

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DAVID BRÉZIS

Classes d'interpolation associées à un opérateur maximal monotone

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1974), exp. n° 2, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974__1_A2_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSES D'INTERPOLATION ASSOCIÉES
A UN OPERATEUR MAXIMAL MONOTONE

par David BRÉZIS.

INTRODUCTION. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et soit A un opérateur linéaire non borné dans H de domaine $D(A)$ dense dans H . On suppose que $-A$ engendre un semi-groupe continu de contractions $S(t)$. On sait (Cf. Lions-Peetre [1], p. 52) que les espaces de moyenne entre $D(A)$ et H peuvent se définir à l'aide de $S(t)$. Ainsi avec les notations de Lions-Peetre

$$S(p, 1-\alpha, D(A) ; p, -\alpha, H) = \{x \in H \text{ t.q. } \frac{|x-S(t)x|}{t^\alpha} \in L_*^p(\mathbb{R}_+)\}$$

où
$$L_*^p(\mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R}_+ ; \frac{dt}{t})$$

On vérifie aisément que $S(t)$ peut être remplacé dans cette égalité par

$$\mathcal{J}_t = (I+tA)^{-1}$$

(utiliser l'inégalité $|x-S(t)x| \leq 3|x-\mathcal{J}_t x|$ $\forall t \geq 0$, $\forall x \in H$ et la représentation de $\mathcal{J}_t$ sous la forme

$$\frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{t}} S(\tau) d\tau$$

Nous nous proposons dans ce travail d'étendre cette construction à certains opérateurs non linéaires. A cet effet, nous nous référerons à la théorie des opérateurs maximaux monotones et des semi-groupes non linéaires de contractions.

Rappelons qu'un opérateur maximal monotone A est une application (multivoque) de H dans H vérifiant

$$(i) \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2 \quad (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

$$(ii) \quad R(I+\lambda A) = H \quad \forall \lambda > 0$$

Nous utiliserons les notations habituelles (Cf. H. Brézis [1])

$$D(A) = \{x \text{ t.q. } Ax \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{J}_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} \quad (\lambda > 0) \text{ résolvante de } A \text{ qui est une contraction de } H \text{ dans } H$$

$$A_\lambda = \frac{I-\mathcal{J}_\lambda}{\lambda} \text{ régularisée Yosida de } A$$

A^0x élément de norme minimale de Ax .

On sait que $-A$ engendre un semi-groupe de contractions $S(t)$ sur $\overline{D(A)}$ au sens suivant : pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe $u(t)$ solution de

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0 \quad \text{p.p sur } \mathbb{R}_+$$

$$u(0) = u_0$$

L'application $u_0 \rightarrow u(t)$ prolongée par continuité à $\overline{D(A)}$ constitue un semi-groupe de contractions noté $S(t)$.

De plus si $u_0 \in D(A)$ $|u_0 - J_t u_0| \leq Ct$ (resp. $|u_0 - S(t)u_0| \leq Ct$) et si $u_0 \in \overline{D(A)}$ $J_t u_0 \rightarrow u_0$ (resp. $S(t)u_0 \rightarrow u_0$) dans H lorsque $t \rightarrow 0$.

Nous introduirons des classes intermédiaires entre $D(A)$ et $\overline{D(A)}$ qui mesurent en quelque sorte la "rapidité" avec laquelle $J_t u_0$ (resp. $S(t)u_0$) tend vers u_0 lorsque $t \rightarrow 0$.

Pour $0 < \alpha < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} = \{u_0 \in \overline{D(A)} \text{ t.q. } \frac{|u_0 - J_t u_0|}{t^\alpha} \in L_*^p(0,1)^{(1)}\}.$$

Remarque : On vérifie aisément les inclusions suivantes :

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} \subset \mathcal{B}_{\alpha,q} \quad \text{pour } p \leq q$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,p} \subset \mathcal{B}_{\alpha',q} \quad \text{pour } \alpha > \alpha', \quad p \text{ et } q \text{ quelconques.}$$

L'objet principal de cet exposé consiste à établir diverses caractérisations de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$. Dans une première partie, nous obtenons des caractérisations de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ pour A maximal monotone quelconque. Nous retrouvons en particulier certaines caractérisations qui sont bien connues dans le cas linéaire : caractérisation par la méthode des traces, par la méthode des sommes, par la méthode de $\mathcal{H}$ (Cf. Lions-Peetre [1]). Nous montrons de plus que l'on peut remplacer J_t par $S(t)$ dans la définition de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$. Contrairement au cas linéaire, la démonstration de ce résultat est difficile.

