Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Hélène Airault

Problèmes de Dirichlet-Neumann étalés et fonctionnelles multiplicatives associées

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 3, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A3_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROBLÈMES DE DIRICHLET - NEUMANN ÉTALÉS ET FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES ASSOCIÉES.

par Hélène AIRAULT

Dans [1,2], on a résolu un problème de Dirichlet-Neumann mélangé pour des fonctions définies sur R^n et à valeurs vectorielles. On a montré [2] comment ce problème apparaissait de façon naturelle si on cherche à résoudre de manière probabiliste certains problèmes de Neumann-Spencer. Ici, on étudie de façon plus précise la forme multiplicative des fonctionnelles $\mathcal{A}(s)$ associées aux différentes conditions frontières, ainsi que les semi-groupes correspondants.

TABLE DES MATIÈRES

I - LES PROBLÈMES DE NEUMANN - SPENCER.

II - FIBRÉ DES REPÈRES ORTHONORMÉS TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ÉNONCÉ DES PROBLÈMES.

III - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR M ET SUR O(M)

1) La symétrie par rapport au bord, applications induites.
2) Le processus réfléchi sur la variété M.
3) Les semi-groupes de Spencer opérant sur les formes.
4) Les semi-groupes réfléchis sur O(M).

IV - LE TEMPS LOCAL.

V - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLÈME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE ASSOCIÉ - THÉORÈME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE $\mathcal{A}(s)$.

1) Solution du problème (1) et théorème d'annulation.
2) Le semi-groupe associé.
3) La forme multiplicative de $\mathcal{A}(s)$.

- Obtention à partir du sytème intégral (T')
- Détermination à partir de $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}_\varepsilon(s)$ dans les cas particuliers du $\frac{1}{2}$ - plan et d'un polygône.

I . - LES PROBLEMES DE SPENCER - NEUMANN.

Ces problèmes sont étudiés dans [4,16] et une introduction à notre étude est faite dans [2]. M désigne une sous-variété à bord et finie d'une variété riémannienne et n_x est la normale au bord au point x.

On note $T_x(M)$ l'espace tangent en x à la variété M et $T_x^*(M)$ l'espace vectoriel dual de $T_x(M)$. Soit θ une forme différentielle définie dans un voisinage du bord (prenons par exemple une forme de degré 1).

Dans un système de coordonnées locales, θ s'exprime sous la forme

$$\theta = \theta_1 dx_1 + .. + \theta_n dx_n$$

où $(dx_1(x),..,dx_n(x))$ est une base de $T_x^*(M)$

On peut supposer que $dx_n(x)$ est la différentielle qui correspond à la normale n_x sous l'isomorphisme canonique $T_x^*(M) \simeq T_x(M)$ défini par la métrique riemanienne. La composante normale de θ est alors au point x, $\theta_n dx_n$ et la composante normale de $d\theta$ est

$$(d\theta)_n = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1}\right) dx_n \wedge dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \theta_n}{\partial x_{n-1}}\right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

Un des problèmes de Spencer-Conner [4,16] consiste à déterminer une forme differentielle π harmonique dans M (c'est à dire telle que $\square \pi = C$, où $\square = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de De Rham-Hodge)

et telle que $\begin{cases} \pi_n = \theta_n \\ (d\pi)_n = (d\theta)_n \end{cases}$ au bord de M.

Ces problèmes ont été résolus par des techniques L^2. On étudiera ces problèmes dans le fibré des repères orthonormés de la variété M.

II. - FIBRE DES REPÈRES ORTHONORMÉS - TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ENONCÉ DES PROBLÈMES - [2,12]

Un repère au dessus du point $x \in M$ est un isomorphisme d'espace vectoriel euclidien de $E = \mathbb{R}^n$ sur $T_x(M)$.

L'ensemble des repères orthonormés au dessus des points de la variété M noté O(M) est un fibré au dessus de M sur lequel agit le groupe orthogonal O(n) par l'opération suivante.

$$(g,r) \to g.r = r \circ g \quad \text{de} \quad O(n) \times O(M) \quad \text{dans} \quad O(M).$$

Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base orthonormale de $E = \mathbb{R}^n$. A une forme π de degré p sur M correspond la valeur de la forme π lue dans le repère r.

$$f_\pi(r) = \pi_{p(r)}(r(e_{i_1}) \wedge .. \wedge r(e_{i_p})) \quad (1 \leq i_1 < .. < i_p \leq n)$$

f_π est une application de O(M) dans $\overset{p}{\Lambda} E$.

DEFINITION 1.II [12]

Une application f définie sur O(M) et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est équivariante si $\forall\, g \in O(n)$, on a $f(g.r) = g\,(f(r))$

THEOREME 1.II [12]

Les applications de O(M) dans $E = \mathbb{R}^n$ qui correspondent à des formes différentielles de degré 1, sont les fonctions de O(M) dans $\mathbb{R}^n$ qui sont équivariantes.

Ces résultats se généralisent immédiatement aux formes de degré p.

A l'opérateur de De Rham - Hodge $\square$ est associé un opérateur elliptique dégénéré Λ sur $O(M)$. [12] $\square\,\pi = 0$ si et seulement si $\Lambda\, f_\pi(r) = f_\theta(r)$.

On note $F_{p,r}$ le sous espace de $\overset{p}{\wedge} E$ engendré par les vecteurs

$$r^{-1}(n_x) \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_{p-1}} \qquad (i_1 < .. < i_{p-1})$$

Pour un repère r au dessus du point x, on désigne par $P(r)$ la projection orthogonale dans $\overset{p}{\wedge} E$ sur le sous-espace $F_{p,r}$, et on note $Q(r) = I - P(r)$.

$df_\pi(r)$ (rel n) désigne la dérivée de l'application f_π suivant le relèvement horizontal du vecteur $\vec{n}$.

Pour une forme différentielle π, les conditions frontières ($\pi_n = 0$ et $(d\pi)_n = 0$) se traduisent [2] sur la fonction f_π par les conditions

[$P(r)\, f_\pi(r) = 0$ et $Q(r)\, df_\pi(r)$ (rel n) $= 0$ pour les repères r au dessus des points du bord de M].

On notera $bO(M)$ l'ensemble des repères r au dessus des points du bord de M.

Le problème de Spencer mentionné au § I, se ramène donc au problème (F_q) suivant sur les fibré des repères. Etant donné une fonction $\varphi(r)$ définie sur $bO(M)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, déterminer une fonction f définie sur $O(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telle que

a) $\Lambda\, f(r) = 0$ pour tout repère r au dessus des points à l'intérieur de M.

b) $P(r)f(r) - Q(r)df(r)$ (rel n) $= \varphi(r)$ pour les repères r au dessus de bM.

