

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES LOUIS LIONS

**Perturbations singulières pour une classe d'équations aux
dérivées partielles non linéaires**

Séminaire Jean Leray (1972), exp. n° 1, p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972___A4_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES

I.1

par Jacques Louis LIONS

Introduction.

Soit $\mathcal{O} =]0,1[$ ², $x, y \in \mathcal{O}$. On cherche une fonction $P_\varepsilon(x, y, t)$ définie dans \mathcal{O} et pour $t > 0$, solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$(1) \quad \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta P_\varepsilon + 2P_\varepsilon + \int_0^1 P_\varepsilon(x, \xi, t) \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \xi}(\xi, y, t) d\xi = f$$

où f est donnée dans $\mathcal{O} \times \{t > 0\}$ (1) et où ε est > 0 , avec la condition aux limites

$$(2) \quad P_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O} \times \{t > 0\},$$

et la condition initiale

$$(3) \quad P_\varepsilon(x, y, 0) = 0.$$

On verra au N°1 - par un procédé détourné, inspiré de la théorie du Contrôle Optimal pour les systèmes distribués - qu'il existe une solution unique du problème, vérifiant(2)

$$(4) \quad P_\varepsilon(x, y, t) + P_\varepsilon(y, x, t) = 0.$$

Le but essentiel de cet article est l'étude du comportement de P_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On montrera (N°2 et 3) que, dans une typologie convenable, P_ε converge vers P , solution de l'équation analogue à (1) avec $\varepsilon = 0$, les conditions aux limites donnant lieu à un phénomène particulier : P satisfait à des conditions aux limites NON HOMOGENES.

On étudie en fait dans les N° ci-après un cas plus général où le nombre de variables d'espaces est 4 (au lieu de 2) et on peut d'ailleurs considérer des situations analogues à un nombre de variables PAIR quelconque.

L'équation (1) a été étudiée en raison d'une certaine analogie avec les équations de Navier Stokes, lorsque le nombre de Reynolds augmente indéfiniment.

(1) De façon particulière; cf. N°1

(2) Pour f donné comme au N°1 ci-après.

Le plan est le suivant :

1. Equation aux dérivées partielles du type "Riccati-differential".
2. Un problème linéaire de perturbation singulière.
3. Perturbations singulières non linéaires.
4. Variantes

1. Equation aux dérivées partielles du type "Riccati-differential"

1.1. Un problème linéaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ⁽¹⁾ et $\varepsilon > 0$. On cherche u_1, u_2 dans $\Omega \times]0, T[$ telles que

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1,$$

$$(1.2) \quad -\frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2,$$

où

$$(1.3) \quad f_i \in L^2(\Omega \times]0, T[),$$

avec les conditions aux limites

$$(1.4) \quad u_i = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0, T[, \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

$$(1.5) \quad u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, T) = 0.$$

Remarque 1.1

Le problème (1.1) ... (1.5) est inspiré (mais techniquement différent) des situations rencontrées dans le contrôle optimal des systèmes distribués [3].

On vérifie sans peine que le problème (1.1) ... (1.5) admet une solution unique, avec ⁽²⁾

$$(1.6) \quad u_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega));$$

pour cela on note les estimations a priori suivantes. On posera ⁽³⁾

(1) Pour fixer les idées.

(2) $H_0^1(\Omega)$ = espace de Sobolev [7] d'ordre 1 des fonctions nulles sur Γ .

