

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

**L'analogie dans C^P des théorèmes de convexité de
M. Riesz et G. O. Thorin**

Séminaire Jean Leray (1972), exp. n° 2, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972___A5_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ANALOGUE DANS $\mathcal{C}^p$ DES THÉORÈMES DE CONVEXITÉ
DE M. RIESZ ET G.O. THORIN

par PHAM THE LAI

§ 1. Les espaces vectoriels considérés sont complexes, sauf mention du contraire.

Nous notons $\|\cdot\|$ les différentes normes rencontrées.

Soit H un espace de Hilbert ; $\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ (resp. $\mathcal{C}^{\omega}(H)$; resp. $\mathcal{K}(H)$) désignera l'espace vectoriel des opérateurs linéaires et continus de H dans H (resp. l'idéal des opérateurs compacts ; resp. l'idéal des opérateurs de rang fini) $\mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ et $\mathcal{C}^{\omega}(H)$ seront munis de la norme des opérateurs ; ce sont des espaces de Banach. $\mathcal{K}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^{\omega}(H)$.

Soit p une valeur numérique réelle (finie) $p \geq 1$. Nous désignons par $\mathcal{C}^p(H)$ l'ensemble des $T \in \mathcal{C}^{\omega}(H)$ tels que la suite $\{\lambda_n(T)\}_{n \geq 1}$ décroissante, tendant vers zéro (avec répétition éventuelle suivant la multiplicité) des valeurs propres de $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, la racine carrée de T^*T , soit dans ℓ^p , espace des suites de puissance p ième sommable.

Si $T \in \mathcal{C}^p(H)$, notons

$$\|T\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p(T) \right\}^{1/p}.$$

On sait que (cf. [2] par exemple), pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{C}^p(H)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{C}^p(H)$; muni de cette norme $\mathcal{C}^p(H)$ est un espace de Banach et $\mathcal{K}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^p(H)$. De plus, pour $\forall p, q$ tels que $1 \leq p \leq q$

$$\mathcal{C}^p(H) \subset \mathcal{C}^q(H) \subset \mathcal{C}^{\omega}(H)$$

avec injections continues.

Nous allons prouver dans ce travail que les analogues des théorèmes de convexité bien connus des espaces de fonctions L^p sont vrais pour les espaces d'opérateurs $\mathcal{C}^p(H)$.

§ 2. Soit H un espace de Hilbert.

Si $T \in \mathcal{C}^1(H)$, la suite $\{\mu_j(T)\}_{j \geq 1}$ des valeurs propres de T étant rangée par ordre de module décroissant (avec répétition éventuelle suivant la multiplicité), la série $\sum_j \mu_j(T)$ est absolument convergente (cf. [2]).

Notons :

$$\text{Tr}(T) = \sum_j \mu_j(T) .$$

L'application $T \rightarrow \text{Tr}(T)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^1(H)$ et on a $|\text{Tr}(T)| \leq \|T\|_1$. C'est la forme trace. $\mathcal{E}^1(H)$ est connu sous le nom d'espace d'opérateurs à trace ou d'opérateurs nucléaires.

Si $T \in \mathcal{E}^1(H)$ et $S \in \mathcal{E}^{\omega+1}(H)$, alors TS et ST appartiennent à $\mathcal{E}^1(H)$ et on a :

$$(1) \quad \text{Tr}(TS) = \text{Tr}(ST) .$$

Plus généralement, si p et p' sont deux nombres réels tels que $1 < p$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et si $T \in \mathcal{E}^p(H)$ et $S \in \mathcal{E}^{p'}(H)$, on a encore TS et ST dans $\mathcal{E}^1(H)$ ainsi que l'égalité (1) (cf. [2]).

Le théorème de dualité suivant est bien connu, du moins dans le cas H séparable (cf. [4]). Nous donnons ici sa preuve pour le cas général (voir aussi [3]).

THÉOREME 1. Soit H un espace de Hilbert.

a) Le dual de l'espace $\mathcal{E}^{\omega}(H)$, muni de la norme des opérateurs, est l'espace $\mathcal{E}^1(H)$ et le dual de $\mathcal{E}^1(H)$ est $\mathcal{E}^{\omega+1}(H)$.

b) Soit p un nombre réel > 1 . Le dual de $\mathcal{E}^p(H)$ est $\mathcal{E}^{p'}(H)$ où p' est le conjugué de p .

Preuve: La partie a) est un résultat bien connu de J. Dixmier et R. Schatten (cf. [1] [6]).