Trouver une représentation intégrale pour les solutions lorsqu'elles existent.

$Q(r)$ est dégénérée ; $P(r)$ et $Q(r)$ sont deux projecteurs orthogonaux tels que $I = P(r) + Q(r)$.

Dans le cas du problème concernant les formes de degré 1, P et Q vérifient

$P(rog) = g^{-1} o\, P(r) o g$ et $g^{-1} o\, Q(r) o g = Q(rog)$ pour tout $g \in O(n)$

En effet, si $P(r)$ est la projection sur $r^{-1}(n_x)$, on a

$$P(rog) = \text{proj. sur } g^{-1}(r^{-1}(n_x)) = g^{-1} o \text{ proj. sur } r^{-1}(n_x) o g$$

On cherche les solutions du problème (F_q) qui sont équivariantes.

III. - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR M ET SUR ∂(M)

1 - La symétrie par rapport au bord - applications induites

On note V la variété doublée de M [14,15,16] et ν la "symétrie" par rapport au bord ; on suppose que $\nu \circ \nu$ est l'application identique.

LEMME 1.III

Soit f une fonction définie sur V, et différentiable

a) si $f(x) = f(\nu x)$ alors $\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0$ au bord.

b) si $f(x) = -f(\nu x)$ alors $f(x) = 0$ au bord.

La démonstration est immédiate ; pour a), on remarque que

$$df(\nu x)\,(\vec{n}) = df(x) \cdot d\nu(x)\,(\vec{n}) = -\,df(x)\,(\vec{n})$$

Dans les notations qui suivent, on considérera généralement des formes de degré 1 ; les formules s'étendant facilement au cas des formes de degré p.

La symétrie ν induit une application $\hat{\nu} : \beta \to \hat{\beta}$ définie sur les formes de degré 1 par

$$(1) \qquad \langle \hat{\beta}(x), h\rangle = \langle \beta(\nu x), d\nu(x) \cdot h\rangle$$

[β étant la forme différentielle et h un vecteur de $T_x(V)$]

A l'application $\hat{\nu}$ définie sur les formes, correspond l'application ν^* qui agit sur les fonctions de la manière suivante

$$(2) \qquad (\nu^* f)(r) = f(d\nu(p(r)) \circ r) = f(\nu r)$$

où on pose $\nu(r) = d\nu(p(r)) \circ r$

LEMME 2.III

Si une forme β sur V vérifie $\hat{\beta} = \beta$; on a $\beta n = 0$ et $(d\beta)_n = 0$ au bord de M.

Démonstration :

Si $x \in b\,M$, on a $\nu x = x$ et d'après (1), on a

$$\langle \hat{\beta}(x), n_x\rangle = \langle \beta(x), d\nu(x) n_x\rangle = -\langle \beta(x), n_x\rangle$$

donc $\beta = \hat{\beta}$ entraîne $\beta_n = 0$

Soit $\beta = \beta_1 dx_1 + \ldots + \beta_n dx_n$ une décomposition de β dans une carte au voisinage

du bord telle que dx_n corresponde à la normale au bord

$$(d\beta)_n = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial \beta_n}{\partial x_1}\right) dx_n \wedge dx_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \beta_n}{\partial x_{n-1}}\right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

La relation $\beta = \hat{\beta}$ entraîne $\beta_i(x) = \hat{\beta}_i(\nu x)$, donc $\frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = 0$ pour $i = 1, \ldots, r-1$

Comme $\beta_n = 0$ au bord, on a $\frac{\partial \beta_n}{\partial x_i} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, donc $d\beta_n = 0$ au bord

LEMME 3.III

Si une forme β sur V vérifie $\hat{\beta} = -\beta$, on a $\beta_t = 0$ et $(\delta\beta)_t = 0$ au bord de M

Démonstration : - Pour l'opération $*$, voir [19]

Si $\hat{\beta} = -\beta$ alors $\widehat{*\beta} = *\beta$

En effet

$$\langle \widehat{*\beta}(x), h \rangle = \langle (*\beta)(\nu x), \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h \rangle$$

$$= \epsilon \langle \beta(\nu x), * \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h \rangle$$

où $\epsilon = \pm 1$; or $* \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x).h = -d\nu(x)(*h)$

donc $\langle \beta(\nu x), * \overset{n-1}{\wedge} d\nu(x) h \rangle = -\langle \beta(\nu x), d\nu(x)(*h) \rangle$

$= \langle \beta(x), *h \rangle$ car $\hat{\beta} = -\beta$

or $\langle \beta(x), *h \rangle = \epsilon \langle *\beta(x), h \rangle$

donc $\widehat{*\beta} = *\beta$

On utilise alors les résultats du lemme 2.

LEMME 2 bis - III

Soit f une fonction définie sur le fibré des repères $O(V)$ qui est équivariante et à valeurs dans $\overset{p}{\wedge} E$

Si f vérifie $\nu^* f = f$, on a $f(r)$ est orthogonal à $F_{p,r}$ et $df(r)(\text{rel} \cdot)$ appartient à $F_{p,r}$ pour les repères r au dessus du bord de M ;

C'est a dire, on a $P(r)f(r) - Q(r)df(r)(\text{rel } n) = 0$.

Démonstration : (cas d'une 1 - forme)

Au bord $\nu(r) = g.r$ où g est la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ dans la base $(r^{-1}(n_x), e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-1}})$

Avec l'équivariance, on a $f(\nu r) = g.f(r)$

et $g.f(r) = f(r)$ entraîne $f(r)$ est orthogonal au sous-espace $F_{1,r}$ engendré par $r^{-1}(n_x)$

alors $d(\nu^* f)(r) = df(\nu r)\, d\nu(r)$

comme $d\nu(r)(\text{rel } n_x) = -\text{rel } n_x$, on a

$$-df(\nu r)(\text{rel } n_x) = df(r)(\text{rel } n_x)$$

donc $(I + g)\, df(r)\, (\text{rel } n_x) = 0$

et $df(r)(\text{rel } n_x) \in F_{1,r}$

2 - Le processus réfléchi sur la variété M

Le processus X_s^+ sur la variété M est construit en doublant la variété M [14,15], puis en prenant le processus X_s de diffusion sur "la variété doublée" et en faisant une réflection de X_s sur le bord, quand X_s touche le bord.