(3) Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

$$|\varphi|^2 = \int_{\Omega} \varphi(x)^2 dx, \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi dx,$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx,$$

et de fa6on g6n6rale $u_i(s)$ d6signera la fonction $x \rightarrow u_i(x,s)$. Multipliant (1.1) (resp. (1.2) par u_1 (resp. u_2) on en d6duit

$$\begin{aligned} (1.7) \quad & \frac{1}{2} \left[|u_1(T)|^2 + |u_2(0)|^2 \right] + \varepsilon \int_0^T \left[\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2 \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[|u_1|^2 + |u_2|^2 \right] dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) u_2 \right] dx dt = \\ & = \int_0^T [(f_1, u_1) + (f_2, u_2)] dt. \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \int_0^T \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) u_2 \right] dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1, u_2) dx dt = 0$$

de sorte que (1.7) donne

$$(1.8) \quad \int_0^T \left[|u_1|^2 + |u_2|^2 \right] dt \cong \int_0^T \left[|f_1|^2 + |f_2|^2 \right] dt,$$

$$(1.9) \quad \varepsilon \int_0^T \left[\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \right] dt \cong \int_0^T \left[|f_1|^2 + |f_2|^2 \right] dt.$$

On consid6re maintenant la variante suivante du probl6me pr6c6dent. On cherche u_1, u_2 solutions de

$$(1.10) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(1.11) \quad - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$(1.12) \quad u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,T) = k(x) \quad (k \text{ donn6e})$$

La condition (1.4) 6tant inchang6e.

Sous l'hypothèse

$$(1.13) \quad k \in H_0^1(\Omega)$$

le problème (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) admet une solution unique avec (1.6). En effet on introduit une fonction Φ telle que (1)

$$(1.14) \quad \begin{cases} \Phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Phi(T) = k \end{cases}$$

et on se ramène au problème précédent en les inconnues u_1 et $u_2 - \Phi$.

On va maintenant "découpler" le problème (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) par le même procédé que dans [3], Chap. 3.

1.2. Découplage du problème linéaire

On considère dans l'ouvert $\Omega \times]0, s[$, $0 \leq s < T$, le problème :

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta \varphi_1 + \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = 0, \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta \varphi_2 + \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0, \\ \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(s) = h, \\ \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma]0, s[. \end{cases}$$

Pour $h \in H_0^1(\Omega)$ ce problème (évidemment analogue à (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) admet une solution unique telle que

$$(1.16) \quad \begin{cases} \varphi_i \in L^2(0, s; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \in L^2(0, s; H^{-1}(\Omega)) \quad (2). \end{cases}$$

Alors $\varphi_1(s)$ est défini de façon unique et dépend continûment de h dans $L^2(\Omega)$.

(1) Une telle fonction existe et peut être choisie de façon que l'application $k \rightarrow \Phi$ soit linéaire et continue dans les topologies convenables. Cf. par ex. [5].

(2) $H^{-1}(\Omega) = \text{dual de } H_0^1(\Omega)$

Donc

$$(1.17) \quad \varphi_1(s) = P(s) \varphi_2(s) = P(s)h, \quad P(s) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); L^2(\Omega)).$$

Si maintenant l'on prend dans (1.15)

$$h = u_2(s) \text{ où } \{u_1, u_2\} \text{ est la solution de (1.10)(1.11)(1.12)(1.4),}$$

on a évidemment :

$$\varphi_1 \text{ (resp. } \varphi_2) = \text{restriction de } u_1 \text{ (resp. } u_2) \text{ à } \Omega \times]0, s[$$

et par conséquent $\varphi_1(s) = u_1(s)$ de sorte que (1.17) donne l'identité fondamentale:

$$(1.18) \quad u_1(s) = P(s) u_2(s)$$

valable $\forall s \in]0, T]$.

On va maintenant, par un calcul d'identification, obtenir une équation satisfaite par P.

Remarque 1.2

En fait u_1, u_2, P dépendent de ε ; on les notera $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, P_\varepsilon$ plus loin lorsque l'on fera $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.3. Equation du type "Riccati-différentielle".