Prouvons b). Soit p un nombre réel > 1 et p' le conjugué de p . Si $S \in \mathcal{E}^{p'}(H)$, alors on a (cf. [2])

$$(2) \quad \|S\|_{p'} = \sup_{T \in \mathcal{E}^p(H)} \frac{|\text{Tr}(TS)|}{\|T\|_p} ;$$

donc S définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^p(H)$, de norme la norme de S dans $\mathcal{E}^{p'}(H)$, via la forme trace :

$$T \rightarrow \text{Tr}(TS) .$$

Réciproquement, soit F une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^p(H)$. Elle définit donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^1(H)$ et, en vertu de a), il existe un opérateur $S \in \mathcal{E}^{\omega+1}(H)$ tel que :

$$(3) \quad F(T) = \text{Tr}(TS) \quad \forall T \in \mathcal{E}^1(H)$$

donc pour $\forall T \in \mathcal{C}^p(H)$ puisque F et la forme trace définie par S sont continues sur $\mathcal{C}^p(H)$, pourvu que l'on montre que $S \in \mathcal{C}^{p'}(H)$.

Prouvons que $S \in \mathcal{C}^{p'}(H)$.

D'abord, prouvons que $S \in \mathcal{C}^\omega(H)$. Considérons, pour cela, la factorisation polaire de S :

$$S = U(S*S)^{\frac{1}{2}}$$

U étant un opérateur partiellement isométrique de H dans H .

Si S n'était pas compact, $(S*S)^{\frac{1}{2}}$ ne le serait pas. La théorie spectrale (cf. [5]) des opérateurs auto-adjoints positifs montre qu'il existerait un projecteur spectral P de rang infini tel que :

$$P = Q(S*S)^{\frac{1}{2}}$$

où $Q \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$.

Par conséquent, vu (3), on a :

$$(4) \quad F(RQU^*) = \text{Tr}(RP) \quad \forall R \in \mathcal{F}(H).$$

Soit R_n une projection auto-adjointe de rang n tel que $R_n = R_n P = P R_n$. Alors $\text{Tr}(R_n P) = n$.

D'autre part, il existe une constante C telle que

$$|F(RQU^*)| \leq C |R|_p \quad \forall R \in \mathcal{F}(H).$$

D'où, de (4), on a :

$$n \leq C n^{1/p} \quad \forall n \geq 1$$

ce qui est contradictoire puisque $p > 1$.

Par conséquent $S \in \mathcal{C}^\omega(H)$.

Il reste à prouver que la suite $\{\lambda_n(S)\}_{n \geq 1}$ est dans $\ell^{p'}$.

En effet, $(S*S)^{\frac{1}{2}}$ est alors une série convergente :

$$(S*S)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(S) P_n$$

où P_n est une suite de projections spectrales orthogonales de rang 1.

Soit $\xi = \{\xi_n\}_{n \geq 1}$ une suite numérique positive de ℓ^p et considérons

$$R_n = \sum_{k=1}^n \xi_k P_k.$$

En vertu de (3), on a :

$$F(R_n U^*) = \text{Tr}(R_n (S^* S)^{\frac{1}{2}}) .$$

D'où :

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \lambda_k(S) \right| \leq C |R_n|_p = C \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p} \quad \forall n .$$

Il vient :

$$\left| \sum_1^\infty \xi_k \lambda_k(S) \right| \leq C \left(\sum_1^\infty |\xi_k|^p \right)^{1/p} .$$

De la dualité entre ℓ^p et $\ell^{p'}$, on déduit aisément :

$$S \in \mathcal{E}^{p'}(H) .$$

Par conséquent (3) est vrai pour tout $T \in \mathcal{E}^p(H)$ et vu (2) :

$$|F| = |S|_{p'}$$

et la preuve du théorème 1 est achevée.

§ 3. Soient E un espace vectoriel, B un espace de Banach.

Une application $\mathcal{F}: E \rightarrow B$ sera dite analytique si, pour toute famille finie d'éléments $e_1, \dots, e_k$ de E , la fonction de k variables complexes

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto \mathcal{F}(z_1 e_1, \dots, z_k e_k)$$

est analytique de $\mathbb{C}^k$ dans B .

Si E est une somme directe d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$, nous avons ainsi une définition d'application analytique de $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ dans B .

Nous utiliserons le théorème suivant (cf. [2]) qui est une conséquence et une généralisation du théorème classique des "trois droites".

THÉOREME 2. Soit K un convexe de $\mathbb{R}^k$ (k entier ≥ 1) et notons $b(K)$ la bande dans $\mathbb{C}^k$ de base K

$$b(K) : \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k ; z_j = a_j + ib_j ;$$

$$a = (a_1, \dots, a_k) \in K ; b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k\} .$$

Soient B un espace de Banach et f une application définie, continue et bornée sur $b(K)$ à valeur dans B . Supposons que f est analytique à l'intérieur de $b(K)$.