Dans une deuxième partie, nous supposons que le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-A$ a un effet régularisant (i.e. $S(t)$ applique $\overline{D(A)}$ dans $D(A)$ pour $t > 0$

⁽¹⁾ Dans le cas linéaire, pour tout $u_0 \in H$, $|J_t u_0| \leq |u_0| \quad \forall t \geq 0$ et par suite $\frac{|u_0 - J_t u_0|}{t^\alpha} \in L_*^p(1,+\infty)$. Par contre dans le cas non linéaire $J_t u_0$ ne reste pas nécessairement borné. Il convient alors de travailler sur $]0,1[$ au lieu de $\mathbb{R}_+$ puisque de toute manière seul le comportement au voisinage de $t = 0$ intervient.

avec $|A^\circ S(t)u_0| \leq C(|A^\circ v| + \frac{1}{t} |u_0 - v|) \quad \forall v \in D(A), \quad \forall t > 0$, ce qui correspond dans le cas linéaire à la classe des semi groupes analytiques. On obtient alors une caractérisation de $\mathcal{G}_{\alpha,p}$ à l'aide de $\frac{d^+}{dt} S(t)u_0$ ainsi qu'une caractérisation à l'aide des dérivées fractionnaires de la fonction $t \rightarrow S(t)u_0$ qui paraît nouvelle même pour le cas linéaire.

Enfin dans une troisième partie, nous considérons une classe encore plus restreinte d'opérateurs en prenant A de la forme $\partial\varphi$ ($\partial\varphi$ sous-différentiel d'une fonction φ convexe, sci. propre), ce qui équivaut dans le cas linéaire à supposer A auto-adjoint (Cf. H. Brézis [1] Prop. 2.15). Nous établissons alors des caractérisations de $\mathcal{G}_{\alpha,p}$ qui font intervenir le comportement au voisinage de $t = 0$ des expressions $\varphi(\mathcal{I}_t u_0)$ et $\varphi(S(t)u_0)$..

Cette théorie abstraite permet d'établir un lien entre un problème de perturbations singulières et un problème d'évolution avec défaut d'ajustement. Ainsi par exemple si $H = L^2(\Omega)$ et $A = \Delta + \beta$ avec β fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap D(\beta)$ ($D(\beta) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \beta(u) \in L^2(\Omega)\}$) la rapidité de la convergence de u_ε vers u_0 (pour $u_0 \in L^2(\Omega)$) est comparable à celle de la convergence de $u(\frac{t}{\varepsilon})$ vers u_0 , où u_ε est la solution du problème de perturbations singulières

$$\varepsilon(-\Delta u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon)) + u_\varepsilon = u_0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et $u(t)$ est la solution du problème d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad .$$

§ 1. Caractérisation de $\mathcal{G}_{\alpha,p}$ pour A maximal monotone quelconque.

On utilise dans la suite le lemme suivant :

LEMME 1. Soit $u_0 \in \overline{D(A)}$. La fonction $t \rightarrow \mathcal{J}_t u_0$ est lipschitzienne sur $]0, +\infty[$, en particulier dérivable p.p. sur $]0, +\infty[$.

De plus on a :

$$\left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_t u_0 \right| \leq |A_t u_0| \leq \frac{1}{t} |u_0 - v| + |A^\circ v| \quad \text{p.p. sur }]0, +\infty[, \quad \forall v \in D(A).$$

Démonstration : On pose $u_t = \mathcal{J}_t u_0$. En multipliant l'égalité

$$u_{t+h} - u_t + t(A_{t+h} u_0 - A_t u_0) = -h A_{t+h} u_0 \quad (h > 0)$$

par $u_{t+h} - u_t$ et en utilisant la monotonie de A , il vient :

$$\frac{|u_{t+h} - u_t|}{h} \leq |A_{t+h} u_0| \leq |A_t u_0| \quad (\text{utiliser la décroissance de } t \rightarrow |A_t u_0|)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_t u_0 \right| &\leq |A_t u_0| \leq |A_t u_0 - A_t v| + |A_t v| \\ &\leq \frac{1}{t} |u_0 - v| + |A^\circ v| \quad \text{p.p. sur }]0, +\infty[, \quad \forall v \in D(A). \end{aligned}$$