On effectue le calcul de manière formelle, les vérifications se faisant par les mêmes procédés que dans [3], Chap. 3. On utilise (1.18) dans (1.10) ; après avoir vérifié la différentiabilité de P en t, on obtient :

$$(1.19) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) u_2 + P \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) - \varepsilon \Delta P u_2 + P u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 .$$

Utilisant (1.11) dans (1.19) il vient :

$$(1.20) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) u_2 + P \left[-\varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] - \varepsilon \Delta P u_2 + P u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$$

et utilisant encore une fois (1.18) dans (1.20), il vient :

$$(1.21) \quad \left[\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon (P\Delta + \Delta P) + 2P + P \circ \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \right] u_2 = 0 .$$

et (1.21) est une identité devant avoir lieu $\forall u_2$ (car dans (1.15) on peut prendre h quelconque) d'où l'équation en termes d'opérateurs :

$$(1.22) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon (P\Delta + \Delta P) + 2P + P \circ \frac{\partial P}{\partial x_1} = - \frac{\partial}{\partial x_1} I .$$

Soit maintenant

$$(1.23) \quad P(x,y,t) = \text{noyau de l'opérateur } P(t) \quad (\text{cf. [6] pour la théorie des noyaux}).$$

Alors (1.22) entraîne

$$(1.24) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon (\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_{\Omega} P(x,\xi,t) \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t) d\xi = - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) .$$

Remarque 1.3.

Ce qui précède vaut, en particulier, si l'on prend $\Omega =]0,1[$; on trouve alors l'équation (1) de l'introduction, avec $f = - \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y)$.

Remarque 1.4.

On peut, plus généralement, considérer le système

$$(1.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_1 + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + M u_2 = 0 , \\ - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - M u_1 = 0 , \end{cases}$$

les autres conditions étant inchangées, où

$$(1.26) \quad M \varphi(x) = \int_{\Omega} M(x,y) \varphi(y) dy ,$$

$M(x,y) = M(y,x)$ = fonction régulière dans $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. On arrive alors à l'équation

$$(1.27) \quad \left[\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon (\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_{\Omega} P(x,\xi,t) \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t) d\xi - \\ & - \int_{\Omega \times \Omega} P(x,\zeta,t) M(\zeta,\xi) \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi,y,t) d\xi d\zeta = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) - M(x,y) \end{aligned} \right.$$

Remarque 1.5

Les équations "de Riccati" rencontrées dans la théorie du contrôle optimal sont de la forme (1) (cf. [3])

$$(1.28) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon (\Delta_x + \Delta_y)P + 2P + \int_{\Omega} P(x,\xi,t) P(\xi,y,t) d\xi = \delta(x-y) .$$

(1) ε n'étant pas nécessairement "petit" !

Remarque 1.6

On peut, plus généralement, remplacer $-\Delta$ par un opérateur elliptique symétrique ⁽¹⁾ à coefficients variables soit A d'ordre quelconque ; on arrive ainsi à

$$(1.29) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon(A_x + A_y)P + 2P + \int_{\Omega} P(x, \xi, t) \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi, y, t) d\xi = - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) .$$

1.4. Conditions aux limites et propriétés de P .

Puisque $u_1 = 0$ sur $\Gamma \times]0, T[$, on doit avoir

$$\int_{\Omega} P(x, y, t) u_2(y) dy = 0 \text{ p.p. si } x \in \Gamma ,$$

et donc

$$(1.30) \quad P(x, y, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma , y \in \Omega , t > 0 \text{ } ^{(2)} .$$

En outre (1.22) et (1.24) impliquent que

$$P \Delta \varphi = \Delta P \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

d'où ⁽³⁾

$$(1.31) \quad P(x, y, t) = 0 \text{ si } x \in \Omega , y \in \Gamma , t > 0 .$$

Notons d'ailleurs que

$$(1.32) \quad P(x, y, t) + P(y, x, t) = 0 .$$

En effet cela revient à montrer que, $\forall h, \tilde{h} \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$(1.32 \text{ bis}) \quad (Ph, \tilde{h}) + (P\tilde{h}, h) = 0 .$$

Or soit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ la solution du système analogue à (1.15) avec \tilde{h} au lieu de h . Prenant le produit scalaire de la 1ère équation (1.15) avec $\tilde{\varphi}_2$ et intégrant par parties, il vient :

(1) La symétrie n'étant utile que plus loin.

