Frédéric Pham

Formules de Picard-Lefschetz

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1969), p. 15-22
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969___3_15_0>

FORMULES DE PICARD-LEFSCHETZ

par Frédéric PHAM

(exposé fait le 12 mars 1969)

On va rappeler quelques généralités sur les formules de Picard-Lefschetz, dans le but d'illustrer un autre aspect du travail d'Arnold (cf. exposé précédent, cité «TRESSES»), la «monodromie des queues d'aronde».

Soit $f : X \to T$ un morphisme propre surjectif de variétés analytiques complexes (lisses). On notera $L \subset T$ l'ensemble des valeurs critiques de f (image de l'ensemble des points où l'application tangente n'est pas surjective). L'espace $X|(T-L) = f^{-1}(T-L)$ est alors un espace fibré localement trivial, à fibres lisses, au-dessus de $T-L$.

Choisissant un point $t \in T-L$, on en déduit un homomorphisme

$$\pi_1(T-L,t) \to \mathrm{Aut}\, H_*(X_t)$$

où $X_t = f^{-1}(t)$, et où H_* désigne l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Cet homomorphisme est appelé «monodromie de f». L'image par la monodromie d'un élément $\sigma \in \pi_1(T-L,t)$ sera notée σ_*.

On se limitera d'abord au cas où T est le plan complexe $\mathbb{C}$ (ou, si l'on préfère, un disque du plan complexe), et où f a un seul point critique x_o, avec $f(x_o) = 0$. Soit $\sigma \in \pi_1(\mathbb{C} - \{0\})$ la classe d'un lacet faisant un tour dans le sens positif autour de 0 et soit $B \subset X$ une boule ouverte suffisamment petite entourant le point critique x_o ; pour $|t|$ assez petit, on notera $B_t = X_t \cap B$. Dans ces conditions, on montre que l'homomorphisme

$$\sigma_* - 1 : H_*(X_t) \to H_*(X_t)$$

(homomorphisme de «variation des cycles»)

se factorise ainsi :

$$\begin{tikzcd} H_*(X_t) \arrow[r, "\sigma_*-1"] \arrow[d, "tr"] & H_*(X_t) \\ H^F_*(B_t) \arrow[r, "\mathrm{Var}"] & H_*(B_t) \arrow[u, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

où i_* est induit par l'inclusion $i : B_t \hookrightarrow X_t$, où H^F_* désigne l'homologie à supports fermés quelconques (et non plus à supports compacts), et où tr est l'homomorphisme défini en associant à toute chaîne de X_t sa «trace» dans la boule ouverte B_t (pour la définition précise, voir [1]) ; l'homomorphisme Var (de «variation») peut se décrire ainsi : un cycle Γ à support fermé quelconque dans B_t est transformé, par la déformation induite par σ, en un cycle Γ', qu'on peut s'arranger pour faire coïncider avec Γ en dehors d'un ouvert relativement compact de B_t ; la différence $\Gamma'-\Gamma$ définit alors un cycle <u>à support compact</u> de B_t.

Grâce à la factorisation précédente, le problème de la monodromie est ramené à un problème <u>local</u>, celui de la détermination de l'homomorphisme Var.

1. <u>Cas du point critique quadratique non dégénéré</u> : <u>formule de Picard-Lefschets classique</u> (voir [1], [2])

C'est le cas où le Hessien de f au point x_o ne s'annule pas. On peut alors choisir au voisinage de x_o des coordonnées locales $z_o, z_1, \ldots, z_n$ (si $\dim X = n+1$) telles que

$$f = z_o^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

et telles que la boule B soit donnée par

$$B : |z_o|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 2 \qquad \text{(disons).}$$

On voit alors facilement que $B_1 = B \cap f^{-1}(1)$ est homéomorphe à un sous-fibré en boules du fibré tangent à la sphère S^n, par un homéomorphisme que l'on peut construire explicitement comme suit :

$$z = (z_o, z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \xi = \frac{\operatorname{Re} z}{\|\operatorname{Re} z\|} \in S^n, \ \operatorname{Im} z \in T_\xi S^n$$

($z.z = 1 \Rightarrow \operatorname{Re} z.\operatorname{Im} z = 0$, de sorte que $\|\xi\| = 1$ et $\xi.\operatorname{Im} z = 0$).
Par conséquent, B_1 <u>a le type d'homotopie de la sphère réelle</u> S^n, de sorte que $H_i(B_1)$ est nulle en toutes dimensions $i \neq 0 \neq n$, et

$$\boxed{H_n(B_1) = \mathbb{Z}}.$$

Un générateur de $H_n(B_1)$ sera noté e, et appelé <u>classe évanouissante</u>.