THEOREME 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $u_0 \in \mathcal{G}_{\alpha,p}$
- (ii) $t^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_t u_0 \right| \in L^p_\star(0,1)$

Démonstration : On déduit du Lemme 1 :

$$t^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_t u_0 \right| \leq t^{1-\alpha} |A_t u_0| = \left| \frac{u_0 - \mathcal{J}_t u_0}{t^\alpha} \right|, \quad \text{d'où } (i) \Rightarrow (ii)$$

Pour démontrer $(ii) \Rightarrow (i)$, on utilise le lemme suivant :

LEMME 2 (Lemme de Hardy)

Soit $\psi(\tau)$ une fonction positive sur $]0,1[$, mesurable pour la mesure $\frac{d\tau}{\tau}$

Pour $\gamma > 0$ et $1 \leq r \leq +\infty$, on a :

$$\left| t^{-\gamma} \int_0^t \psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right|_{L_*^r(0,1)} \leq \frac{1}{\gamma} \left| \tau^{-\gamma} \psi(\tau) \right|_{L_*^r(0,1)}$$

Appliquons ce lemme avec $\gamma = \alpha$, $r = p$ et $\psi(\tau) = \tau \left| \frac{d}{dt} \mathfrak{I}_\tau u_0 \right|$

Il vient :

$$\left| t^{-\alpha} \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathfrak{I}_\tau u_0 \right| d\tau \right|_{L_*^p(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \left| \tau^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} \mathfrak{I}_\tau u_0 \right| \right|_{L_*^p(0,1)} < +\infty,$$

c'est-à-dire :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathfrak{I}_\tau u_0 \right| d\tau \in L_*^p(0,1)$$

Mais $\left| u_0 - \mathfrak{I}_t u_0 \right| \leq \int_0^t \left| \frac{d}{dt} \mathfrak{I}_\tau u_0 \right| d\tau$, d'où $\frac{|u_0 - \mathfrak{I}_t u_0|}{t} \in L_*^p(0,1)$

THÉOREME 2 (Méthode des traces). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $\mathfrak{I}v(t)$, v absolument continue sur $]0,1[$, continue sur $[0,1]$ avec
 $v(0) = u_0$ telle que $v(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0,1[$,

$$t^{1-\alpha} |A^\circ v(t)| \in L_*^p(0,1)$$

$$t^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} v(t) \right| \in L_*^p(0,1)$$

Démonstration :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Choisir $v(t) = \mathfrak{I}_t u_0$ en remarquant que $|A^\circ \mathfrak{I}_t u_0| \leq \frac{|u_0 - \mathfrak{I}_t u_0|}{t}$
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Appliquer l'inégalité du Lemme 1 avec $v = v(t)$ et le Lemme 2.

THÉOREME 2' (Méthode des sommes). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $\mathfrak{I}v_1, v_2$ mesurables sur $]0,1[$, $u_0 = v_1(t) + v_2(t)$ p.p. sur $]0,1[$
telles que $v_1(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0,1[$,

$$t^{1-\alpha} |A^\circ v_1(t)| \in L_*^p(0,1)$$

$$t^{-\alpha} |v_2(t)| \in L_*^p(0,1)$$

Démonstration :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Il suffit de choisir $v_1(t) = \mathcal{J}_t u_0$
(ii) $\Rightarrow$ (i) Il suffit de prendre $v = v_1(t)$ dans l'inégalité du Lemme 1.

On déduit de ce résultat le théorème suivant d'interpolation :

COROLLAIRE 1 : Etant donné deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 , de normes respectives $|||_1$ et $|||_2$, on considère A_1 et A_2 opérateurs maximaux monotones respectivement sur H_1 et H_2 . Soit T une application localement lipschitzienne de $D(A_1)$ dans $D(A_2)$ envoyant $D(A_1)$ dans $D(A_2)$ et telle que

$$|A_2^\circ T x|_2 \leq C |A_1^\circ x|_1 + \omega(|x|_1) \quad \forall x \in D(A_1),$$

ω fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors T applique $\mathcal{B}_{\alpha,p}(A_1)$ dans $\mathcal{B}_{\alpha,p}(A_2)$.