(2) Dans le cas de (1.29) si A est d'ordre $2m$, le problème de départ étant celui de Dirichlet, on a :

$$\frac{\partial^j}{\partial n_x^j} P(x, y, t) = 0 \quad x \in \Gamma , y \in \Omega , t > 0 , 0 \leq j \leq m-1 .$$

(3) Et, dans le cas de la note ⁽²⁾ précédente, $\frac{\partial^j}{\partial n_y^j} P(x, y, t) = 0 , x \in \Omega , y \in \Gamma , t > 0 , 0 \leq j \leq m-1 .$

$$0 = (\varphi_1(s), \tilde{\varphi}_2(s)) + \int_{\Omega \times]0, s[} \varphi_1 \left(-\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2 \right) dx dt + \\ + \int_{\Omega \times]0, s[} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \tilde{\varphi}_2 dx dt$$

et comme

$$-\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} \quad ,$$

On en déduit

$$(1.33) \quad (\varphi_1(s), \tilde{\varphi}_2(s)) = (P(s)h, \tilde{h}) = \int_{\Omega \times]0, s[} \left(\varphi_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \tilde{\varphi}_2 \right) dx dt .$$

La propriété (1.32 bis) en résulte.

Condition initiale :

la condition $u_1(0) = 0$ donne

$$(1.34) \quad P(x, y, 0) = 0 .$$

EN RESUME, on a montré l'existence d'une fonction $P(x, y, t)$ vérifiant (1.24), (1.30) (1.31) et (1.34), l'opérateur $P(t) : \varphi \rightarrow \int_{\Omega} P(x, y, t) \varphi(y) dy$ étant linéaire continu de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, et dépendant différenciablement de t dans l'espace $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); L^2(\Omega))$ muni de la topologie de la convergence simple forte. En outre $P(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ et dépend continûment de t dans cet espace muni de la topologie simple forte.

En effet si dans (1.10)(1.11)(1.12)(1.4) on prend $k \in L^2(\Omega)$, on se ramène au problème (1.1)...(1.5) avec $f_1 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, ce qui suffit (tant que l'on ne fait pas $\varepsilon \rightarrow 0$).

UNICITÉ : partant d'une solution P , on résout

$$(1.35) \quad \begin{cases} -\frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}(P u_2) = 0 , \\ u_2(T) = k , u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0, T[\end{cases}$$

qui admet une solution unique car

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (Pu_2), u_2 \right) \right| = \left| (Pu_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \right| \leq c \|u_2\| \|u_2\| .$$

On définit ensuite

$$(1.36) \quad \hat{u}_1 = Pu_2 .$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} - \varepsilon \Delta \hat{u}_1 + \hat{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon \Delta P + P \right) u_2 + P \left(-\varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} Pu_2 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et comme $\hat{u}_1(0) = 0$ et $\hat{u}_1 = 0$ sur $\Gamma \times]0, T[$, on a : $\hat{u}_1 = u_1$, $\{u_1, u_2\}$ solution de (1.10)(1.11)(1.12)(1.4). Donc si P et P* sont deux solutions éventuelles du problème, on a la même solution u_2 pour (1.35) et

$$(1.37) \quad \begin{cases} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_2 + u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} (P^* u_2) = 0 , \\ u_2(T) = k, u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0, T[. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (Pu_2 - P^* u_2) = 0$$

i.e.

$$Pu_2 - P^* u_2 = m(x_2) .$$

Mais $Pu_2, P^* u_2$ sont seuls sur Γ , donc $m(x_2)$ doit être nulle sur Γ ce qui n'est possible que si $m = 0$. Donc

$$Pu_2 = P^* u_2 \quad \text{p.p.}$$

donc

$$Pk = P^* k \quad \forall k$$

donc

$$P = P^* .$$

On a donc obtenu l'existence et l'unicité de P.