Le semi-groupe du processus réfléchi X_s^+ s'obtient de la façon suivante : Etant donné une fonction f, continue sur M, on prolonge sur V en posant $f(\nu x) = f(x)$ si $x \in M$;

On désigne par f_1 le prolongement de f et on définit le semi-groupe sur V par

$$P_t^+ f_1(x_o) = \tfrac{1}{2} [\, P_t f_1(x_o) + P_t f_1(\nu x_o) \,]$$

On notera $P_t^+ f$ sa restriction à M

$P_t^+ f_1$ vérifie $P_t^+ f_1(x_o) = P_t^+ f_1(\nu x_o)$ donc $\dfrac{\partial P_t^+}{\partial n} f(x_o) = 0$

si x_o appartient au bord de M.

LEMME 4.III

Le temps de vie de X_s^+ est infini

Démonstration :

Soit $\xi(\omega)$ le temps de vie de X_s^+

$$P_x(t < \xi(\omega)) = p^+(t,x,M) = \tfrac{1}{2}\,[p(t,x,V) + p(t,\nu x,V)] = 1$$

3 - Les semi-groupes de Spencer [16] opérant sur les formes.

Soit T_t le semi-groupe opérant sur les formes définies sur V et correspondant à l'opérateur $\square$ de Hodge.

a) Si β est une forme sur M, on la prolonge sur V en posant

$$< \hat{\beta}(x), h > = < \beta(\nu x), d\nu(x).h >$$

On note β_1 le prolongement ; β_1 vérifie $\hat{\beta}_1 = \beta_1$

On définit

$$\mathcal{C}_t^+ \beta_1(h) = \tfrac{1}{2}\,[T_t \beta_1 + \widehat{T_t \beta_1}]$$

et $T_t^+ \beta$ est défini comme la restriction à M de $\mathcal{C}_t^+ \beta_1$

Le semi-groupe T_t^+ correspond aux opérateurs M_s de [16 , p. 12]

b) De la même façon, le semi-groupe correspondant aux opérateurs L_s de [16, p. 12] est obtenu comme suit :

on prolonge sur V une forme β définie sur M, en posant

$$< \beta_2(x), h > = - < \beta(\nu x), d\nu(x) h >$$

et $T_t^- \beta$ est la restriction à M de $\tfrac{1}{2}\,[T_t \beta_2 - \widehat{T_t \beta_2}]$

LEMME 5.III

Les semi-groupes T_t^+ et T_t^- sont reliés par $*T_t^+ = T_t^- *$

Démonstration:

$$*T_t^+ \beta = \tfrac{1}{2}[*T_t \beta_1 + \widehat{*T_t \beta_1}]$$

or

$$< *\widehat{T_t\beta_1}(x), h > = \varepsilon < T_t\beta_1(x), *h > \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$= \varepsilon < T_t\beta_1(\nu x) \ , \ d\nu(x)(*h) >$$

comme $d\nu(x)(*h) = *d\nu(x).h$

$$< *\widehat{T_t\beta_1}(x), h > = - < *T_t\beta_1(\nu x), d\nu(x)h >$$

$$= - < *\widehat{T_t\beta_1}(x), h >$$

$$< *T_t^+\beta(x), h > = \tfrac{1}{2} \left[< *T_t\beta_1(x), h > - < *\widehat{T_t\beta_1}(x), h > \right]$$

or $*T_t = T_t*$

et $*(\beta_1) = (*\beta)_2$ d'où le résultat.

Remarque : Les semi-groupes T_t^+ et T_t^- ne sont pas "conservatifs", c'est à dire si on leur associe un processus, il y a un "killing" de ce processus sur le bord de M. En effet si h est un vecteur normal au bord dans l'espace tangent à M en un point du bord bM, $\mathcal{L}_t^+\beta_1(h) = 0$

et si h est un vecteur dans l'espace tangent au bord bM

$$\mathcal{L}_t^-\beta_2(h) = 0$$

On étudiera ce Killing au (§ V, n° 3).

4 - Les semi-groupes réfléchis sur O(M)

On note P_t le semi-groupe sur O(V) défini par le générateur infinitésimal Λ correspondant à l'opérateur de De Rham Hodge sur V. [12] . On a $P_t f_\pi = f_{T_t\pi}$.

On va définir les deux semi-groupes P_t^+ et P_t^- sur O(M) qui correspondent aux semi-groupes du § 3 par les relations

$$f_{T_t^+\pi} = P_t^+ f_\pi \quad \text{et} \quad f_{T_t^-\pi} = P_t^- f_\pi$$

Soit f une fonction équivariante définie sur O(M) et à valeurs dans $E = \mathbb{R}^n$.

1) On la prolonge en une fonction définie sur $O(V)$ et à valeurs dans E, en posant

$$f_1(r) = f(d\nu(p(r))or) \quad \text{si} \quad r \in O(V-M)$$

On note f_1 le prolongement ; f_1 vérifie $\nu^* f_1 = f_1$

On définit le semi-groupe $\wp_t^+$ sur $O(V)$ par

$$\wp_t^+ f(r) = \tfrac{1}{2} [P_t f_1 (r) + P_t f_1(\nu r)] \text{ et}$$

on prend sa restriction à $O(M)$ notée P_t^+

Remarquons que quand on prolonge $P_t^+ f$ par la méthode (1) ci dessus, on a

$$(P_t^+ f)_1 = \wp_t^+ f.$$

$\wp_t^+ f$ satisfait les conditions du lemme 2 bis et la forme différentielle qui lui correspond satisfait les conditions du lemme 2

[On "réfléchit" les composantes tangentielles et on "absorbe" les composantes normales]

2) On prolonge f en une fonction sur $O(V)$ à valeurs dans E, en posant $f_2(r) = - f(d\nu(p(r))or) = - f(\nu r)$. Le prolongement f_2 vérifie $f_2(\nu r) = - f_2(r)$.

On définit le semi-groupe $\wp_t^-$ sur $O(V)$ par $\wp_t^- f(r) = \tfrac{1}{2} [P_t f_2(r) - P_t f_2(\nu r)]$ et on prend sa restriction sur $O(M)$ notée P_t^-. Si on prolonge $P_t^- f$ par la méthode (2) ci-dessus, on a

$$(P_t^- f)_2 = \wp_t^- f$$

[On "réfléchit" les composantes normales et on "absorbe les composantes tangentielles]

IV. - TEMPS LOCAL

1 - Le temps local au bord de M [6,8,15]

C'est la limite de la moyenne du temps de séjour du processus X_s dans une bande de largeur ρ autour du bord quand ρ tend vers zéro.