Si $\mathbb{M}$ est la fonction définie sur K par :

$$a \rightarrow \mathbb{M}(a) = \sup_{b \in \mathbb{R}^k} |f(a + ib)|$$

alors $\text{Log } \mathbb{M}$ est convexe sur K .

§ 4. Soient H un espace de Hilbert, A un opérateur compact, auto-adjoint de H dans H .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re } z \geq 0$, notons A^z l'opérateur :

$$A^z = \sum_j \lambda_j^z E_j$$

$\sum_j \lambda_j E_j = A$ étant la décomposition spectrale de A .

On vérifie aussitôt que A^z est un opérateur normal et si $\text{Re } z = 0$, A^z est unitaire. Pour $z = 0$, A^0 est la projection auto-adjointe de H sur la fermeture de l'image de A , son noyau est le noyau de A .

Prouvons le :

LEMME 3. Soient $a \in]0,1]$ et $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ de norme $|T|_{1/a} \leq 1$. Alors T se factorise :

$$T = U A^a$$

où U est un opérateur borné de norme $|U| \leq 1$ et A un opérateur positif nucléaire de norme $|A|_1 \leq 1$ (et réciproquement).

Preuve : D'abord la réciproque est évidente car on vérifie sans peine $A^a \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ et $|A^a|_{1/a} = |A|_1$ si A est nucléaire.

Inversement, supposons $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ de norme $|T|_{1/a} \leq 1$. Alors, il vient : $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ et $|B|_{1/a} \leq 1$. Il suffit alors de poser $A = B^{1/a}$ pour avoir la factorisation voulue.

Soient $H_1, \dots, H_k$ k espaces de Hilbert. Notons :

$$[0,1]^k = \{a = (a_1, \dots, a_k) ; 0 \leq a_j \leq 1\} .$$

Pour $a \in [0,1]^k$

$$A(a) = \{T = (T_1, \dots, T_k) \in \mathcal{F}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(H_k) ; |T_j|_{1/a_j} \leq 1\}$$

avec la convention $|T|_{1/0} = T_j$ (norme des opérateurs) dès que $a_j = 0$.

Nous avons la :

PROPOSITION 4. Soient B un espace de Banach et $\mathcal{F}$ une application analytique de $(H_1) + \dots + (H_k)$ dans B .

Pour tout $a \in [0,1]^k$, notons

$$\mathbb{M}(a) = \sup_{T \in A(a)} |\mathcal{F}(T)| \quad (\text{éventuellement } +\infty).$$

La fonction $\text{Log } \mathbb{M}$, définie sur $[0,1]^k$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est convexe sur $[0,1]^k$.

Preuve : Notons

$$A^+(1) = \{T ; T \in A(1) ; T_j \text{ positif}\}.$$

Si T et S sont des éléments de $\mathcal{F}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(H_k)$, notons :

$$TS = (T_1 S_1, \dots, T_k S_k).$$

Alors tout élément de $A(a)$ se factorise :

$$T = U S^a$$

où $U \in A(0)$ et $S \in A^+(1)$ avec la notation $S^a = (S_1^{a_1}, \dots, S_k^{a_k})$.

C'est clair en vertu du lemme 3 si tous les $a_j \neq 0$; dans le cas où $a_j = 0$ pour un certain j , T_j se factorise encore de la même manière car il suffit de considérer la factorisation polaire

$$T_j = U_j B_j \quad (B_j = (T_j T_j^*)^{\frac{1}{2}})$$

et de poser

$$S_j = \frac{B_j}{|T_j|_1} \quad (\text{en supposant } T_j \neq 0, \text{ sinon c'est évident}) ;$$

on obtiendra :

$$T_j = T_j S_j^0.$$

En effet, $S_j^0 = B_j^0$ est, d'après une remarque antérieure, la projection auto-adjointe de H sur la fermeture de l'image de B_j , d'où :

$$T_j = U_j B_j B_j^0 = T_j S_j^0$$

De plus, $B_j \in \mathcal{F}(H_j)$ puisque T_j y est, donc $S_j \in \mathcal{F}(H_j)$, est positif et de norme $|S_j|_1 = 1$ par construction. Comme $|T_j| \leq 1$ par hypothèse, on a la factorisation voulue.