PROBLÈME OUVERT :

Peut-on faire une étude directe de l'équation (1.24) (et considérer des deuxièmes membres moins particuliers) ? Pour une telle étude dans le cas des équations de Riccati du contrôle optimale (Remarque 1.5), cf. [1] [2] [8].

2. Un problème linéaire de perturbation singulière.

Notre objet est maintenant d'étudier le comportement de $P = P_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On étudie pour cela d'abord le système (1.1)...(1.5).

2.1. Résultat relatif au système (1.1)...(1.5).

On suppose Ω comme sur Fig.1 (pour simplifier l'exposé) et on désigne maintenant par $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}$ la solution de (1.1)...(1.5).

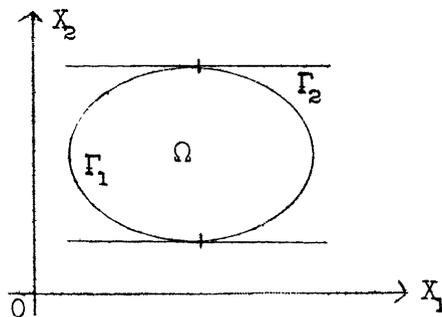


Fig.1

Soit par ailleurs u_1, u_2 la solution ⁽¹⁾ de

$$(2.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1,$$

$$(2.2) \quad -\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2,$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\end{cases}$$

$$(2.4) \quad u_1(x, 0) = 0, u_2(x, T) = 0.$$

On va montrer que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} \rightarrow u_i \\ \frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} & \text{dans } L^2(\Omega \times]0, T[) \text{ faible,} \end{cases}$$

(1) Les démonstrations qui suivent montreront l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).

$$(2.6) \quad \begin{cases} \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) \text{ et } \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) \rightarrow \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + u_2) \text{ et} \\ \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 - u_2) \text{ dans } L^2(\Omega \times]0, T[) \text{ faible} \end{cases}$$

où θ_1 (resp. θ_2) est nulle au voisinage de Γ_2 (resp. Γ_1).

2.2. Estimations a priori (I)

Nous avons, d'après (1.8) (1.9) :

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} \text{ (resp. } \sqrt{\varepsilon} u_{i\varepsilon}) \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega \times]0, T[) \\ \text{(resp. de } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases}$$

Prenons ensuite le produit scalaire de (1.1) (resp. 1.2) avec $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ (resp. $-\frac{\partial u_2}{\partial t}$) (1), il vient après intégration sur $\Omega \times]0, T[$:

$$(2.8) \quad \int_0^T \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|^2 \right] dt + \frac{\varepsilon}{2} \left[\|u_1(T)\|^2 + \|u_2(0)\|^2 \right] + \\ + \frac{1}{2} \|u_1(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_2(0)\|^2 + X = \int_0^T \left[\left(f_1, \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \left(f_2, \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] dt$$

où

$$X = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) dx dt .$$

Mais, par intégration par parties (on vérifie que c'est loisible) $X = 0$ de sorte que (2.8) donne

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega \times]0, T[) \\ \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases}$$

1) On écrit u_i au lieu de $u_{i\varepsilon}$.

2.3. Estimations a priori (II)

On pose

$$(2.10) \quad \varepsilon_{1\varepsilon} = f_1 - \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{2\varepsilon} = f_2 + \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t}.$$

D'après (2.9) on a

$$(2.11) \quad \varepsilon_{1\varepsilon} \in \text{borné de } L^2(\Omega \times]0, T[).$$

On écrit (1.1) (1.2) sous la forme

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} + \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x_1} &= \varepsilon_{1\varepsilon}, \\ -\varepsilon \Delta u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} + \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial x_1} &= \varepsilon_{2\varepsilon} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$(2.12) \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta (u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) + (u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) = \varepsilon_{1\varepsilon} + \varepsilon_{2\varepsilon}, \\ -\varepsilon \Delta (u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) + (u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) = \varepsilon_{1\varepsilon} - \varepsilon_{2\varepsilon}. \end{cases}$$

d'où l'on déduit (t jouant alors le rôle de paramètre) que

$$(2.13) \quad \begin{cases} \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} + u_{2\varepsilon}) \text{ et } \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) \text{ demeurant dans un} \\ \text{borné de } L^2(\Omega \times]0, T[) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases}$$

On en déduit aussitôt le résultat (2.5)(2.6).