Sous forme précise, si on pose

$$D_\rho = \{x \in M \mid \text{distance } (x, bM) < \rho\}$$

alors

$$\tau(t) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \int_0^t 1|_{D_\rho} (X_s^+) \, ds$$

$\tau(t)$ est une fonctionnelle de Markov croissante qui croit seulement quand le processus X_s^+ touche le bord et $d\tau$ est une mesure qui a pour support un parfait de dimension de Hausderff 1/2 [9,p.50 et 17]

On pose

$$\tau^{-1}(t) = \sup \{s \mid \tau(s) \leq t\}$$

et on considère le processus $Y_u = X^+_{\tau^{-1}(u)}$

Alors Y_u est un processus qui vit sur le bord et son générateur infinitésimal est obtenu de la façon suivante [15 ; 8]

On se donne une fonction φ sur bM ; on note $H\varphi$ la fonction dans M qui est harmonique à l'intérieur de M et qui coïncide avec φ au bord de M. On pose $A\varphi = \frac{\partial}{\partial n} H\varphi$. Alors A est le générateur infinitésimal de Y_u.

V. - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLEME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE ASSOCIE - THEOREME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE $\mathcal{L}(s)$

Dans § III, on a déterminé le semi-groupe P_t^+ [16] qui satisfait $\Lambda P_t^+ f = \frac{\partial}{\partial t} P_t^+ f$ dans M

et au bord $P(r)P_t^+f(r) - Q(r)d(P_t^+f)(r)(\text{rel } n) = 0$

On va donner une autre expression de ce semi-groupe en construisant le processus associé.

Pour cela, on cherche à déterminer une forme π telle que $\Box \pi = 0$ dans M et $\pi_n = \theta_n$; $(d\pi)_n = (d\theta)_n$ au bord de M.

c'est à dire

$$(1) \quad \begin{cases} \Lambda f_\pi(r) = 0 \quad \text{dans} \quad M \\ \text{et} \quad P(r)f_\pi(r) - Q(r)df_\pi(r)(\text{rel } n) = \psi(r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{au bord de} \quad M \end{cases}$$

1. - Cas d'une variété plate - Solution du problème (1)

Soit $r_o(x)$ un repère donné. Tout repère $r(x)$ s'écrit $r(x) = g(x)r_o(x)$ où $g(x) \in O(n)$.

Si f est une fonction équivariante définie sur $O(M)$, $f(r) = g(x)^{-1}f(x)$ où on a posé $f(x) = f(r_o)$

Si $r(x)$ est le repère $(f_1(x),.., f_n(x))$ et $r_o(x)$ est le repère $(e_1(x),..,e_n(x))$, les formules de changement de repère sont les suivantes :

$$f(r) = \pi_1(x)f_1(x) + \ldots + \pi_n(x)f_n(x)$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, \pi_i(x)e_j(x) = \sum_j \varphi_j(x)e_j(x)$$

. .

Si $\pi_n(x) = 0$, on a $df_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \pi_i}{\partial n}(x)\, f_i(x)$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1,..n}}^{n-1} g_{ij}\, \frac{\partial \pi_i}{\partial n}\, e_j$$

et $$\pi_i = g_{ij}^{-1}\, \varphi_j$$

Choisissons un repère $r_o(x)$ tel que $\Delta_{O(M)} f(r) = 0$ si et seulement si $f(x) = (\varphi_1(x),.., \varphi_n(x))$ où $(\varphi_1,.., \varphi_n)$ sont des applications de M dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\Delta \varphi_i = 0$ pour $i = 1,.. n$.

Soit P la matrice de projection sur le n-ième vecteur $\vec{e}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et $Q = I - P$.

Pour un repère r tel que $r^{-1}(n_x) = \vec{e}_n$, on a $P(r) = P$ et $Q(r) = I - P$.

Dans un tel repère, les conditions frontières sont

$$P(r)f(r) - Q(r)\, df(r)(\text{rel } n) = \psi(r)$$

c'est à dire

$$(\alpha) \qquad P \cdot g(x)^{-1}f(x) - Q\, \frac{\partial}{\partial n}\, g(x)^{-1}f(x) = g(x)^{-1}\, \psi(x)$$

En multipliant par $g(x)$ et en posant $P(r_o) = P(x)$, on a

$$(\beta) \qquad P(x)f(x) - Q(x)g(x)\frac{\partial}{\partial n}[g(x)^{-1}f(x)] = \psi(x)$$

c'est à dire $\qquad P(r_o)f(r_o) - Q(r_o)\, df(r_o)(\text{rel } n) = \psi(r_o)$

On peut supposer que $\frac{\partial}{\partial n} g(x)^{-1} = 0$, il suffit de prendre un prolongement convenable "à l'intérieur" de $g(x)^{-1}$ et les conditions (β) deviennent

$$(\gamma) \qquad P(x)f(x) - Q(x)\frac{\partial}{\partial n} f(x) = \psi(x)$$

On a ramené le problème (1) à celui étudié dans [2] [Théorème 4-4]

On remonte l'expression [36 - Théorème 4-4 [1]]

$$f(x) = E_x\left[\int_o^{+\infty} \mathcal{L}(s)\,\psi(X_s^+)\tau(ds)\right] - E_x\left[\int_o^{+\infty} d\mathcal{L}(s)\,\psi(X_s^+)\right]$$

En posant

$\psi(r) = P(r)\, f_\theta(r) - Q(r)df_\theta(r)(\text{rel } n)$ et en utilisant les relations [2]

$$\mathcal{L}(s)P(r_s^+) = 0 \quad \text{et} \quad d\mathcal{L}(s)Q(r_s^+) = 0$$

On obtient

$$(\delta) \qquad -f(r) = E_r\left[\int_o^{+\infty} \mathcal{L}(s)df_\theta(r_s^+)(\text{rel } n)\tau(ds)\right] + E_r\left[\int_o^{+\infty} d\mathcal{L}(s)f_\theta(r_s)\right]$$

(δ) donne la solution du problème (1)
[Théorème 5.5 - [1]]

Remarques

1) Comme $\mathcal{L}(0) = \text{id}$ et $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}(s)h = 0$, on obtient la formule (δ) "en gros" en intégrant la différentielle stochastique $d(\mathcal{L}(s)f_\theta(r_s^+))$

En effet

$$- f_\theta(r) = E_r \left[\int_0^{+\infty} d(\mathcal{L}(s) f_\theta(r_s^+)) \right]$$

2) On obtient en utilisant $\mathcal{L}(s)$ des théorèmes d'annulation faisant intervenir la courbure du bord.
Des théorèmes de ce type sont obtenus dans [18], par exemple proposition 3.2.p.133 (ii), par des méthodes différentes.