Remarque : En prenant $H_1 = H_2$, $A_1 = A_2$, $T = S(t)$ avec $t \geq 0$ fixé, on déduit du corollaire 1 que $S(t)$ applique $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ dans $\mathcal{B}_{\alpha,p}$.

THÉORÈME 3 (méthode $\mathcal{K}$) . Soit $u_0 \in \overline{D(A)}$. On pose

$$\mathcal{K}(t, u_0) = \inf_{v \in D(A)} (|u_0 - v| + t |A^\circ v|)$$

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
(ii) $t^{-\alpha} \mathcal{K}(t, u_0) \in L_*^p(0, 1)$.

Démonstration : On vérifie aisément les inégalités

$$t^{1-\alpha} \left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}_t u_0 \right| \leq t^{-\alpha} \mathcal{K}(t, u_0) \leq 2 \frac{|u_0 - \mathcal{J}_t u_0|}{t^\alpha} \quad \forall t > 0.$$

Le résultat fondamental qui suit établit l'équivalence entre la caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ par la résolvante et par le semi-groupe.

THÉORÈME 4. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
(ii) $\frac{|u_0 - S(t)u_0|}{t^\alpha} \in L_*^p(0, 1)$

avec

$$\left(\int_0^1 \frac{|u_0 - \mathcal{J}_t u_0|^p}{t^{\alpha p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq 6 \left(\int_0^1 \frac{|u_0 - S(t)u_0|^p}{t^{\alpha p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) résulte immédiatement du

LEMME 3 . On a

$$|u_0 - S(t)u_0| \leq 3|u_0 - J_t u_0| \quad \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \quad \forall t \geq 0 .$$

Démonstration du Lemme

$$\begin{aligned} |u_0 - S(t)u_0| &\leq 2|u_0 - v| + |v - S(t)v| \\ &\leq 2|u_0 - v| + t|A^\circ v| \quad \forall v \in D(A) . \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $v = J_t u_0$.

La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) est difficile. Nous ne l'indiquons que dans le cas $p = +\infty$. Soit $\delta(\varepsilon)$ le module de continuité de $S(t)u_0$ en $t = 0$, c'est-à-dire $|S(t)u_0 - u_0| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq \delta(\varepsilon)$. On sait (Cf. H. Brézis [1], Lemme 4.3) que $|J_t u_0 - u_0| \leq 2\varepsilon(1 + \frac{2t}{\delta(\varepsilon)}) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall t > 0$. En particulier, pour $0 \leq t \leq \delta(\varepsilon)$, il vient $|J_t u_0 - u_0| \leq 6\varepsilon$.

Mais d'après l'hypothèse $|u_0 - S(t)u_0| \leq Ct^\alpha \quad \forall t \in [0, 1]$. On peut donc choisir $\delta(\varepsilon) = (\frac{\varepsilon}{C})^{1/\alpha}$ et par conséquent $|u_0 - J_t u_0| \leq 6Ct^\alpha \quad \forall t \in [0, 1]$.

§ 2. Caractérisation de $\mathfrak{B}_{\alpha, p}$ dans le cas d'un semi-groupe régularisant.

Soit A un opérateur maximal monotone sur H . On dit que $S(t)$ semi-groupe engendré par $-A$ est régularisant si $S(t)$ applique $\overline{D(A)}$ dans $D(A)$ $\forall t > 0$ avec

$$|A^\circ S(t)u_0| \leq C(|A^\circ v| + \frac{1}{t}|u_0 - v|) \quad \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \quad \forall v \in D(A), \quad \forall t > 0 .$$

Pour $u_0 \in \overline{D(A)}$, la fonction $t \rightarrow S(t)u_0$ est alors dérivable à droite $\forall t > 0$ avec $\frac{d^+}{dt} S(t)u_0 + A^\circ S(t)u_0 = 0$.