3. Perturbations singulières non-linéaires.3.1. Découplage du problème limite.

Le raisonnement fait au n°1 s'adapte aussitôt à la situation du système (2.1). (2.4) avec une différence sensible dans les conditions aux limites. Plus précisément, on considère le problème

$$(3.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(3.2) \quad -\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 ,$$

$$(3.3) \quad u_1 + u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times]0, T[, \quad u_1 - u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times]0, T[,$$

$$(3.4) \quad u_1(x, 0) = 0 , \quad u_2(x, T) = k(x) .$$

On a alors

$$(3.5) \quad u_1 = Pu_2$$

et P satisfait à :

$$(3.6) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \int_{\Omega} P(x, \xi, t) \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi, y, t) d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) .$$

Comme $u_1(0) = 0$ la condition initiale est

$$(3.7) \quad P(x, y, 0) = 0 .$$

Conditions aux limites.

On doit avoir

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_1 \text{ donc}$$

$$\int_{\Omega} P(x, y, t) u_2(y, t) dy + u_2(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_1 , \text{ donc}$$

$$(3.8) \quad P(x, y, t) = -\delta(x-y) \text{ si } x \in \Gamma_1 , y \in \Omega$$

et de même la condition $u_1 - u_2 = 0$ si $x \in \Gamma_2$ donne

$$(3.9) \quad P(x, y, t) = \delta(x-y) \text{ si } x \in \Gamma_2 , y \in \Omega .$$

Par ailleurs

$$(3.10) \quad P(x, y, t) + P(y, x, t) = 0 .$$

En résumé, il existe P solution de (3.6)(3.7)(3.8)(3.9)(3.10) P étant continu de $[0, T] \rightarrow \mathcal{L}(I^2(\Omega); I^2(\Omega))$ muni de la topologie de la convergence simple forte.

L'unicité, très probable, n'est pas démontrée de façon satisfaisante.

3.2. Convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On a maintenant le résultat : lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $P_\varepsilon(x,y,t)$, solution de (1.24) (1.30)(1.31)(1.34) converge vers $P(x,y,t)$, solution de (3.6)...(3.10) la convergence ayant lieu au sens suivant :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} P_\varepsilon(x,y,t) h(y) dy \rightarrow \int_{\Omega} P(x,y,t) h(y) dy , \\ \\ \forall h \in H_0^1(\Omega) , \quad \forall t \in [0, T[. \\ \\ \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

En effet, d'après ce qu'on a vu, on se réduit à la situation du N°2 et (3.11) résulte de (2.5).

Remarque 3.1.

Bien que P_ε satisfasse à la condition HOMOGENE (1.30), on obtient à la limite pour P des conditions NON HOMOGENES (3.8)(3.9) .

Remarque 3.2.

Dans le cas de la dimension 1 ($\Omega =]0,1[$), (cas des équations (1)...(4) de l'Introduction) on obtient à la limite

$$\frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \int_0^1 P(x,\xi,t) \frac{\partial P}{\partial \xi}(\xi,y,t) d\xi = -\frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) ,$$

$$P(0,y,t) = -\delta(y) ,$$

$$P(1,y,t) = \delta(y)$$

$$P(x,y,t) + P(y,x,t) = 0 .$$

4. Variantes.

On peut appliquer les mêmes méthodes en partant d'autres problèmes linéaires de perturbation singulière.

