Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

J. Leray
J. L. Lions

Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1964), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964___1_1_0>

QUELQUES RÉSULTATS DE VISIK SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES PAR LES MÉTHODES DE MINTY-BROWDER

par

J. LERAY et J.L. LIONS

Dans des notes aux Doklady de 1961 puis dans un travail récent détaillé, Visik [3] a donné une méthode générale de résolution pour <u>certains</u> problèmes elliptiques non linéaires [Cf. hypothèses du § 2]. M. Visik montre l'existence d'une solution de certains problèmes aux limites

1°) en construisant une solution approchée en dimension finie ;

2°) en passant à la limite par utilisation d'inégalités a priori et de <u>résultats de compacité</u>.

D'un autre côté, Minty [2] a observé - et appliqué à des équations intégrales - que des <u>hypothèses de monotonie</u> convenables permettent d'éviter les résultats de compacité ; Browder [1] a ensuite observé que les idées de Minty pouvaient s'appliquer aux équations elliptiques considérées par Visik et a développé cette idée dans une série de travaux, sans arriver, semble-t-il, à un énoncé contenant tous ceux de Visik.

L'obtention d'un tel énoncé est l'objet de cet exposé ; le paragraphe 1 donne un résultat "abstrait" général, le paragraphe 2 des exemples.

Notons que, <u>de toutes façons</u>, les résultats donnés ici ne dispensent <u>nullement</u> de la lecture du travail de Visik, notamment en ce que, avec des hypothèses supplémentaires sur les coefficients , M. Visik obtient des informations supplémentaires sur la régularité de la solution.

M. L. Schwartz (qui nous a suggéré de remplacer dans (1.1) $\mathrm{Re}(A(v),v)$ par $(A(v),v)$) nous a communiqué une démonstration d'un résultat moins général que le Th. 1 mais sans hypothèse de séparabilité sur V. Des résultats de ce type, avec des démonstrations différentes se trouvent également dans Minty.

§ 1. Résultats généraux

1. Soit V un espace de Banach séparable et réflexif, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; soit (1) V' son dual (ou anti-dual). Soit $\| \ \|$ (resp. $\| \ \|_*$) la norme dans V (resp. V') ; si $v \in V$, $v' \in V'$, (v',v) désigne la valeur de v' en v.

Une application, en général non linéaire, d'un Banach X dans un Banach Y est dite bornée si elle transforme ensembles bornés de X en ensembles bornés de Y.

Le but du § est de montrer le

THÉORÈME 1. Soit $v \to A(v)$ un opérateur borné de $V \to V'$, continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible. On suppose que A est coercitif au sens suivant :

$$(1.1) \qquad \lim_{\|v\| \to \infty} \frac{(A(v),v)}{\|v\|} = \infty \ .$$

Alors, si l'une des hypothèses I,II ci-après a lieu, A est surjectif.

Hypothèse I.

$A(v)$ est monotone i.e. $\mathrm{Re}(A(u) - A(v), u-v) > 0 \quad \forall u,v \in V$.

Hypothèse II.

Il existe une application bornée : $u,v \to A(u,v)$ de $V \times V \to V'$ telle que $A(u,u) = A(u) \quad \forall u \in V$, vérifiant les conditions :

---

1) Le dual d'un Banach séparable est séparable : V' sera donc séparable.

(i) (Continuité et monotonie en v) : $\forall u \in V$, $v \to A(u,v)$ est continue de toute droite de V dans V' faible, et

$$\mathrm{Re}(A(u,u) - A(u,v),\ u-v) \geq 0 \qquad \forall u,\ v \in V ;$$

(ii) (continuité de $A(u,v)$ en u) : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et $(A(u_\mu,u_\mu) - A(u_\mu,u),u_\mu - u) \to 0$; alors $\forall v \in V$, $A(u_\mu,v) \to A(u,v)$ dans V' faible.

(iii) (continuité de $(A(u,v),u)$ en u) : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et $A(u_\mu,v) \to v'$ dans V' faible ; alors

$$(A(u_\mu,v),u_\mu) \to (v',u) .$$

2. <u>Le cas où V est de dimension finie</u>.

Lorsque V est de dimension finie, on montre le résultat en utilisant seulement (1.1). Par changement de norme (ne modifiant pas l'hypothèse) on se ramène au cas où $V = V' = \underline{\underline{R}}^N$ (cas réel pour simplifier) ; soit B_K la boule $\|v\| \leq K$ de bord $S_K = \{v \mid \|v\| = K\}$. Grâce à (1.1), pour K quelconque, on peut choisir R assez grand pour que

$$(2.1) \qquad (A(v),v) \geq KR \quad , \quad \forall v \in S_R \quad \text{(changer } A \text{ en } -A \text{ si nécessaire)} .$$

Alors pour $\vartheta \in]\,0,1\,[$, et $v \in S_R$, on a :

$$\left|(\vartheta\, A(v) + (1-\vartheta)\tfrac{K}{R}\, v,v)\right| \geq KR$$

donc

$$\|\vartheta A(v) + (1-\vartheta)\tfrac{K}{R}\, v\| \geq K \qquad \forall v \in S_R \quad ,$$

et donc le degré topologique sur B_K de la restriction de $\vartheta A + (1-\vartheta)\frac{K}{R} I$ à B_R (I = identité sur V) est égal à 1, d'où le résultat.

<u>Note</u>. Si $V = \underline{\underline{C}}^N$, on commence par déformer A, pour obtenir (2.1) : cf. Browder.

3. <u>Solutions approchées</u> u_m .

Soit $w_1 \ldots w_m \ldots$ une suite de V telle que, pour tout m, $w_1 \ldots w_m$

soient linéairement indépendants et que, V_m désignant l'espace engendré par $w_1 \dots w_m$, $\bigcup_m V_m$ soit dense dans V.