THÉORÈME (d'annulation) 1 - V

Dans le cas plat, pour un domaine borné, il n'y a pas de formes harmoniques "tangentielles" [18] autres que zéro, c'est à dire $\Box \pi = 0$ et $\tau_n = (d\pi)_n = 0$ entraînent $\pi = 0$.

Démonstration:

cela résulte immédiatement de $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}(s)h = 0$ et de la formule (δ)

Pour un domaine borné tel que le 2ème tenseur fondamental du bord par rapport à la normale au bord définit une forme définie négative en tout point [18 p. 90], on peut déduire le théorème 1-V de la proposition 3.2 p. 133 (ii) de [18]

- Remarque sur le processus associé aux conditions frontières

$\frac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x)f(x) = \psi(x)$ où $R(x)$ est antisymétrique

La solution de

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta f = 0 \text{ dans } M \\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x) f(x) = \psi(x) \qquad \text{au bord} \\ f(x) = f(r_o(x)) \end{cases}$$

est [15,2]

$$f(x) = E_x \left[\int_0^{+\infty} \exp\left(* \int_0^s R(X_u^+)\tau(du)\right) . \psi(X_s^+)\tau(ds) \right]$$

où $Z_s = \exp(* \int_0^s R(X_u^+)\tau(du))$ est solution de l'équation différentielle matricielle.

$$d Z_s = Z_s R(X_s^+)\tau(ds) \quad \text{et} \quad Z_0 = id$$

$R(X_s^+)$ est antisymétrique $(R + R^* = 0)$ entraîne que $Z_s Z_s^* = id$

en effet

$$Z_s d Z_s^* + d Z_s \quad Z_s^* = (Z_s R^*(X_s^+) Z_s^* + Z_s R(X_s^+) Z_s^*) \tau(ds) = 0$$

donc Z_s est une matrice orthogonale ; si $\psi(X_s^+) = \psi(r_o(X_s^+))$

alors, $Z_s \cdot \psi(r_o(X_s^+)) = \psi(Z_s^{-1} \cdot r_{o,s}) = \psi(r_s^+)$ où on a posé $r_s^+ = r_o(X_s^+) \circ Z_s^{-1}$

La solution de (2) est alors

$$f(r) = E_r \left[\int_o^{+\infty} \psi(r_s^+) \tau(ds) \right]$$

et la projection $p(r_s^+) = X_s^+$.

2. - Cas d'une variété plate - Le semi-groupe associé aux conditions frontières

$$p(r) f(r) - Q(r) df(r)(\text{rel } n) = 0$$

THÉORÈME 2.V

$$P_t^+ f(r) = E_r [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] \qquad \text{où} \qquad r_s^+ = (X_s^+ , g)$$

$$\text{si} \qquad r = (x , g)$$

Démonstration :

Comme $\mathcal{A}(r_t^+)$ ne varie que sur le bord , pour un point x à l'intérieur de M et r un repère au dessus de x,
on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{E_r [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] - f(r)}{t} = \Lambda f(r)$$

il suffit de vérifier (1) $P(r) P_t^+ f(r) = 0$ et

(2) $$Q(r) d(P_t^+ f)(r)(\text{rel } n) = 0$$

(1) résulte de $$\mathcal{A}(X_s^+) \circ P(X_s^+) = 0$$

Pour (2), on utilise le lemme 2 bis III, n° 1 ,

$$E_{d\nu (p(r)) \circ r} [\mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+)] = P_t^+ f(r) .$$

3. - La forme multiplicative de $\mathcal{Z}(s)$

- Obtention à partir du système intégral (T')

Dans [2], on a montré que

$$\mathcal{Z}(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{Z}_\varepsilon(s) \quad \text{où} \quad \mathcal{Z}_\varepsilon(s) \text{ est définie par}$$

$$\frac{d\mathcal{Z}_\varepsilon(s)}{d\tau(s)} = -\frac{P(X_s^+)}{\varepsilon}\, \mathcal{Z}_\varepsilon(s)$$

est solution du système intégral (T')

$$(T') \qquad \begin{cases} \mathcal{Z}(s) = \mathcal{Z}(0)Q_o - \int_o^{r(s)} \mathcal{Z}(u)dO_u\, P\, O^{-1}_{r^{-1}(u)} \end{cases}$$

où $r(s) = \sup \{\text{supp } d\tau \cap [o,s[\ \}$

On a :

$$(T'') \qquad \mathcal{Z}(s) = \mathcal{Z}(o)\, Q_o - \sum_{T < j_k^+ < s} \Delta\, \mathcal{Z}(j_k^+)$$

c'est à dire que le problème (1) correspond à un problème de Dirichlet qui s'étale dans le temps.

Par exemple $P(x)$ étant la projection sur la normale au point x, et $Q(x)$ la projection sur le plan tangent au bord, au point x, faire opérer $\mathcal{Z}(s)$ sur un vecteur $\vec{V}$, revient à promener ce vecteur parallèlement le long de la trajectoire du processus réfléchi et à "tuer" sa composante normale à chaque fois que le processus touche le bord.

Si on "discrétise" le temps, $\mathcal{Z}(s)$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{Z}(s) = Q_T\, Q_{T_1} \ldots Q_{T_n} \quad \text{pour} \quad T_n < s \leqq T_{n+1}$$

où $T, T_1, \ldots, T_n$ sont les temps consécutifs où le processus X_s^+ touche le bord.

Ceci conduit à chercher une expression de $\mathcal{Z}(s)$ sous la forme de limite de produits.

Nous utiliserons les remarques suivantes sur le temps local.

Soit $R(\omega) = \text{supp } d\tau(\omega)$, le complémentaire de $R(\omega)$ est réunion dénombrable d'inter-

valles contigus disjoints $R(\omega)^e = \bigcup_k J_k$

D'après [9,17], $R(\omega)$ est de dimension de Hausdorff 1/2 et pour presque toute trajectoire ω dans Ω, la mesure 1/2-dimensionnelle de Hausdorff de $R(\omega)$ est nulle :

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} R(\omega) = 0 \qquad dP(\omega) \text{ p.s}$$

Pour toute suite (δ_p) qui tend vers 0, il existe un recouvrement fini de $R(\omega) \cap [\,0,s]$ par des ensembles de longueur inférieure à δ_p

$$R(\omega) \cap [\,0,s\,] = \bigcup_n A_n^{\delta_p}$$

et tels que $$\lim_{\delta_p \to 0} \sum |A_n^{\delta_p}|^{\frac{1}{2}} = 0$$

On peut supposer les ensembles du recouvrement $B_{\delta_p} = \bigcup_n A_n^{\delta_p}$ contigus et les recouvrements B_{δ_p} emboîtés

En effet B_{δ_p} étant construit, on construit $B_{\delta_{p+1}}$ en prenant des recouvrements de $A_n^{\delta_p}$ pour tout n.

