = 0$ , et le vecteur champ électrique est situé dans le plan méridien. On doit avoir

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \sigma (\text{grad } \bar{\Phi} + \mu \vec{V} \wedge \vec{H})_n dS$$

C désignant une ligne de force entourant A et S l'aire qu'elle délimite. Soit  $H_0$  la valeur moyenne de H le long de C. La valeur moyenne de H calculée sur l'aire S lui est certainement inférieure. On peut en conclure,  $l$  désignant la longueur de C,

$$H_0 l \leq \sigma \mu V H_0 S$$

On aboutit ainsi à une contradiction, car lorsque l'on envisage des lignes de force de plus en plus proches de A, le premier terme est un infiniment petit d'ordre inférieur au second.

Il faut en conclure que la production de l'effet dynamo exige non seulement une valeur élevée du nombre de Reynolds magnétique, mais aussi une asymétrie suffisante dans le champ des vitesses.

Des calculs ont été effectués par Bullard et Gellman à partir d'un champ de vitesses adopté a priori. Elsasser a également donné une interprétation du mécanisme de l'effet dynamo en le considérant comme un échange entre champs de types poloidaux et ceux de types toroïdaux qui résultent de la résolution de l'équation

$$\vec{B} = K^2 \text{rot rot } \vec{B}$$

et du problème aux valeurs propres qui lui correspond. Ces échanges auraient lieu sous l'effet de forces analogues à la force géostrophique envisagée en météorologie et provoquée par l'asymétrie soulignée plus haut en même temps que par l'effet d'inertie de Coriolis.

Mais les calculs ainsi effectués ne constituent pas une démonstration analytique de l'effet dynamo. Ils indiquent simplement qu'un tel effet est plausible. Enfin, on ignore si les séries de fonctions orthonormales utilisées

dans ces calculs convergent effectivement.

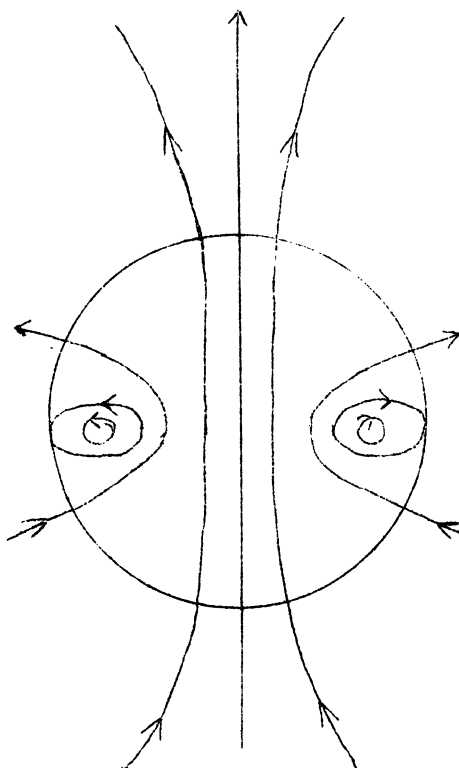


fig. 1.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] ALFVEN (H.) : Ark. f. Math. Fysik, 29 B, 1942.
- [ 2 ] LUNDQVIST : Phys. Rev., 83 (1931) p. 307.
- [ 3 ] LEHNERT (B.) : Phys. Rev., 94 (1954) p. 815.
- [ 4 ] WALEN : Ark. f. Math. Astr. Fysik, 30 A, 31 B, 1944.
- [ 5 ] BANOS : Phys. Rev., 97 (1955) p. 1435.
- [ 6 ] BULLARD (E) et GELLMAN (H.) : Phil. Trans. Roy. Soc., 247 (1954) p. 213.
- [ 7 ] ELSASSER (W.M.) : Rev. Modern Phys., 28 (1956) p. 135.

---

Le texte développé du présent exposé paraîtra prochainement dans la  
Revue Générale de l'Electricité.

---