Si $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ quelconque, alors

$$U S^{a+ib} = (U_1 S_1^{a_1+ib_1}, \dots, U_k S_k^{a_k+ib_k}) \in A(a),$$

comme il est aisé de voir.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a) &= \sup_{\substack{S \in A^+(1) \\ U \in A(0)}} |\mathcal{F}(U S^a)| \\ &= \sup_{b \in \mathbb{R}^k} \sup_{\substack{S \in A^+(1) \\ U \in A(0)}} |\mathcal{F}(U S^{a+ib})| \\ &= \sup_{\substack{S \in A^+(1) \\ U \in A(0)}} \sup_{b \in \mathbb{R}^k} |\mathcal{F}(U S^{a+ib})|. \end{aligned}$$

Si

$$S_j = \sum_{h=1}^{h_j} \lambda_{j,h} E_{j,h}$$

est la décomposition spectrale de S_j où les $E_{j,k}$ sont des projections auto-adjointes de rang 1, il vient :

$$(5) \quad U_j S_j^{a_j+ib_j} = \sum_{h=1}^{h_j} \lambda_{j,h}^{z_j} U_j E_{j,h} \quad z_j = a_j + ib_j,$$

$\mathcal{F}$ étant analytique de $\mathcal{F}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(H_k)$ dans B , il vient de (5) que la fonction de k variables complexes :

$$z = (z_1, \dots, z_k) \rightarrow \mathcal{F}(U S^z)$$

est définie et continue bornée dans la bande $\{z ; 0 \leq \operatorname{Re} z_j \leq 1\}$ et analytique dans $\{z ; 0 < \operatorname{Re} z_j < 1\}$, à valeur dans B .

En vertu du théorème 2 et du fait de la croissance du logarithme, on en déduit que :

$$\operatorname{Log} \mathcal{M}(a) = \sup_{\substack{S \in A^+(1) \\ U \in A(0)}} \operatorname{Log} \left\{ \sup_{b \in \mathbb{R}^k} |\mathcal{F}(U S^{a+ib})| \right\}$$

est convexe sur $[0,1]^k$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 5. Soient H un espace de Hilbert, B un espace de Banach et $\mathcal{G}$ une application linéaire de $\mathcal{H}(H)$ dans B . Posons $[1, \infty] = \{p; p \geq 1\} \cup \{\omega + 1\}$ et notons pour $\forall p \in [1, \infty]$, $|\mathcal{G}|_p$ la norme d'une extension de $\mathcal{G}$ linéaire et continue de $\mathcal{C}^p(H)$ dans B si elle existe, $|\mathcal{G}|_p = +\infty$ sinon.

Alors la fonction :

$$a \longmapsto \text{Log} |\mathcal{G}|_{1/a}$$

définie sur $[0, 1]$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$ est convexe sur $[0, 1]$.

Preuve : Posons, pour $\forall a \in [0, 1]$

$$\mathfrak{M}(a) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{H}(H) \\ |T|_{1/a} \leq 1}} |\mathcal{G}(T)|.$$

Puisque $\mathcal{H}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^p(H)$ pour tout $p \geq 1$, on a :

$$\mathfrak{M}(a) = |\mathcal{G}|_{1/a} \quad \text{pour } a \in [0, 1].$$

De même, pour $\forall a \in [0, 1]$, posons $\mathfrak{N}(a) = 0$ si $a \in]0, 1]$ et $\mathfrak{N}(0) = |\mathcal{G}|_{\omega+1}$.

Alors :

$$(6) \quad |\mathcal{G}|_{1/a} = \max\{\mathfrak{M}(a), \mathfrak{N}(a)\} \quad \forall a \in [0, 1];$$

$\text{Log } \mathfrak{M}(a)$ est convexe sur $[0, 1]$ en vertu de la proposition 4, une application linéaire étant analytique de $\mathcal{H}(H)$ dans B , d'où la conclusion vu (6).

PROPOSITION 6. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$. Avec la notation du corollaire 5, pour $p \in [1, \infty]$, posons $|T|_p$ la norme de T dans $\mathcal{C}^p(H)$ si $T \in \mathcal{C}^p(H)$, $|T|_p = +\infty$ sinon.

Alors la fonction :

$$a \longmapsto \text{Log} |T|_{1/a}$$

définie sur $[0, 1]$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est convexe sur $[0, 1]$.

Preuve : Si $T \notin \mathcal{C}^{\omega}(H)$, la conclusion est immédiate.

Supposons donc $T \in \mathcal{C}^{\omega}(H)$. Comme

$$|T|_{1/a} = \left\{ \sum_n \lambda_n(T)^{1/a} \right\}^a,$$

la proposition provient des propriétés de convexité connues sur les espaces ℓ^p .

Voici une autre preuve de ce fait, utilisant la dualité des espaces $\mathcal{C}^p(H)$.
 Pour $a \in [0,1]$, notons

$$\mathfrak{M}(a) = \sup_{S \in \mathcal{F}(H)} \frac{|\text{Tr}(TS)|}{|S|_{1/(1-a)} \leq 1}$$

(toujours avec la convention $|S|_{1/0} = |S|$).

La forme trace sur $\mathcal{F}(H)$:

$$(7) \quad S \longmapsto \text{Tr}(TS)$$

est linéaire et analytique, donc en vertu de la proposition 4, la fonction

$$a \longmapsto \text{Log } \mathfrak{M}(a)$$

est convexe sur $[0,1]$.