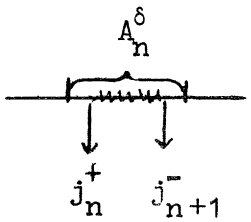
On appellera une telle famille de recouvrements B_{δ_p}, une famille adaptée à la suite (δ_p).

Soit T le premier temps de sortie du processus X_s^+ de la variété M

Pour un recouvrement B_δ, on pose

$$j_n^+ = \inf \{ \text{supp } d\tau \cap A_n^\delta \}$$

$$j_{n+1}^- = \sup \{ \text{supp } d\tau \cap A_n^\delta \}$$



alors (j_n^-, j_n^+) est un des contigus constituant la réunion $\bigcup_n J_n = R(\omega)^c$ soit $E[\delta,s]$ l'ensemble des intervalles J_n associés au recouvrement $B_\delta(\omega)$ comme ci dessus et tels que $J_n \subset [\,T,s]$.

On ordonne les ensembles J_n qui appartiennent à $E[\delta,s]$ en ordre croissant et on forme le produit fini

$$\mathcal{A}_\delta = Q(X_T)\, Q(X_{j_1^+}) \ldots Q(X_{j_r^+})(\omega)$$

$$= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta,s)(\omega)} Q(X_{j^+}) \quad \text{où} \quad j^+ = \sup J$$

LEMME 1 . V.

Soit δ_p une suite qui tend vers zéro et (B_{δ_p}) une famille de recouvrements adaptés à (δ_p) alors $\|\mathcal{A}_{\delta_p}(s)\|$ décroit quand δ_p tend vers zéro

Démonstration :

$$\|Q_1 Q_2 \ldots Q_n\| \leqq \|Q_1 Q' Q_2 \ldots Q_n\|$$

Lorsque $Q_1, Q', \ldots Q_n$ sont des projecteurs.

Remarque

on pose $$\tilde{Q}_j = Q(X_{j^-})\, Q(X_{j^+})$$

et on considère le produit

$$\tilde{\mathcal{A}}_\delta = Q(X_T)\, \tilde{Q}_{j_1} \ldots \tilde{Q}_{j_r} \quad \text{où} \quad (j_i^-, j_i^+) \in E[\delta, s]$$

$$= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta,s)} \tilde{Q}_j$$

Si $\lim_{\delta_p \to 0} \mathcal{A}_{\delta_p}$ existe, alors $\lim_{\delta_p \to 0} \tilde{\mathcal{A}}_{\delta_p}$ existe et la limite est la même. En effet, si on fixe j^-, il existe une suite j_m^+ qui tend en croissant vers j^- et $Q(X_{j_m^+})$ tend vers $Q(X_{j^-})$

Ainsi

$$\lim_{m \to +\infty} Q(X_{j_m^+})\, Q(X_{j^-}) = \lim_{m \to +\infty} Q(X_{j_m^+})$$

THÉORÈME 3 - V.

Pour toute suite (δ_p) qui tend vers zéro et tout recouvrement B_{δ_p} adapté, on approche la solution du système (T') par $\lim_{\delta_p \to 0} \mathcal{A}_{\delta_p}(s)$.

Démonstration :

Soit δ et l'ensemble des contigus J de $E[\delta, s]$

on les ordonne :

Si s est tel que $s = r(s)$ le système (T) s'écrit

$$\begin{cases} Y_1(s) = 0 \\ Y_2(s) - Y_2(0) = \int_0^s Y_u \, O_u^{-1} \, dO_u \cdot Q = \int_0^s Z_u \, dO_u \cdot Q \end{cases}$$

avec $Y_u \, O_u^{-1} = Z_u$

On a :

$$Y_2(s) - Y_2(0) = \int_0^T Z_u \, dO_u \cdot Q + \int_T^s Z_u \, dO_u \cdot Q$$

$$= Z_T (O_T - O_o) Q + \int_T^s Z_u \, dO_u \cdot Q$$

or

$$Y_2(0) = Z_T \, O_o \, Q$$

$$Y_2(s) = Z_T \, O_T \, Q + \int_T^s Z_u \, dO_u \cdot Q$$

comme $s = r(s)$; $Z_s = Y_2(s) \cdot O_s^{-1}$

donc $$Z_s = Z_T \, Q_T + \left(\int_T^s Z_u \, dO_u \cdot Q \right) O_s^{-1}$$

$$+ Z_T \, O_T \, Q \, (O_s^{-1} - O_T^{-1})$$

Si $j_{k-1}^+ < s \leqq j_k^-$

$$Y_2(s) = Y_2(j_{k-1}^+) + \int_{j_{k-1}^+}^s Z_u \, dO_u \cdot Q$$

posons :

$$h(j_{k-1}^+, s) = \left(\int_{j_{k-1}^+}^s Z_u \, dO_u \cdot Q \right) O_s^{-1} + Z_{j_{k-1}^+} \, O_{j_{k-1}^+} \, Q (O_s^{-1} - O_{j_{k-1}^+}^{-1})$$

Alors

(4) $$Z_s = Z_{(j^+_{k-1})}\, Q_{+}_{j^+_{k-1}}\, h(j^+_{k-1}, s)$$

or $$Z_{j^+_{k-1}} = Z_{j^-_{k-1}}$$

En remplaçant $Z_{j^-_{k-1}}$ par sa valeur dans (4), on obtient

$$Z_s = Z_T\, Q_T\, Q_j + \ldots Q_{j^+_{k-1}} + h(T, j^-_1)\, Q_{j^+_1} \ldots Q_{j^+_{k-1}} + \ldots$$

$$+ h(j^+_1, j^-_2)\, Q_{j^+_2} \ldots Q_{j^+_{k-1}} + \ldots + h(j^+_{k-1}, s)$$

Donc

$$E\left[\, |\mathcal{Z}(s) - \mathcal{Z}_\delta(s)| \,\right] \leq E\left[\sum_{j^-_p(\omega) \leq s} |h(j^+_p, j^-_{p+1})| \right]$$

Or $$E\left[\, |h(s,t)| \,\right] \leq E\left[\, |h(s,t)|^2 \,\right]^{\frac{1}{2}} \leq C(t-s)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout s et tout t, où C est constante, d'après l'inégalité de Cameron-Martin.

et $$R_\delta = \sum_{j^-(\omega) \leq s} (j^-_{p+1} - j^+_p)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

quand $\delta \to o$

d'après [17]

LEMME 2 - V.

