Luc Tartar

Un théorème de trace non linéaire

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A3_0>

UN THÉORÈME DE TRACE NON LINÉAIRE

par Luc TARTAR

. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Q désignera le cylindre $\Omega \times]0,\infty[$. On considère l'ensemble des fonctions $u(x,t)$ définies dans Q et vérifiant :

(1) $$u^3(x,t) \quad , \quad u^2(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in L^2(Q)$$

c'est-à-dire

(1 bis) $$\begin{cases} u^3 \in L^2(0,\infty;H^1(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \,. \end{cases}$$

Le problème considéré ici est de définir la trace de u sur l'hyperplan $t = 0$, et de caractériser l'ensemble parcouru par la trace $u(0)$ quand u parcourt l'ensemble des u vérifiant (1).

Avant d'énoncer le théorème, il est nécessaire de rappeler quelques résultats d'interpolation linéaire et non linéaire.

Rappels :

Si $A_0 \subset A_1$ sont deux espaces de Hilbert, on note $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$ l'espace parcouru par $u(0)$ quand u parcourt l'espace W des fonctions vérifiant

(2) $$\begin{cases} u \in L^2(0,\infty;A_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty;A_1) \,. \end{cases}$$

On munit W de la norme

(3) $$\|u\|_W = \left(\|u\|^2_{L^2(0,\infty;A_0)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,\infty;A_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$ de la norme quotient qui en fait un espace de Hilbert. Naturellement

(4) $$A_0 \subset [A_0,A_1]_{\frac{1}{2}} \subset A_1 \,.$$

Exemple 1 :

$$A_0 = H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

$$A_1 = L^2(\Omega) \,.$$

Alors $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$ est noté $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et, si Ω est régulier, on peut montrer qu'il coïncide avec l'espace de $u \in L^2(\Omega)$ tels que

(5) $$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+1}}\,dxdy < +\infty \,.$$

Exemple 2 :

Si X est un espace localement compact muni d'une mesure de radon positive μ on peut définir les espaces de Hilbert $L^2(X,\mu;A_0)$ espaces des (classes d')applications μ-mesurables de X dans A_0 dont la norme appartient à $L^2(X,\mu)$.

(On n'utilisera plus loin que le cas où $X = \mathbb{Z}$ muni d'une mesure discrète).
Alors on a

(7) $$[L^2(X,\mu;A_0), L^2(X,\mu;A_1]_{\frac{1}{2}} = L^2(X,\mu;[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}})$$

Les espaces ainsi définis ont la propriété d'interpolation non linéaire suivante:

PROPOSITION 1. Si T est une application non linéaire de A_1 dans B_1 qui applique aussi A_0 dans B_0 et qui vérifie

(8) $$\begin{cases} \|Ta_0\|_{B_0} \leqq c\|a_0\|_{A_0} & \forall\ a_0 \in A_0 \\ \|Ta_1 - Tb\|_{B_1} \leqq c\|a-b\|_{A_1} & \forall\ a,b \in A_1 \end{cases}.$$

Alors T applique $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$ dans $[B_0,B_1]_{\frac{1}{2}}$ avec

(9) $$\|Ta\|_{[B_0,B_1]_{\frac{1}{2}}} \leqq c'\|a\|_{[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}}.$$

Nous aurons encore besoin d'un résultat très simple concernant $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$.

PROPOSITION 2. Si u vérifie (2) et $u(0) = a$, alors on a :

(10) $$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}} \leqq c\|u\|^{\frac{1}{2}}_{[L^2(0,\infty;A_0)} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,\infty;A_1)} ;$$

si $a \in [A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}$ et $\lambda > 0$, alors on peut trouver u vérifiant (2) et $u(0) = a$ avec

(11) $$\begin{cases} \|u\|_{L^2(0,\infty;A_0)} \leqq c\lambda\ \|a\|_{[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}} \\ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(0,\infty;A_1)} \leqq c\lambda^{-1}\|a\|_{[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}}} \end{cases}.$$

THÉORÈME. Soit u vérifiant (1 bis) alors $u(0) = a$ vérifie

(12) $$|a|a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

et

(13) $$\|\ |a|a\ \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leqq c\|u^3\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,\infty;H^1(\Omega))} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}$$

Soit a vérifiant (12), Alors il existe u satisfaisant (1 bis) et $u(0) = a$.

On peut choisir u de manière que

$$(14)\qquad \begin{cases} \|u^3\|_{L^2(0,\infty;H^1(\Omega))} \leq c\| \, |a|a \, \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} , \\ \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))} \leq c\| \, |a|a \, \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} . \end{cases}$$

La démonstration est assez longue et sera divisée en plusieurs étapes.