Il reste à prouver que l'on a :

$$(8) \quad |T|_{1/a} = \mathfrak{M}(a) \quad \forall a \in [0,1].$$

Pour cela, il suffit de montrer, pour $a \in [0,1]$, que $\mathfrak{M}(a)$ est finie si et seulement si $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ et de plus, dans ce cas, on a (8).

Si $a = 0$, $|T|$ est finie par hypothèse et l'égalité (8) découle de la partie a) du théorème 1.

Supposons $a > 0$.

Si $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$, alors la partie b) du théorème 1 montre que (8) est vraie.

Réciproquement, supposons $\mathfrak{M}(a) < +\infty$ et montrons que $T \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ avec (8).

Dans cette hypothèse, la forme trace (7), définie sur $\mathcal{F}(H)$, muni de la norme $| \cdot |_{1/(1-a)}$, est continue et de norme $\mathfrak{M}(a)$, donc est prolongeable, puisque $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}^{1/(1-a)}(H)$, d'une manière unique sur $\mathcal{C}^{1/(1-a)}(H)$ en une forme linéaire et continue μ de norme $\mathfrak{M}(a)$ (avec la convention $\mathcal{C}^{1/0}(H) = \mathcal{C}^0(H)$). Alors de nouveau le théorème 1 montre qu'il existe un seul $\tilde{T} \in \mathcal{C}^{1/a}(H)$ de norme $|\tilde{T}|_{1/a} = \mathfrak{M}(a)$ et tel que

$$\mu(S) = \text{Tr}(\tilde{T}S) \quad \forall S \in \mathcal{C}^{1/(1-a)}(H);$$

il vient :

$$(9) \quad \text{Tr}(TS) = \text{Tr}(\tilde{T}S) \quad \forall S \in \mathcal{F}(H).$$

Si φ et ψ sont deux éléments quelconques de H , posons

$$S : f \longmapsto (f, \varphi) \psi$$

(,) étant le produit scalaire dans H .

Il vient de (9) que l'on a :

$$(T_{\psi, \varphi}) = (\tilde{T}_{\psi, \varphi}) \quad \forall \psi, \varphi \in H$$

d'où $\tilde{T} = T$.

COROLLAIRE 7. Soient B un espace de Banach, H un espace de Hilbert, $\mathcal{E}$ une application linéaire de B dans l'espace vectoriel des applications linéaires de H dans H.

Avec la notation du corollaire 5, pour tout $p \in [1, \infty]$, notons :

$$|\mathcal{E}|_p = \sup_{\substack{b \in B \\ |b| \leq 1}} |\mathcal{E}(b)|_p.$$

Alors la fonction

$$a \mapsto \text{Log} |\mathcal{E}|_{1/a}$$

définie sur $[0, 1]$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est convexe sur $[0, 1]$.

Preuve : Soit $b \in B$.

La fonction :

$$a \mapsto \text{Log} |\mathcal{E}(b)|_{1/a}$$

définie sur $[0, 1]$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est convexe sur $[0, 1]$. En effet, si $\mathcal{E}(b) \notin \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$ c'est évident ; si $\mathcal{E}(b) \in \mathcal{C}^{\omega+1}(H)$, c'est la proposition 6.

De la croissance du logarithme, il vient :

$$\text{Log} |\mathcal{E}|_{1/a} = \sup_{|b| \leq 1} \text{Log} |\mathcal{E}(b)|_{1/a}$$

d'où le corollaire.

§ 5. Nous avons le théorème de convexité suivant dans les $\mathcal{C}^p$.

THÉORÈME 8. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\mathcal{E}$ une application linéaire de $\mathcal{L}(H_1)$ dans $\mathcal{L}(H_2)$, espace des applications linéaires de H_2 dans H_2 . Notons

$$[1, \infty] \times [1, \infty] = [\{p \geq 1\} \cup \{\omega+1\}] \times [\{q \geq 1\} \cup \{\omega+1\}].$$

Pour tout couple $(p, q) \in [1, \infty] \times [1, \infty]$, notons $|\mathcal{E}|_{p, q}$ la norme d'une extension de T , linéaire et continue de $\mathcal{C}^p(H_1)$ dans $\mathcal{C}^q(H_2)$ si elle existe, $|\mathcal{E}|_{p, q} = +\infty$ sinon. Alors la fonction :

$$(a, b) \mapsto \text{Log} |\mathcal{E}|_{1/a, 1/b}$$

définie sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est convexe.

Preuve : Si $|\mathfrak{S}|_{1/a, 1/b}$ est $+\infty$ dans le carré $[0,1] \times [0,1]$, c'est clair.