Le processus $\mathcal{Z}(s)$ n'est pas à variation bornée

Démonstration :

Pour tout ω, et δ, considérons la mesure $d\mathcal{Z}_\delta(s)$: $d\mathcal{Z}_\delta(s)$ est une somme finie de mesures de Dirac

En effet

$$\mathcal{Z}_\delta(s) = Q(X_T)\, Q(X_{j^+_1}) \ldots Q(X_{j^+_2})$$

si $$j^+_2 < s \leq j^+_{2+1}$$

et $$\delta = (j^+_1, \ldots j^+_k, \ldots$$

donc $$\int \varphi(s)\, d\mathcal{Z}_\delta(s) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(j^+_{k-1}) \left[\, \mathcal{Z}_\delta(j^+_k) - \mathcal{Z}_\delta(j^+_{k-1}) \,\right]$$

$$\int \varphi(s)d\mathcal{L}_\delta(s) = \sum_k \varphi(j^+_{k-1})\mathcal{L}_\delta(j^+_{k-1})P(j^+_k).$$

$$= \sum_k \varphi\,(j^+_{k-1})\mathcal{L}_\delta(j^+_{k-1})\,[\,Q(j^+_{k-1}) - Q(j^+_k)\,]$$

Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et une fonction $\varphi(s)$ tel que $\| \int \varphi(s)\, d\mathcal{L}_\delta(s) \| \geq \varepsilon$.

on pose $Q_\delta(s) = Q(j^+_k)$ si $j^+_{k-1} < s \leq j^+_k$

il suffit de trouver Ψ tel que $\| \int \Psi(s)\, dQ_\delta(s) \| > \varepsilon$ puis on prendra $\varphi(s) = \Psi(s)$

Soit φ tel que

$$\| \int \varphi(s)\, dQ_\delta(s) \| = \sum_k \| Q_\delta(j^+_k) - Q_\delta(j^+_{k-1}) \|$$

or $$E\,(\| Q_\delta(j^+_k) - Q_\delta(j^+_{k-1}) \|^2) \sim C\,E\,[(j^+_k - j^+_{k-1})$$

$$|j^-_k - j^+_{k-1}|^{\frac{1}{2}} \leq |j^+_k - j^+_{k-1}|^{\frac{1}{2}} \leq |j^+_k - j^-_k|^{\frac{1}{2}} + |j^-_k - j^+_{k-1}|^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_k |j^+_k - j^-_k|^{\frac{1}{2}} \to 0$$

mais $$\sum_k |j^-_k - j^+_{k-1}|^{\frac{1}{2}} \to +\infty.$$

les sauts du processus suivent une loi de Poisson, $\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$ diverge [11, p. 90]

Donc la suite des mesures $d\mathcal{L}_\delta$ n'est pas vaguement bornée. On en conclut que $d\mathcal{L}$ n'est pas une mesure. L'expression (35') de la différentielle stochastique de $\mathcal{L}$ où le brownien intervient justifie le Lemme 2 - V.

<u>Détermination de $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}_\varepsilon(s)$ dans les cas particuliers du $\frac{1}{2}$-plan et d'un polygône.</u>

<u>cas du $\frac{1}{2}$-plan</u>

Soit T le premier temps de sortie du $\frac{1}{2}$-plan

si $s < T$, on pose $\mathcal{L}(s) = I$

si $s \geq T$, on pose $\mathcal{L}(s) = Q(r_T)$

le problème $\wedge \Phi = 0$ avec les données au bord $n\Phi$ et $nd\Phi$ se traduit de la façon suivante :

trouver n fonctions harmoniques $P_1, P_2, \ldots P_n$ telle que pour P_n correspondant à la composante normale, on ait un problème de Dirichlet au bord et pour $P_1, \ldots, P_{n-1}$ on ait au bord une donnée de Neumann.

Dans ce cas, la solution (A) se décompose de la façon suivante

$$-f(r) = \lim_{\epsilon \to o} E_r\Big[\int_o^{+\infty} \exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) \cdot \frac{P}{\epsilon} \varphi(r_s^+) \tau(ds) \Big]$$

$$+ \lim_{\epsilon \to o} E_r\Big[\int_o^{+\infty} \exp * \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) \varphi(r_s^+) \tau(ds) \Big]$$

Comme $P(r)$ est une matrice constante qui est la projection sur la normale au bord et $Q(r) = I - P(r)$ est la projection sur le bord, le premier terme est

$-E_r(\varphi_n(X_T))$ où T est le premier temps de sortie du $\frac{1}{2}$-plan et le deuxième terme est

$$E_r\Big[\int_o^{+\infty} \varphi_t(X_s^+) \tau(ds) \Big] \quad \text{où} \quad \varphi_n = f_\theta(r)$$

$$\varphi_t = - df_\theta(r)(\text{rel } n)$$

Cas d'un polygône

La matrice $P(r)$ est constante par morceaux.

Soit T le premier temps de sortie du polygône, T_1 le premier temps où le processus change de coté, T_2 le deuxième temps où il change de côté, $T_3 \ldots$

Pour $T \leq s < T_1$

$$\exp\Big[* \int_{[o,s]} - \frac{P}{\epsilon}(r_u^+) \tau(du) \Big] \varphi(r_s^+) = \exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon} \cdot \varphi_n(r_s^+) + \varphi_t(r_s^+)$$

$$= \Big[\exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon} P(r_s^+) + Q(r_s^+) \Big] \varphi(r_s)$$

où $Q(r_s^+) = I - P(r_s^+)$

Pour $T_1 \leq s < T_2$

$$\exp^*\int_{[o,s]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du).\varphi(r_s^+) = \exp^* \int_{[o,T_1]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du).\exp^* \int_{[T_1,s]} -\frac{P}{\epsilon}(r_u^+)\tau(du)\varphi(r_s^+)$$

$$= [\ \exp - \frac{\tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_T^+) + Q(r_T^+)\ ] \circ [\ \exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_{T_1}) + Q(r_{T_1})\ ]$$