PREMIÈRE PARTIE

On se donne u vérifiant (1 bis) et on veut caractériser $u(0) = a$.

1ère étape

On peut se ramener au cas $u \geqq 0$.

. En effet l'application $u \to u_+$ est lipschitzienne et donc

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} u_+\right| \leqq \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| .$$

De même

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} u_+^3\right| \leqq \left|\frac{\partial}{\partial x_i} u^3\right|$$

et par conséquent u_+ vérifie (1 bis). Si on démontre le théorème pour u_+ on aura montré que $|a_+|a_+ = a_+^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. De même pour u_- et donc $a_-^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Comme $|a| = a_+^2 - a_-^2$ on aura le théorème pour u . De plus ces manipulations donnent aussi l'inégalité (13) si on l'a démontrée pour u_+ .

2ème étape

On suppose maintenant $u \geqq 0$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ définissons la fonction h_k par

$$(15)\qquad \begin{cases} h_k \text{ linéaire par morceaux, } h_k(0) = h_k(2^k) = h_k(2^{k+3}) = 0 , \\ h_k(2^{k+1}) = 2^{k+1} \; ; \; h_k(2^{k+2}) = 2^{k+2} . \end{cases}$$

On a

$$(16)\qquad \begin{cases} |h_k'(t)| \leq 2 \quad \text{et} \quad h_k(t) \leq 2^{k+2} , \\ \sigma = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\sigma) \quad \text{si} \quad \sigma \geqq 0 . \end{cases}$$

On pose

$$(17)\qquad v_k(x,t) = h_k^2(u(x,t)) .$$

Alors, d'après (16), on a

$$(18)\qquad u^2(x,0) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} v_k(x,0) .$$

Il s'agit d'évaluer $\|v_k(0)\|_{H^{\frac{1}{2}}}$

$$|\frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t)| = 2|h_k(u(x,t))|\ |h_k'(u(x,t))|\ |\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|$$

Par conséquent

$$|\frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t)| \leqq \begin{cases} 2.2^{k+2}.2|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)| & \text{si } u(x,t)\in[2^k,2^{k+3}] , \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\int_\Omega |\frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t)|^2 dx \leqq 2^{2k+8}\int_{X_k} |\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|^2 dx \quad ,$$

l'intégrale étant étendue aux points x tels que $u(x,t) \in [2^k.2^{k+3}]$.

Comme $X_k \cap X_{k+3} = \emptyset$, on peut sommer en k , après avoir multiplié par 2^{-2k}. On obtient

$$\sum_k 2^{-2k} \int_\Omega |\frac{\partial v_k}{\partial t}(x,t)|^2 dx \leqq 2^8.3 \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 dx \ .$$

On peut ensuite intégrer en t .

En résumé, on a

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_k}{\partial t} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) , \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2k}\|\dfrac{\partial v_k}{\partial t}\|^2_{L^2(0,\infty;L^2)} \leqq c\|\dfrac{\partial u}{\partial t}\|^2_{L^2(0,\infty;L^2)} , \end{cases}$$

$$|v_k(x,t)| \leqq \begin{cases} 2^{k+2}|u(x,t)| & \text{si } u(x,t) \in [2^k,2^{k+3}], \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

mais si $u(x,t) \in [2^k,2^{k+3}]$ on a $2^{k+2}|u(x,t)| \leqq |u^3(x,t)|2^{-k+2}$.

De même

$$|\frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x,t)| \leqq \begin{cases} 4.2^{k+2}|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)| & \text{si } u(x,t) \in [2^k,2^{k+3}] , \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

et si $u(x,t) \in [2^k,2^{k+3}]$ on a $4\ 2^{k+2}|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)| \leqq |3u^2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)|\frac{4}{3}\ 2^{-k+2}$.

Alors comme pour $\frac{\partial v_k}{\partial t}$ on déduit

$$(20) \quad \begin{cases} v_k \in L^2(0,\infty;H^1(\Omega)), \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\|v_k\|^2_{L^2(0,\infty;H^1(\Omega))} \leqq c\|u^3\|^2_{L^2(0,\infty;H^1(\Omega))} , \end{cases}$$

(19) et (20) entraînent que $v_k(0) \in H^{\frac{1}{2}}$ et

$$\|v_k(0)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c\|v_k\|_{L^2(0,\infty;H^1)} \left\|\frac{\partial v_k}{\partial t}\right\|_{L^2(0,\infty;L^2)} .$$

D'où

$$(21) \begin{cases} v_k(0) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) , \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|v_k(0)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq c\|u^3\|_{L^2(0,\infty;H^1)} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(0,\infty;L^2)} . \end{cases}$$

Alors (13) sera conséquence de (18) $u^2(0) = \sup\limits_k v_k(0)$ et du lemme suivant.