Remarque : De nombreux semi-groupes sont régularisants : les semi-groupes linéaires analytiques, les semi-groupes associés aux opérateurs sous-différentiels (Cf. H. Brézis [1], Th. 3.2), les semi-groupes associés aux opérateurs $A_{\frac{1}{2}}$ (pour la définition de $A_{\frac{1}{2}}$, Cf. Barbu [1], Brézis [2] ; pour la vérification de la propriété régularisante, Cf. D. Brézis, à paraître). Dans le cas d'un semi-groupe régularisant, on peut obtenir des caractérisations supplémentaires de $\mathfrak{B}_{\alpha, p}$ faisant notamment intervenir $\frac{d^+}{dt} S(t)u_0$.

THÉOREME 5 . Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $t^{1-\alpha} \left| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right| \in L_*^p(0,1)$

Démonstration : Par une démonstration analogue à celle du Théorème 1 où l'on remplace $\mathcal{J}_t$ par $S(t)$ - l'inégalité associée à l'effet régularisant correspondant à l'inégalité du Lemme 1 - on établit l'équivalence entre (ii) et

$$\frac{|u_0 - S(t)u_0|}{t^\alpha} \in L_*^p(0,1) .$$

On conclut alors à l'aide du Théorème 4.

Remarque : Dans le cas des semi-groupes linéaires analytiques, on retrouve l'égalité entre les espaces intermédiaires $X_{\alpha,1,p}$ et $X'_{\alpha,1,p}$ de normes respectives

$$|u_0|_{\alpha,1,p} = |u_0| + \left| \frac{|S(t)u_0 - u_0|}{t^\alpha} \right|_{L_*^p(0,+\infty)}$$

et

$$|u_0|'_{\alpha,1,p} = |u_0| + \left| t^{1-\alpha} \left| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right| \right|_{L_*^p(0,+\infty)}$$

(Cf. Butzer et Berens [1], p. 157).

THÉOREME 6 . Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant et soient α, p et q tels que $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{q}$, $1 < +\infty$, $q \leq p$. On a alors l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $\left(\frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 |S(t)u_0 - S(t-h)u_0|^q dt \right)^{1/q} \in L_*^p(0,1)$
- (iii) $\left(h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right|^q dt \right)^{1/q} \in L_*^p(0,1)$

Nous déduisons du résultat précédent appliqué avec $p = q$ une caractérisation de $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ au moyen des dérivées fractionnaires de $S(t)u_0$.

COROLLAIRE 2. Soit $S(t)$ un semi-groupe régularisant et soient α et p tels que $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$, $p < +\infty$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

$$(i) \quad u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$$

(ii) $S(t)u_0 \in W^{\alpha+1/p,p}(0,1)$ où $W^{\sigma,p}(0,1)$ ($0 < \sigma < 1$) désigne l'ensemble des fonctions mesurables $u :]0,1[\rightarrow H$ telles que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+\sigma p}} dx dy < +\infty$$

Remarque : La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) est encore vraie pour A maximal monotone quelconque. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) tombe par contre en défaut dans le cas général. On vérifie en effet que (ii) est équivalent à

$$\int_0^1 dt \int_0^{1-t} |S(t+h)u_0 - S(t)u_0|^p \frac{dh}{h^{2+\alpha p}} < +\infty$$

On en déduit l'existence d'une suite décroissante t_n convergeant vers 0 telle que

$$\int_0^{1-t_n} |S(h)S(t_n)u_0 - S(t_n)u_0|^p \frac{dh}{h^{2+\alpha p}} < +\infty$$

d'où $S(t_n)u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p} \quad \forall n$ et par conséquent

$$S(t)u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p} \quad \forall t > 0 \quad (\text{utiliser le corollaire 1})$$

Si l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) était vraie dans le cas général, on aurait par suite

$$u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p} \Rightarrow S(t)u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha+1/p,p} \quad \forall t > 0.$$

Il suffit alors de prendre comme contre-exemple le groupe des translations sur $L^2(\mathbb{R})$. On a en ce cas $\mathcal{B}_{s,2} = H^s(\mathbb{R})$ (Cf. Lions-Magenès [1], Th. 10.1). Il en résulte que les translations appliqueraient $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^{s+1/2}(\mathbb{R})$, ce qui est évidemment absurde.