Pour $T_n \leq s < T_{n+1}$, on a :

$$\exp^* \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon}\ \tau\ (du) =$$

$$[\ \exp - \frac{\tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_T^+) + Q(r_T^+)\ ] \ldots [\ \exp - \frac{\tau(s)-\tau(T_n)}{\epsilon} P(r_{T_n}) + Q(r_{T_n})\ ]$$

$$= \prod_{1\leq k\leq n} R(T_k) \quad \text{où} \quad R(T_k) = \exp - \frac{\tau(T_{k+1})-\tau(T_k)}{\epsilon} P(r_{T_k}) + Q(r_{T_k})$$

(A) se décompose en somme de deux termes, comme $T, T_1, \ldots T_n$ sont des points de croissance du temps local, on a pour le deuxième terme, si $T_n \leq s < T_{n+1}$

$$\mathcal{A}(r_s^+) = \lim_{\epsilon \to o} \exp^* \int_{[o,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon}\ \tau\ (du) = Q(r_T^+) \ldots Q(r_{T_n}^+)$$

Pour le premier terme, cela revient à calculer $d\mathcal{A}(r_s^+)$

Posons $$A_i = \exp - \frac{(\tau(T_{i+1})-\tau(T_i))}{\epsilon}.P(r_{T_i}^+) \quad \text{et} \quad B_i = Q(r_{T_i}^+)$$

pour $T_n \leq s < T_{n+1}$, $\prod_{1\leq k\leq n} R(T_k) = \sum_{A,B} \alpha_1 \circ \alpha_2 \ldots \circ \alpha_n$ où $\alpha_i = A_i$ ou B_i

les termes de la forme

$$\alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1} \circ Q(r_{T_n}^+) \frac{P(r_s^+)}{\epsilon} \varphi(r_s^+) = 0.$$

et les termes de la forme

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} \alpha_1 \circ \ldots \circ A_j \circ \alpha_{j+1} \ldots \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_n)}{\epsilon} P(r^+_{T_n}) . \frac{P(r^+_s)}{\epsilon} \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)$$

tendent vers 0 quand $\epsilon \to 0$

donc il reste seulement le terme

$$\lim_{\epsilon \to o} \int_{T_n}^{T_{n+1}} Q(r^+_T) \ldots Q(r^+_{T_{n-1}}) \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_n)}{\epsilon} . \frac{P(r^+_s)}{\epsilon} \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)$$

$$= - Q(r^+_T) \ldots Q(r^+_{T_{n-1}}) P(r^+_{T_n}) \varphi(r^+_{T_n})$$

et la solution (A) est

$$(B) \qquad - \sum_n E_r [Q(r^+_T) \ldots Q(r^+_{T_{n-1}}) P(r^+_{T_n}) . \varphi(r^+_{T_n})] + E_r [\int_o^{+\infty} \mathcal{Q}(r^+_s) \varphi(r^+_s)\, \tau(ds)]$$

pour $\qquad T_n \leq s < T_{n+1}$, $\mathcal{Q}(r_s) = Q(r^+_T) \ldots Q(r^+_{T_n})$

$\mathcal{Q}(r_s)$ est une fonctionnelle à sauts, calculons

$$\int d\mathcal{Q}(r_s) . A_s = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{Q}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{Q}(r_{T_n})] . A_{T_n}$$

or $\qquad \mathcal{Q}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{Q}(r_{T_n}) = \mathcal{Q}(r_{T_n}) [Q(r^+_{T_{n+1}}) - I] = - \mathcal{Q}(r_{T_n}) P(r^+_{T_n})$

et (B) s'écrit

$$E_r [\int_o^{+\infty} d\mathcal{Q}(r^+_s) \varphi(r^+_s)] + E_r [\int_o^{+\infty} \mathcal{Q}(r_s) \varphi(r_s)\, \tau(ds)] .$$

c'est l'expression (δ) § V -1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AIRAULT - Résolution stochastique d'un problème de Dirichlet - Neumann pour des fonctions à valeurs vectorielles : Comptes Rend. Acad. Sc. Paris t. 280. (24 Mars 1975) Serie A. p. 781 - 784

[2] H. AIRAULT - Pertubations singulières et solutions stochastiques de problèmes de D. Neumann-Spencer à paraître. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (fin 1975)

[3] R.H. CAMERON and W.T. MARTIN - Transformations of Wiener Integrals under Translations A.M. 45 386 - 396.(1944)

[4] P.E. CONNER - The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,40 (1954) p. 1151 - 1155.

[5] J.L. DOOB - Probability methods applied to the first boundary value problem. Proc. 3 rd. Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. II, 49 - 80 Univ. Calif. Press (1956)

[6] J.G. GALLAVOTTI and H.P. McKEAN - Boundary conditions for the heat equation in a Several dimensional region

[7] J. IBERO - Calcul différentiel stochastique intrinsèque sur un groupe de Lie C.R. Acad. Sc. Paris t. 280, 6janvier (1975) série A p.13 à p. 16.

[8] N. IKEDA - On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its applications to boundary value problems, Mem, Coll. Sci. Univ. Kyoto serie 33 (367 - 427) (1961) .

[9] K. ITO and H.P. Jr. McKEAN - Diffusion processes and their sample paths. Acad. Press New York.(1964).

[10] M. KAC. - On the distribution of certain Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 65 (1949) pp. 1-13.

[11] J.P. KAHANE - Random measures and random sets in harmonic Analysis , Advances in Probability Marcel Dekker 1971.

[12] P. MALLIAVIN - Formules de la moyenne. Calcul de perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques. Jour.of Funct. Anal. 17 (274 - 291) (1974) .

[13] P.A. MEYER - Intégrales Stochastiques (4 exposés) Séminaire de probabilités 1 (Stasbourg) lectures Notes in Math. 39 (1967) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

[14] J. MUNKRES - Elementary differential Topology lectures given at Massassuchetts Institute of Technology (Fall 1961) .

[15] K. SATO and T. UENO - Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. t.4, 1965 p. 529 - 605

[16] D.C. SPENCER - Les opérateurs de Green et Neumann sur les variétés ouvertes riemanniennes et Hermitiennes. (Conférences données au Collège de France) Février 1955.

[17] S.J. TAYLOR - The α - dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51 (1955) p. 265 . 274.

[18] K. YANO - Integral formulas in Riemannian geometry. Marcel Dekker 1970.

[19] G. DE RHAM - Varietes différentiables. Hermann (1960).