Par exemple, si l'on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et le problème

$$(4.1) \quad \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial x_i} = f_1 ,$$

$$(4.2) \quad -\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial x_i} = f_2 ,$$

avec $u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0$ sur $\Gamma \times]0, T[$, $u_{1\varepsilon}(0) = 0$, $u_{2\varepsilon}(T) = 0$,

où les b_i sont des constantes réelles, on est conduit à l'équation

$$(4.3) \quad \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon(\Delta_x + \Delta_y)P_\varepsilon + 2P_\varepsilon + \sum_{i=1}^n b_i \int_{\Omega} P_\varepsilon(x, \xi, t) \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \xi_i}(\xi, y, t) d\xi =$$

$$= - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x - y)$$

avec

$$(4.4) \quad P_\varepsilon(x, y, t) = 0 \quad \text{si } x \in \Gamma, y \in \Omega, t \in]0, T[,$$

$$(4.5) \quad P_\varepsilon(x, y, t) + P_\varepsilon(y, x, t) = 0 ,$$

et la condition initiale

$$(4.6) \quad P_\varepsilon(x, y, 0) = 0 .$$

Le problème limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est

$$(4.7) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = f_1 ,$$

$$(4.8) \quad -\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = f_2$$

avec les conditions aux limites :

$$(4.9) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n b_i \cos n_i < 0 \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n b_i \cos n_i > 0 \end{cases} \quad (1)$$

et $u_1(0) = 0$, $u_2(T) = 0$.

1) Les $\cos n_i$ désignent les cosinus directeurs de la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Le découplage de ce dernier problème conduit à

$$(4.10) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \sum_{i=1}^n b_i \int_{\Omega} P(x, \xi, t) \frac{\partial P}{\partial \xi_i}(\xi, y, t) d\xi = - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x-y)$$

avec

$$(4.11) \quad \begin{cases} P(x, y, t) = -\delta(x-y) & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \sum_{i=1}^n b_i \cos n_i(x) < 0, y \in \Omega \\ P(x, y, t) = \delta(x-y) & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \sum_{i=1}^n b_i \cos n_i(x) > 0, y \in \Omega \end{cases}$$

et

$$(4.12) \quad P(x, y, 0) = 0 .$$

On peut également considérer des problèmes linéaires d'ordre supérieur, par exemple

$$(4.13) \quad \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 u_{1\varepsilon} + u_{1\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_{2\varepsilon} = f_1$$

$$(4.14) \quad -\frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 u_{2\varepsilon} + u_{2\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_{1\varepsilon} = f_2$$

avec les conditions aux limites

$$(4.15) \quad u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \frac{\partial u_{1\varepsilon}}{\partial n}, \frac{\partial u_{2\varepsilon}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0, T[,$$

$$(4.16) \quad u_{1\varepsilon}(0) = 0, u_{2\varepsilon}(T) = 0 .$$

Le découplage conduit à

$$(4.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon (\Delta_x^2 P_\varepsilon + \Delta_y^2 P_\varepsilon) + 2P_\varepsilon - \int_{\Omega} P_\varepsilon(x, \xi, t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Delta_\xi P_\varepsilon(\xi, y, t) d\xi = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_x \delta(x-y) \end{cases}$$

avec

$$(4.18) \quad P_\varepsilon(x,y,t) = \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y,t) = 0 \quad \text{si } x \in \Gamma, y \in \Omega, t \in]0, T[,$$

$$(4.19) \quad P_\varepsilon(x,y,t) + P_\varepsilon(y,x,t) = 0$$

et

$$(4.20) \quad P_\varepsilon(x,y,0) = 0 .$$

Le problème limite pour $\{u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}\}$ est

$$(4.21) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_2 = f_1 , \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_1 = f_2 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(4.22) \quad \begin{cases} u_1, u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \\ \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{si } \cos n_1 < 0, \quad \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{si } \cos n_1 > 0 \end{cases}$$

et $u_1(0) = 0, u_2(T) = 0 .$

Le découplage conduit à

$$(4.23) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + 2P - \int_{\Omega} P(x,\xi,t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Delta_{\xi} P(\xi,y,t) d\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_x \delta(x-y)$$

avec les conditions aux limites

$$(4.24) \quad \begin{cases} P(x,y,t) = 0 \quad \text{si } x \in \Gamma, y \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial n_x}(x,y,t) = -\frac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \quad \text{si } x \in \Gamma, \cos n_1 < 0, y \in \Omega \quad (1) \\ \frac{\partial P}{\partial n_x}(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \quad \text{si } x \in \Gamma, \cos n_1 > 0, y \in \Omega \end{cases}$$