§ 3 . Caractérisation de $\omega_{\alpha,p}$ pour $A = \partial\varphi$

Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, sci, $\varphi \not\equiv +\infty$

On pose $D(\varphi) = \{u \in H \mid \varphi(u) < +\infty\}$

$$Au = \partial\varphi(u) = \{f \in H \mid \varphi(v) - \varphi(u) \leq (f, v-u) \quad \forall v \in H\}$$

$$D(A) = \{u \in D(\varphi) \mid Au \neq \emptyset\}$$

$A = \partial\varphi$ est alors un opérateur maximal monotone et le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-A$ est régularisant (Cf. H. Brézis [1], Th. 3.2)

Le théorème suivant permet de retrouver directement le résultat du théorème 4.

THÉOREME 8 . Soit $A = \partial\varphi$. On a alors les inégalités suivantes :

$$(i) \quad \left| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right| \leq \frac{|u_0 - S(t)u_0|}{t}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3} |u_0 - S(t)u_0| \leq |u_0 - J_t u_0| \leq 3 |u_0 - S(t)u_0|$$

Démonstration : Au cours de la démonstration établissant l'effet régularisant dans le cas $A = \partial\varphi$, on utilise l'inégalité

$$\frac{1}{2} T^2 \left| \frac{du_\lambda}{dt} (T) \right|^2 \leq \frac{1}{2} |u_0 - v|^2 - \frac{1}{2} |u(T) - v|^2 - T(A_\lambda v, u_\lambda(T) - v)$$

où u_λ est la solution de $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$, $u_\lambda(0) = u_0$.

Il suffit de prendre $v = u_\lambda(T)$ et de faire tendre λ vers 0 pour obtenir (i) .

On a de plus

$$\begin{aligned} |u_0 - J_t u_0| &\leq 2|u_0 - v| + |v - J_t v| \\ &\leq 2|u_0 - v| + t|A^\circ v| \quad \forall v \in D(A) \end{aligned}$$

En prenant $v = S(t)u_0$ dans cette inégalité et en utilisant (i) , on en déduit (ii) (l'inégalité de gauche est déjà vraie pour A maximal monotone général, Cf. Lemme 3).

Dans le cas $A = \partial\varphi$, nous avons des caractérisations supplémentaires de $\omega_{\alpha,p}$ à l'aide des expressions $\varphi(S(t)u_0)$ et $\varphi(J_t u_0)$. Ces caractérisations diffèrent suivant les valeurs de α .

THÉOREME 9 . Soit $A = \partial\varphi$ et soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi(S(t)u_0)|} \in L^p_*(0,1)$
- (iii) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi(\mathcal{I}_t u_0)|} \in L^p_*(0,1)$
- (iv) $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{|\varphi_t(u_0)|} \in L^p_*(0,1)$

où $\varphi_t(u_0) = \inf_{v \in D(\varphi)} \varphi(v) + \frac{1}{2t}|u_0 - v|^2 = \varphi(\mathcal{I}_t u_0) + \frac{1}{2t}|u_0 - \mathcal{I}_t u_0|^2$

THÉOREME 10 . Soit $A = \partial\varphi$ et soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$
- (ii) $u_0 \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_0) - \varphi(S(t)u_0)} \in L^p_*(0,1)$
- (iii) $u_0 \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_0) - \varphi(\mathcal{I}_t u_0)} \in L^p_*(0,1)$
- (iv) $u_0 \in D(\varphi)$ et $t^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\varphi(u_0) - \varphi_t(u_0)} \in L^p_*(0,1)$

(on montre que ces expressions sont toujours définies)

BIBLIOGRAPHIE

- V. BARBU [1] A class of boundary problems for second order abstract differential equations, C.R. Acad. Sci.(Janvier 1972).
- H. BREZIS [1] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. studies 5, North Holland (1973).
- H. BREZIS [2] Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones, Israël Journal of Math. vol. 12, n° 1 (1972).
- BUTZER-BERENS[1] Semi-groups of operators and approximation, Springer (1967).
- LIONS-PEETRE [1] Sur une classe d'interpolation, I.H.E.S., Publ. Math. 19 (1964), 5-68.
- LIONS-MAGENES[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod (1968).