<u>3ème étage</u>

LEMME 1. <u>Si</u> $a_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ <u>pour</u> $k\in\mathbb{Z}$ <u>et</u> $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} < +\infty$. <u>Alors</u>

$$a = \sup_k a_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \underline{\text{et}} \quad \|a\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

<u>Démonstration</u>. On considère l'application $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \sup a_k$. Il est facile de voir que si $\Sigma\|a_k\|^2_{L^2} < +\infty$ alors $\sup a_k \in L^2$ et que si $\Sigma\|a_k\|^2_{H^1} < +\infty$ alors $\sup a_k \in H^1$.

Plus précisément sup envoie $A_0 = \ell^2(H^1)$ dans H^1 et $A_1 = \ell^2(L^2)$ dans L^2 . Utilisant le fait que $|\sup a_k - \sup b_k| \leq \sup|a_k - b_k|$ on voit que l'application sup vérifie les conditions de la proposition 1 et donc envoie $[\ell^2(A_0),\ell^2(A_1)]_{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire $\ell^2(H^{\frac{1}{2}})$ dans $[A_0,A_1]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}$, d'où le lemme.

DEUXIÈME PARTIE

On se donne a vérifiant $|a|a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

<u>1ère étape</u>

Il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème dans le cas où a est $\geqq 0$.

En effet, si $|a|a \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, a_+ vérifie $a_+^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (c'est une conséquence de la proposition 1 et du fait que l'application $\varphi \to \varphi_+$ envoie $H^1(\Omega)$ dans lui-même et est une contraction sur $L^2(\Omega)$).

Alors on aura :

$$a_+ = u(0) \quad \text{avec} \quad u \quad \text{vérifiant (1 bis) et (14) et} \quad u \geqq 0 ,$$

$$a_- = v(0) \quad \text{avec} \quad v \quad \text{vérifiant (1 bis) et (14) et} \quad v \geqq 0 .$$

Alors on aura :

$$a = w(0) \quad \text{avec} \quad w \quad \text{vérifiant (1 bis) et (14)} ,$$

où w est définie ci-après

$$w = F(u,v) \quad F \text{ définie dans le quadrant } u \geqq 0 \,,\; v \geqq 0 :$$

$$F(u,v) = \begin{cases} (u^3+v^3)^{1/3} & \text{si } v \leqq \frac{u}{2}\,, \\ -(u^3+v^3)^{1/3} & \text{si } v \geqq 2u\,, \\ \text{linéaire} & \text{si } \frac{u}{2} \leqq v \leqq 2u\,. \end{cases} \tag{22}$$

Alors on a :

$$\begin{cases} F(u,0) = u \quad ; \quad F(0,v) = -v\,, \\ \left|\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right| \leqq c\,, \\ \left|\frac{F^2}{u^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right| + \left|\frac{F^2}{v^2}\frac{\partial F}{\partial v}\right| \leqq c\,. \end{cases} \tag{23}$$

Ces propriétés entraînent que si u et v vérifient (1 bis) et (14) ainsi que $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, alors w vérifie (1 bis) et (14).

<u>2ème étape</u>

On suppose $a \geqq 0$ et on cherche $u \geqq 0$ vérifiant (14).

On pose

$$a_k = h_k(a) = h_k(\sqrt{a^2})\,. \tag{24}$$

On a

$$a_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \text{et} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\|a_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leqq c\|a^2\|^2_{H^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{25}$$

La démonstration de (25) fait l'objet de la troisième étape.

On a :

$$0 \leqq a_k \leqq 2^{k+2} \quad \text{par formation.}$$

Comme $a_k \in H^{\frac{1}{2}}$ on peut le relever par une fonction u_k vérifiant (cf. Proposition 2)

$$\begin{cases} \|u_k\|_{L^2(0,\infty;H^1)} \leqq c\, 2^{-k}\|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}\,, \\ \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|_{L^2(0,\infty;L^2)} \leqq c\, 2^{k}\|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}\,. \end{cases} \tag{26}$$

Comme $0 \leqq a \leqq 2^{k+2}$ on peut tronquer u_k à 0 et 2^{k+2} (ce qui ne change pas la nature des inégalités (26)

$$0 \leqq u_k \leqq 2^{k+2}\,. \tag{27}$$

Alors $u_k^3 \leq 2^{2k+4} u_k$ et donc $\|u_k^3\|_{L^2(0,\infty;H^1)} \leq c\, 2^k \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}}$.