On peut donc supposer qu'il existe un couple $(a_0, b_0) \in [0,1] \times [0,1]$ tel que

$$|\mathfrak{S}|_{1/a_0, 1/b_0} < +\infty.$$

Par conséquent :

$$\mathfrak{S}(T) \in \mathcal{C}^{1/b_0}(H_2) \text{ pour tout } T \in \mathcal{F}(H_1) \text{ (avec la convention } \frac{1}{0} = \omega+1).$$

Donc

$$|\mathfrak{S}(T)| < +\infty \text{ pour } T \in \mathcal{F}(H_1).$$

La forme bilinéaire B :

$$(T, S) \mapsto B(T, S) = \text{Tr}(S \cdot \mathfrak{S}(T))$$

est bien définie sur $\mathcal{F}(H_1) \oplus \mathcal{F}(H_2)$.

Notons, pour $(a, b) \in [0,1] \times [0,1]$:

$$\alpha = (a, 1-b) \in [0,1]^2 \quad U(a, b) = A(\alpha) \quad (\text{notation du § 4})$$

$$\mathfrak{M}(a, b) = \sup_{(T, S) \in U(a, b)} |B(T, S)|.$$

Puisque l'on a :

$$|B(T, S)| \leq |\mathfrak{S}(T)|_{1/b} |S|_{1/(1-b)} \quad (\text{avec } |\mathfrak{S}(T)|_{1/b} \text{ éventuellement } +\infty),$$

il vient :

$$(10) \quad \mathfrak{M}(a, b) \leq |\mathfrak{S}|_{1/a, 1/b} \quad \forall (a, b) \in [0,1] \times [0,1].$$

Par ailleurs, supposons maintenant (a, b) tel que $a > 0$, $b < 1$ et $\mathfrak{M}(a, b) < +\infty$. Nous allons prouver, dans ces conditions, que :

$$|\mathfrak{S}|_{1/a, 1/b} \leq \mathfrak{M}(a, b).$$

En effet, pour $T \in \mathcal{F}(H_1)$ fixé, la forme linéaire associée μ_T suivante, définie sur $\mathcal{F}(H_2)$, munie de la norme $|\cdot|_{1/(1-b)}$

$$\mu_T : S \mapsto \text{Tr}(S \cdot \mathfrak{S}(T))$$

a une norme qui vérifie

$$|\mu_T| \leq (a, b) |T|_{1/a}.$$

Comme $b < 1$, $\mathcal{F}(H_2)$ est dense dans $\mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$, μ_T se prolonge d'une

seule manière en une forme linéaire continue $\tilde{\mu}_T$ sur $\mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$ de même norme. Donc, en vertu du théorème 1, il existe un seul élément $\tilde{T} \in \mathcal{C}^{1/b}(H_2)$ vérifiant :

$$\tilde{\mu}_T(S) : \text{tr}(S \tilde{T}) \quad \forall S \in \mathcal{C}^{1/(1-b)}(H_2)$$

$$|\tilde{T}|_{1/b} = |\mu_T| \leq (a,b) |T|_{1/a}.$$

De là, il vient :

$$\mathcal{A}(T) = \tilde{T}$$

donc :

$$|\mathcal{E}(T)|_{1/b} \leq M(a,b) |T|_{1/a} \quad \forall T \in \mathcal{F}(H_1).$$

Puisque $a \neq 0$, $\mathcal{E}$ se prolonge d'une seule manière en une application linéaire et continue de $\mathcal{C}^{1/a}(H_1)$ dans $\mathcal{C}^{1/b}(H_2)$ avec une norme vérifiant :

$$(11) \quad |\mathcal{E}|_{1/a, 1/b} \leq M(a,b) \quad \forall 0 < a \leq 1; 0 \leq b < 1.$$

L'inégalité (11) reste vraie dans le cas où $M(a,b) = +\infty$, c'est évident. Des inégalités (10), (11), il vient :

$$|\mathcal{E}|_{1/a, 1/b} = M(a,b) \quad \forall 0 < a \leq 1; 0 \leq b < 1.$$

Définissons alors $\mathcal{N}(a,b)$ sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ comme suit :

$$\mathcal{N}(0,b) = |\mathcal{E}|_{\omega+1, b^{-1}} \quad \forall b \in [0,1]$$

$$\mathcal{N}(a,1) = |\mathcal{E}|_{1/a, 1} \quad \forall a \in [0,1]$$

$$\mathcal{N}(a,b) = 0 \quad \text{si } 0 < a \leq 1; 0 \leq b < 1.$$

Alors nous avons :

$$|\mathcal{E}|_{1/a, 1/b} = \max \{M(a,b), \mathcal{N}(a,b)\} \quad \forall (a,b) \in [0,1] \times [0,1].$$

La preuve sera achevée si nous prouvons que les deux fonctions $\text{Log } M(a,b)$ et $\text{Log } \mathcal{N}(a,b)$ sont convexes.