<u>Formule de Picard-Lefschetz</u> : si $h \in H_n^F(B_1)$,

> Var $h = N\, e$, avec $N = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \langle e, h\rangle$,
>
> où $\langle e,h\rangle$ désigne l'<u>indice d'intersection</u> des classes d'homologie
>
> ($\langle , \rangle : H_n(B_t) \otimes H_n^F(B_t) \to Z$).

Cette formule doit être complétée par la suivante

$$\langle e,e\rangle = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ 2 \times (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & n \text{ pair} \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$\sigma_*^k(h) = \begin{cases} h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} k \langle e,h\rangle e \;, & n \text{ impair} \\ \left.\begin{array}{ll} h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle e,h\rangle e \;, & k \text{ impair} \\ h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & k \text{ pair} \end{array}\right\} & n \text{ pair} \end{cases}$$

2. Cas général du point singulier isolé.

Les résultats qui suivent sont essentiellement une adaptation du travail de MILNOR [3] : on pourra en trouver des démonstrations dans la thèse de 3e cycle de LÊ DŨNG TRÁNG [4], ainsi que dans des notes de BRIESKORN [5].

Si l'origine est un point critique isolé de la fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, l'algèbre $\mathbb{C}[[z_0,z_1,\ldots,z_n]]/(f'_{z_0},f'_{z_1},\ldots,f'_{z_n})$ est de dimension finie comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit μ sa dimension.

THÉORÈME 1. $B_1 = B \cap f^{-1}(1)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères S^n.

COROLLAIRE. $H_i(B_1) = 0$ pour $i \neq 0, n$.

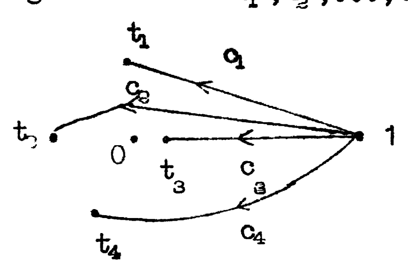
$$H_n(B_1) = \mathbb{Z}^{\mu} .$$

. Soit $f_a : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ une «déformation» de f, par exemple

$$f_a = f + \sum_{i=0}^{n} a_i z_i \tag{1}$$

THÉORÈME 2. Pour un choix «générique» de la déformation (par exemple pour une déformation du type (1) ci-dessus avec a pris dans un ouvert dense de $\mathbb{C}^{n+1}$), le point critique isolé se «résoud» en μ points critiques quadratiques non dégénérés.

Pour une déformation f_a assez proche de f, l'espace $B \cap f_a^{-1}(1)$ reste isotope à lui-même : nous continuerons donc à le désigner par B_1. Soit alors f_a une déformation dont les μ points critiques quadratiques non dégénérés se projettent sur μ valeurs distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_\mu \in \mathbb{C}$. Choisissons dans le plan complexe $\mathbb{C}$ μ chemins $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ joignant 1 à $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ respectivement



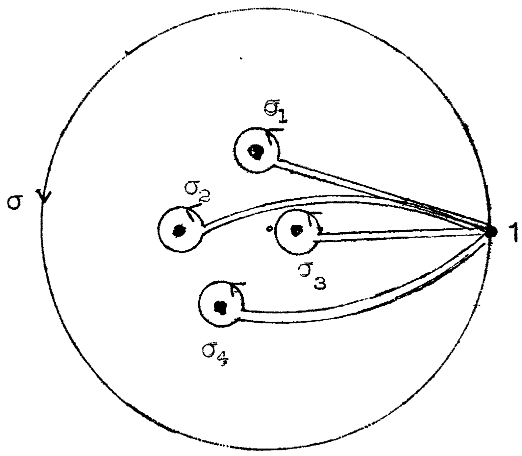
THÉORÈME 3. <u>Le groupe libre</u> $H_n(B_1) = \mathbb{Z}^\mu$ <u>admet une base</u> $(e_1, e_2, \ldots, e_\mu)$ <u>telle que</u>

$$\mathbb{Z}e_i = \operatorname{Ker}(H_n(B_1) \to H_n(B_{c_i})) ,$$

<u>où</u> $B_{c_i} = \{x \in B \mid f_a(x) \in \text{image du chemin } c_i\}$.