De même

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} u_k^3\right| \leq 3.2^{2k+4}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right| ,$$

et donc on a

(28) $$\|u_k^3\|_{L^2(0,T;H^1)} \leq c.2^k \|a_k\|_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

On pose alors

(29) $$u = \sup_k u_k .$$

et donc

$$u^3 = \sup_k u_k^3 .$$

Comme $\sum_k 2^{2k}\|a_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}}$ on obtient, comme au lemme 1, $u^3 \in L^2(0,\infty;H^1)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty;L^2)$ et

(30) $$\|u^3\|^2_{L^2(0,\infty;H^1)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,\infty;L^2)} \leq c \sum_k 2^{2k}\|a_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c\|a^2\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

<u>3ème étape</u>

LEMME 2. <u>Si</u> $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ <u>et</u> $b_k = h_k(\sqrt{b_+})$ <u>alors</u> $b_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ <u>et</u>

$$\sum_{k\in Z} 2^{2k}\|b_k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c\|b\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

<u>Alors</u> (25) <u>est tout simplement le lemme</u> 2 <u>appliqué à</u> $b = a^2$.

<u>Démonstration</u>. Désignons par $\tilde{\ell}^2(Y)$ l'ensemble des suites $y_k (h\in Z)$ de Y telles que $\sum_k 2^{2k}\|a_k\|_Y^2 < +\infty$.

Soit $b \in L^2(\Omega)$ alors $h_k(\sqrt{b_+(x)}) \leq \begin{cases} \sqrt{b+(x)} & \text{si } b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}] , \\ 0 & \text{sinon} , \end{cases}$

mais si $b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}]$ on a $\sqrt{b_+(x)} \leq \frac{|b(x)|}{2^k}$. Par conséquent si $b \in L^2(\Omega)$, on a

$$(h_k(\sqrt{b_+}))_{k\in Z} \in \tilde{\ell}^2(L^2(\Omega)) = A_1 \quad \text{et} \quad \|h_k(\sqrt{b_+})\|_{A_1} \leq c\|b\|_{L^2} .$$

Si b et $c \in L^2(\Omega)$ alors $|h_k(\sqrt{b_+(x)}) - h_k(\sqrt{c_+(x)})| \leq 2|\sqrt{b_+(x)} - \sqrt{c_+(x)}|$ si $b(x)$ ou $c(x)$ appartient à l'intervalle $[2^{2k}, 2^{2k+6}]$. Mais

$$|\sqrt{b_+} - \sqrt{c_+}| = \frac{|b_+ - c_+|}{\sqrt{b_+} + \sqrt{c_+}} \leq \frac{1}{2^k}|b_+ - c_+| ,$$

car $\sqrt{b_+} + \sqrt{c_+} \geq 2^k$. Donc on a

$$|h_k(\sqrt{b_+}) - h_k(\sqrt{c_+})| \leq \begin{cases} 2.2^{-k}|b-c|, & \text{si } b(x) \text{ ou } c(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}], \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\|h_k(\sqrt{b_+}) - h_k(\sqrt{c_+})\|_{A_1} \leq c\|b-c\|_{L^2}.$$

Soit $b \in H^1(\Omega)$ alors

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(h_k(\sqrt{b_+(x)}))\right| \leq |h_k'(\sqrt{b_+(x)})| \left|\frac{\partial b}{\partial x_i}(x)\right| \frac{1}{\sqrt{b_+(x)}} \quad \text{si } b \geq 0$$

donc

$$\leq 2.2^{-k}\left|\frac{\partial b}{\partial x_i}(x)\right| \quad \text{si } b(x) \in [2^{2k}, 2^{2k+6}].$$

Donc si $b \in H^1(\Omega)$, on a

$$(h_k(\sqrt{b_+}))_{k \in \mathbb{Z}} \in \tilde{\ell}^2(H^1(\Omega)) = A_0 \quad \text{avec} \quad \|h_k(\sqrt{b_+})\|_{A_0} \leq c\|b\|_{H^1}.$$

Alors la proposition 1 et l'exemple 2 entraînent que si $b \in H^{\frac{1}{2}}$ alors $h_k(\sqrt{b_+}) \in \tilde{\ell}^2(H^{\frac{1}{2}})$ c'est-à-dire le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

Pour l'interpolation linéaire :

J.L. LIONS-J. PEETRE. Sur une classe d'espaces d'interpolation. I.H.E.S., Publ. Math. 19 (1964), p. 5-68.

J.L. LIONS-E. MAGENES. Problème aux limites non homogènes et applications. Dunod Paris 1968, vol. 1.

Pour l'interpolation non linéaire :

J.L. LIONS. Some remarks on variational inequalities, International Conference on Functional Analysis, Tokyo, avril 1969.

Pour d'autres applications :

L. TARTAR. C.R.A.S. t. 270, pp. 1729-31, 1970.
C.R.A.S. t. 271, pp. 789-91, 1970
Thèse, Paris, 1971.