B étant bilinéaire est analytique, d'où la convexité de $\text{Log } M(a,b)$ en vertu de la proposition 4.

Reste à prouver la convexité de $\text{Log } \mathcal{N}(a,b)$.

Considérons la fonction sur $[0,1]$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$a \mapsto \text{Log } \mathcal{N}(a,1).$$

Si elle est égale à $+\infty$, elle est convexe. On peut donc supposer qu'il existe $a_1 \in [0,1]$ telle que $|\mathcal{E}|_{a_1,1} < +\infty$.

Donc $\mathcal{E}$ applique, en vertu de cette hypothèse $\mathcal{F}(H_1)$ dans $\mathcal{C}^1(H_2)$, espace de Banach et la convexité de $\text{Log } \mathcal{JL}(a,1)$ provient du corollaire 5.

D'autre part, considérons la fonction sur $[0,1]$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

$$b \rightarrow \text{Log } \mathcal{JL}(0,b).$$

Si elle est égale à $+\infty$, elle est convexe. On peut donc supposer qu'il existe $b_1 \in [0,1]$ telle que $\mathcal{E}$ possède une extension linéaire et continue de

$$\mathcal{C}^{\omega+1}(H_1) \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}^{1/b_1}(H_2).$$

Alors la convexité provient du corollaire 7.

De la définition de $\mathcal{JL}$, on a immédiatement la convexité de $\text{Log } \mathcal{JL}(a,b)$.

Remarques :

1) Si, au lieu de la notation du théorème 8, nous notons

$$[1,\infty] \times [1,\infty] = [\{p \geq 1\} \cup \{\omega\}] \times [\{q \geq 1\} \cup \{\omega\}],$$

la conclusion du théorème 8 reste valable. En effet, sa preuve n'utilisera que la convexité de la fonction $\text{Log } \mathcal{M}(a,b)$.

2) En exprimant la remarque précédente d'une autre manière, on obtient l'énoncé suivant, déjà établi par Dunford et Schwartz (cf. [2]), toutefois sans estimation de convexité sur les normes :

Avec la notation de la remarque 1, disons que $\mathcal{E}$ est de type (p,q) si $|\mathcal{E}|_{p,q} < +\infty$. Alors, si $\mathcal{E}$ est de type (p_1, q_1) et de type (p_2, q_2) , pour tout $\theta \in [0,1]$, T est de type (p,q) où :

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$$

et on a l'inégalité de convexité :

$$|\mathcal{E}|_{p,q} \leq (|\mathcal{E}|_{p_1, q_1})^\theta (|\mathcal{E}|_{p_2, q_2})^{1-\theta}.$$

3) Les énoncés précédents restent vrais dans le cas des espaces de Hilbert réels.

§ 6. Voici quelques applications.

Le résultat de la remarque 2, dans le cas diagonal, donne la :

PROPOSITION 9. Soient H un espace de Hilbert, $\{P_n\}_{n \geq 1}$ une suite de projecteurs auto-adjoints, mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire $P_n P_m = 0$ pour $n \neq m$.

Alors, pour tout $T \in \mathcal{T}(H)$, la série $\hat{T} = \sum_n P_n T P_n$ converge dans $\mathcal{L}^w(H)$.

L'application $\mathcal{S}$ ainsi définie de $\mathcal{T}(H)$ dans $\mathcal{L}^w(H)$:

$$T \mapsto \mathcal{S}(T) = \hat{T}$$

est de type (p, p) pour tout $p \in [1, \infty] = \{p \geq 1\} \cup \{\infty\}$

$$|\mathcal{S}|_{p,p} \leq (|\mathcal{S}|_{1,1})^{1/p} (|\mathcal{S}|_{\infty,\infty})^{1-1/p} \leq 1.$$

Preuve : Dans le cas séparable, ce résultat, sous une forme légèrement différente, a été établi par Gohberg et Krein (cf. [4]) avec la seule majoration $|\mathcal{S}|_{p,p} \leq 1$.

Leur méthode est différente : soit $T \in \mathcal{T}(H)$ et posons

$$Q_n = \sum_{j=1}^n P_j ;$$

Q_n converge fortement vers Q , Q étant la projection auto-adjointe de H sur le sous-espace fermé engendré par les images de P_j .