La classe e_i est appelée «<u>classe évanouissante associée au chemin</u> c_i ».

Soient alors $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu \in \pi_1(\mathbb{C}-\{t_1, t_2, \ldots, t_\mu\}, 1)$ les lacets qui se déduisent des chemins $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ comme indiqué ci-dessous :



En appliquant à chacun de ces lacets la formule de Picard-Lefschetz du § 1, on trouve :

(2) $$\boxed{\sigma_{i*}h = h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle e_i, h\rangle\, e_i}$$

Ces formules permettent de connaitre la monodromie de f_a <u>si l'on connait la matrice d'intersection</u> $\langle e_i, e_j\rangle$. Connaissant la monodromie de f_a, on en déduit celle de f par la formule $\sigma = \sigma_\mu \sigma_{\mu-1} \cdots \sigma_1$ (vraie si les chemins c_i ont été choisis comme sur la figure).

3. <u>Comment déterminer la matrice d'intersection</u> $\langle e_i, e_j\rangle$ <u>du</u> § 2 ?

On ne connait aucune méthode générale. Une idée, avancée par THOM, consisterait a considérer une famille «universelle» de déformations («<u>déploiement universel de la singularité</u>» dans la terminologie de Thom), et à exploiter les relations entre $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ qui découlent de la connaissance du groupe fondamental de l'espace des paramètres de cette famille universelle : l'idée apparaitra plus clairement sur le cas particulier calculé au § 4 (qui est en réalité le seul cas où je sache faire les calculs).

La notion de «déploiement universel» ne semble pas encore avoir été formulée très clairement dans la littérature*. Dans le cas d'une fonction f à singularité

*) Voir cependant l'ADDENDUM ci-après.

isolée, MATHER m'a dit qu'il pensait pouvoir en donner une bonne formulation, grâce aux méthodes de [6], et il m'a indiqué la recette suivante :

RECETTE DU DÉPLOIEMENT UNIVERSEL*.

- Choisir un système de fonctions holomorphes $u_1, u_2, \ldots, u_\mu \in \mathbb{C}\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ dont les classes dans $\mathbb{C}[[z_0, z_1, \ldots, z_n]]/(f'_{z_0}, f'_{z_1}, \ldots, f'_{z_n})$ forment une base de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Considérer la fonction $F : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}$ qui à (z,a) associe

$$F(z,a) = f(z) + \sum_{i=1}^{\mu} a_i u_i(z).$$

Le morphisme $\Phi : F^{-1}(0) \to \mathbb{C}^\mu$
$(z,a) \mapsto a$

est un déploiement universel de la singularité $f^{-1}(0)$.

Remarque. On peut toujours prendre l'une des fonctions u_i (disons u_μ) égale à 1 ; ainsi l'on voit que $F^{-1}(0)$ est une variété lisse, admettant

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n, a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1})$$

comme système de coordonnées locales.

4. Exemple : le polynome de Brieskorn $f = z_0^{\mu+1} + z_1^2 + \ldots + z_n^2$.

L'idéal $(f'_{z_0}, f'_{z_1}, \ldots, f'_{z_n})$ est égal à $(z_0^\mu, z_1, \ldots, z_n)$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathbb{C}[[z_0, z_1, \ldots, z_n]]/(z_0^\mu, z_1, \ldots, z_n)$$

admet une base formée par les fonctions

$$z_0^{\mu-1}, z_0^{\mu-2}, \ldots, 1 .$$

Le déploiement universel est donc défini par la fonction

$$F = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + P_a(z_0)$$

où

$$P_a(z_0) = z_0^{\mu+1} + a_1 z_0^{\mu-1} + a_2 z_0^{\mu-2} + \ldots + a_\mu$$

est le polynome unitaire générique de degré $\mu+1$ (simplifié par la suppression du terme de degré μ). Le morphisme $\Phi : F^{-1}(0) \to \mathbb{C}^\mu$ n'est autre que le modèle canoni-

*) On me pardonnera peut-etre de donner la «recette» du déploiement universel sans en donner la définition !

que de la singularité «de type $(S_1)^{\mu}$» de Thom [7]. L'ensemble Δ des valeurs critiques de ce morphisme est la «queue d'aronde multidimensionnelle», lieu des zéros du discriminant du polynome générique de degré $\mu+1$ (on obtient la queue d'aronde ordinaire lorsque $\mu = 3$).