1) $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial n} \delta(x-y) \varphi(y) dy = \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)$ par définition

$$(4.28) \quad \begin{cases} P_\varepsilon = Q_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial(\Omega \times \Omega) \times]0, T[, \\ P_\varepsilon(x, y, 0) = Q_\varepsilon(x, y, 0) = 0 . \end{cases}$$

On vérifie que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_{i\varepsilon} \rightarrow u_i$, $\frac{\partial u_{i\varepsilon}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t}$ dans $L^2(\Omega \times]0, T[)$, $i = 1, 2, 3$, où u_i est la solution de

$$(4.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1 , \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + u_3) = f_2 , \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 = f_3 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(4.30) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 \sqrt{2} + u_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (\text{notations du N}^\circ 3) \\ u_1 - u_2 \sqrt{2} + u_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

et

$$u_1(0) = u_3(0) = 0, \quad u_2(T) = 0 .$$

les identités $u_1 = Pu_2$, $u_3 = Qu_2$ (pour le problème correspondant avec $f_i = 0$ et $u_2(T) = k$) conduisent à

$$(4.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + 2P + \int_{\Omega} Q(x, \xi, t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P(\xi, y, t) + Q(\xi, y, t)] d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + 2Q + \int_{\Omega} Q(x, \xi, t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} [P(\xi, y, t) + Q(\xi, y, t)] d\xi = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x-y) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(4.32) \quad \begin{cases} P(x, y, t) + Q(x, y, t) = -\sqrt{2} \delta(x-y) \text{ si } x \in \Gamma_1, y \in \Omega, \\ P(x, y, t) + Q(x, y, t) = \sqrt{2} \delta(x-y) \text{ si } x \in \Gamma_2, y \in \Omega \end{cases}$$

et

$$(4.33) \quad P(x, y, t) = Q(x, y, 0) = 0 .$$

Remarque 4.1

Des développements asymptotiques (cf. [9] [4]) relatifs, par exemple au problème (4.1) (4.2) doivent conduire, après découplage, à des développements asymptotiques pour P_ε , mais nous n'avons pas surmonté jusqu'ici toutes les difficultés techniques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BRÉZIS, Semi groupes non linéaires et applications. A paraître.
- [2] G. DA PRATO, Equations d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et application à des équations quasi linéaires. J. Math. Pures et Appl. 48 (1969), 59-107.
- [3] J.L. LIONS, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris, Dunod, Gauthier Villars, 1968.
- [4] J.L. LIONS, Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. Symp. non linear Functional Analysis, Madison, Avril 1971.- et Note C.R. Acad. Sc. Paris, 272 (1971), 995-998.
- [5] J.L. LIONS et E. MAGENS, Problèmes aux limites non homogènes, Vol. 1, 2, Paris, Dunod, 1968.
- [6] L. SCHWARTZ, Théorie des noyaux, Proc. Int. Congress of Mathematicians, 1950, 1, 220-230.
- [7] S.L. SOBOLEV, Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la Physique Mathématique, Leningrad, 1950.
- [8] R. TEMAN, Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés, en dimension infinie, J. Func. Analysis, 7 (1971), 85-115.
- [9] M.I. VISIK et L.A. LYUSTERNIK, Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, Uspekhi Mat. Nank. 12(1957), 3-122 ; Amer. Math. Soc. Trans. Series, 2, 20, (1962), 239-364.