Puisque $T \in \mathcal{T}(H)$, il s'écrit :

$$T(f) = \sum_{k=1}^t (f, \varphi_k) \psi_k \quad \forall f \in H.$$

Donc

$$T Q_n(b) - T Q(b) = \sum_{k=1}^t \{Q_n(b) - Q(b), \varphi_k\} \psi_k ;$$

d'où

$$|T(Q_n - Q)| \leq \sum_{k=1}^t |\psi_k| |Q_n \varphi_k - Q \varphi_k|.$$

Par conséquent, $T Q_n$ converge vers TQ dans $\mathcal{L}^w(H)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc N tel que

$$|T(Q_n - Q)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

De (), on a :

$$|P_j T P_j(f)| \leq \varepsilon |P_j(f)| \quad \forall j \geq N, \quad \forall f \in H.$$

D'où

$$\left| \sum_{j=n}^m P_j^T P_j(f) \right|^2 = \sum_{j=n}^m |P_j^T P_j(f)|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{j=n}^m |P_j(f)|^2 \leq \varepsilon^2 |f|^2 .$$

Donc la suite

$$\sum_{j=1}^n P_j^T P_j$$

est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^\omega(H)$, par conséquent elle converge dans $\mathcal{C}^\omega(H)$; d'où la convergence de $\hat{T}$.

En utilisant un résultat de Gohberg et Krein (cf. [4]), on a :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(\hat{T}) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j(T) \quad \forall n = 1, 2, \dots .$$

Il en résulte que $\mathcal{G}$ est de type $(1,1)$ et (∞, ∞) avec

$$|\mathcal{G}|_{1,1} \leq 1 \quad |\mathcal{G}|_{\infty}^{\infty} \leq 1 ,$$

d'où le résultat suivant la remarque 2 .

Une application de la proposition 4 permet de retrouver quelques inégalités bien connues dans les espaces $\mathcal{C}^p(H)$. La méthode est toute nouvelle :

PROPOSITION 10. Soient H un espace de Hilbert, T_j ($j = 1, \dots, k$) k opérateurs de H dans H tels que :

$$T_j \in \mathcal{C}^{p_j}(H) \quad p_j \in [1, \infty] = \{p \geq 1\} \cup \{\omega\} ;$$

a) si $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$, alors $T_1 \dots T_k \in \mathcal{C}^1(H)$ et

$$|\text{Tr}(T_1 \dots T_k)| \leq |T_1|_{p_1} \dots |T_k|_{p_k} ,$$

b) si $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$, alors $T_1 \dots T_k \in \mathcal{C}^p(H)$ et

$$|T_1 \dots T_k|_p \leq |T_1|_{p_1} \dots |T_k|_{p_k}$$

Preuve : En utilisant les inégalités classiques liant les $\lambda_j(T_1 \dots T_k)$ et les produits des $\lambda_j(T_i)$, il est aisé de voir que si

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1 ,$$

le produit $T_1 \dots T_k \in \mathcal{C}^p(H)$ et l'application multilinéaire

$$(T_1, \dots, T_k) \mapsto T_1 \dots T_k$$

est continue de $\mathcal{C}^{p_1}(H) \oplus \dots \oplus \mathcal{C}^{p_k}(H)$ dans $\mathcal{C}^p(H)$.

Prouvons le a).

En vertu de cette continuité et de la densité de $\mathcal{F}(H)$ dans $\mathcal{C}^{p_j}(H)$ la proposition 4 montre que la fonction définie sur $[0,1]^k$:

$$a \mapsto \text{Log sup } |\text{Tr}(T_1, \dots, T_k)|$$

est convexe sur $[0,1]^k$. Pour obtenir l'inégalité de a), il suffit de la prouver dans le cas particulier $p_j = \delta_j^i$ (δ_j^i symbole de Kronecker), $i = 1, \dots, k$ ce qui est évident.

Prouvons le b).

Soit p' le conjugué de p . En vertu de a)

$$\sup_{\substack{S \in \mathcal{C}^{p'}(H) \\ \|S\|_{p'} \leq 1}} |\text{Tr}(ST_1, \dots, T_k)| \leq \|T_1\|_{p_1}, \dots, \|T_k\|_{p_k}.$$

Or, en vertu du théorème 1,

$$\|T_1, \dots, T_k\|_p = \sup_{\substack{S \in \mathcal{C}^{p'}(H) \\ \|S\|_{p'} \leq 1}} |\text{Tr}(ST_1, \dots, T_k)|$$

d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DIXMIER, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. of Math. (2) 51, 1950.
- [2] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, Linear operators, Tomes I et II, Interscience Publishers, 1963.
- [3] C. GAPAILLARD, D.E.A. de la Faculté des Sciences de Nantes, 1971.
- [4] J.C. GOHBERG, M.G. KREIN, Introduction to the theory of linear non self adjoint operators, A.M.S. (traduit du russe), 1969.
- [5] F. RIESZ, B. NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.
- [6] R. SCHATTEN, Norm ideals of simplicity continuous operators. Ergebniss des Math., Springer Verlag, 1960.
- [7] G.O. THORIN, Convexity theorems generalizing those of M. Riez and Hadamard, Medd. Lunds, Univ. Sém., t. 9, 1948.