Si $D_o \subset \mathbb{C}^{\mu}$ désigne l'axe $\{a_1 = a_2 = \ldots = a_{\mu-1} = 0\}$, la restriction de Φ au-dessus de D_o s'identifie à la fonction de départ $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Si $D \subset \mathbb{C}^{\mu}$ désigne une droite proche de D_o, la restriction de Φ au-dessus de D s'identifie à une déformation de la fonction f, et, pour un choix générique de D, D coupe Δ en μ points distincts, qui sont les μ valeurs critiques de la fonction déformée. En considérant l'homomorphisme naturel $\pi_1(D - \Delta \cap D) \to \pi_1(\mathbb{C}^{\mu} - \Delta)$, on voit que les matrices de Picard-Lefschetz σ_{i*} de $\Phi|D$ (cf. § 2) doivent satisfaire aux relations du groupe $\pi_1(\mathbb{C}^{\mu} - \Delta)$. Or ces relations sont connues grâce à ARNOLD : ce sont les relations du groupe des tresses à $\mu+1$ brins (cf. exposé TRESSES, relations (3) et (4). En imposant ces relations aux formules (2) du § 2, on trouve par un calcul facile* que :

i) la relation (3) de TRESSES implique

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \qquad \text{pour} \quad |i-j| > 1$$

ii) la relation (4) de TRESSES implique

$$\langle e_i, e_{i+1} \rangle = \pm 1$$

(donc $= +1$ pour un choix convenable des orientations des classes évanouissantes $e_1, e_2, \ldots, e_{\mu}$).

Remarque. L'exemple traité ci-dessus a évidemment été choisi ad hoc pour exploiter l'idée d'Arnold sur la monodromie des queues d'aronde. Dans un cas un peu plus général, tel que le cas du polynome

$$f = z_o^{\mu_o} + z_1^{\mu_1} + \ldots + z_1^{\mu_n} ,$$

j'ignore si l'idée du § 3 est encore exploitable (dans [9], la matrice d'intersection de ce cas était calculée «à la main»).

*) Ce calcul est fait dans [8] Chap. V, § 3.10 dans le cas particulier $\mu = 2$.

RÉFÉRENCES

[1] I. FARY. Cohomologie des variétés algébriques, Ann. of Math., séries 2, t. 65 (1957) p. 21-73.

[2] S. LEFSCHETZ. L'analysis Situs et la géométrie algébrique, Paris, Gauthier-Villars 1950 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[3] J. MILNOR. Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61, Princeton (1968).

[4] LÊ DŨNG TRÁNG. Singularités isolées des hypersurfaces complexes. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1969.

[5] E. BRIESKORN. Papier en circulation.

[6] J. MATHER. Stability of differentiable mappings. Ann. of Math. (1968, et à paraître).

[7] V. ARNOLD. Singularités des applications différentiables, Ousp. Mat. Naouk, t. XXIII, 1 (1968) pp. 3-44 (en russe).

[8] F. PHAM. Introduction à l'Etude topologique des Singularités de LANDAU. (Mémorial des Sciences Mathématiques, n° 164) Gauthier-Villars, 1967.

[9] F. PHAM. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. France, 93 (1965) pp. 333-367.

ADDENDUM

(octobre 1969)

La notion de déploiement universel d'une singularité isolée d'espace analytique est étudiée en détail (avec des équations explicites) par

G.N. TURINA dans Déformations plates localement semi-universelles des singularités isolées d'espaces analytiques, à paraître dans les IZVESTIA, série Mathématique, tome 33 (1969) (en russe).

On voit en lisant cet article que la «recette» donnée ci-dessus au § 3 ne donne pas le déploiement universel minimal : pour trouver celui-ci, il faut considérer, au lieu du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[[z_0,z_1,\dots,z_n]]/(f'_{z_0},f'_{z_1},\dots,f'_{z_n})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathbb{C}[[z_0,z_1,\dots,z_n]]/(f,f'_{z_0},f'_{z_1},\dots,f'_{z_n})$$

(ces deux espaces coïncident dans le cas particulier du § 4).