On va vérifier :

$$(3.1)\quad \begin{cases} f \text{ étant donné dans } V', \text{ il existe } u_m \in V_m \text{ tel que} \\ (A(u_m),w) = (f,w) \qquad \forall w \in V_m \end{cases}$$

En effet, si $\theta_1 \dots \theta_m \in V'$ avec $(\theta_i, w_j) = \delta_i^j$, définissons $P_m \in \mathcal{L}(V';V')$ par

$$P_m v' = \sum_{j=1}^{m} (v',w_j)\theta_j .$$

Alors (3.1) équivaut à

$$B_m(u_m) = P_m b ,$$

où

$$B_m(v) = P_m(A(v)) .$$

Si V'_m est l'espace engendré par $\theta_1 \dots \theta_m$, B_m applique V_m dans V'_m ; comme $(B_m(v),v) = (A(v),v)$, la condition analogue à (1.1) est satisfaite;d'où (3.1) en appliquant 2.

4. <u>Passage à la limite</u>.

De (3.1) résulte que

$$|(A(u_m),u_m)| = |(f,u_m)| \leqslant \|f\|_* \|u_m\|$$

d'où, utilisant (1.1) (les c désignent des constantes diverses) :

$$\|u_m\| \leqslant c$$

Alors $\|A(u_m)\|_* \leqslant c$, et V étant réflexif, on peut extraire u_μ telle que

(4.1) $$u_\mu \to u \text{ dans } V \text{ faible,}$$
$$A(u_\mu) \to \chi \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Appliquant (3.1) pour $m = \mu$, on en déduit que $\chi = f$. Donc

(4.2) $$A(u_\mu) \to f \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Comme $\|A(u_\mu, u)\|_* \leqslant c$, on peut supposer (par nouvelle extraction - mais on ne change pas les indices) que

(4.3) $$A(u_\mu, u) \to u' \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Vérifions que

(4.4) $$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \to 0.$$

En effet

$$(A(u_\mu, u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \to (f, u)$$

et d'après (4.2) :

$$(A(u_\mu, u_\mu), u) \to (f, u) ;$$

d'après (iii)

$$(A(u_\mu, u), u_\mu) \to (u', u)$$

et enfin d'après (4.3),

$$(A(u_\mu, u), u \to (u', u).$$

Tout ceci entraîne (4.4).

D'après (4.1) (4.4) et (ii)

(4.5) $$A(u_\mu, v) \to A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible}$$

et

(4.6) $$(A(u_\mu, v), u_\nu) \to (A(u, v), u) .$$

Mais alors on a :

(4.7) $$X_\mu^v = (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, v), u_\mu - v \to (f - A(u, v), u - v) .$$

Mais d'après (i), Re $X_{\mu}^{v} \geqslant 0$. Donc (4.7) donne :

$$\mathrm{Re}(f - A(u,v),u-v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V \quad . \tag{4.8}$$

Posant $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, il en résulte

$$\mathrm{Re}(f - A(u,u - \lambda w),w) \geqslant 0 \qquad \forall w \in V \quad \text{et} \quad \lambda > 0 \;;$$

faisant tendre λ vers 0 , en utilisant (i), il vient

$$\mathrm{Re}(f - A(u),w) \geqslant 0 \qquad \forall\, w \in V$$

donc

$$f = A(u)$$

ce qui démontre le théorème.

§ 2. Applications à un type d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'Euler du calcul des variations.

1. Notations.

Ω = ouvert de $\underline{\underline{R}}^n$, borné ; les fonctions considérées sont à valeurs réelles

$$W_p^m(\Omega) = \left\{u | D^{\alpha} u \in L_p(\Omega), \ |\alpha| \leqslant m\right\}, \qquad 1 < p < \infty \;;$$

$$\|u\| = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^{\alpha} u \|^p_{L_p(\Omega)}\Big)^{1/p} \quad ;$$

$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ = adhérence dans $W_p^m(\Omega)$ du sous-espace des fonctions à support compact dans Ω ;

$$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega),$$

V fermé dans $W_p^m(\Omega)$, inclusions strictes ou non ;

V', dual de V, n'est un espace de distributions sur Ω que si $V = \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

Notons que V est séparable et réflexif.

On suppose que

(1.1) l'application identique est compacte de $V \to W_p^{m-1}(\Omega)$.

Cette hypothèse a par ex. <u>toujours</u> lieu si $V = \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ et elle a lieu si $V = W_p^m(\Omega)$, Ω ayant la propriété du cône.

<u>Les fonctions</u> A_α :

Soit N_1 (resp N_2) le nombre de dérivations D^β dans $\underline{\underline{R}}^n$ d'ordre $\leq m-1$ (resp. d'ordre $= m$) ; soit $A_\alpha(x, \eta, \zeta)$ une famille de fonctions $(|\alpha| \leq m)$ définies sur $\Omega \times \underline{\underline{R}}^{N_1} \times \underline{\underline{R}}^{N_2}$, à valeurs dans $\underline{\underline{R}}$; ces fonctions sont de Carathéodory i.e. :

pour presque tout $x \in \Omega$, $\eta, \zeta \to A_\alpha(x, \eta, \zeta)$ est continue sur $\underline{\underline{R}}^{N_1} \times \underline{\underline{R}}^{N_2}$;

pour tout $\eta, \zeta \in \underline{\underline{R}}^{N_1} \times \underline{\underline{R}}^{N_2}$, $x \to A_\alpha(x, \eta, \zeta)$ est mesurable.

On pose :

$$D^k u = D^\beta u, \ |\beta| = k \} \quad ;$$

$$\delta u = \{ u, Du, \dots, D^{m-1} u \} \quad ;$$

$$A_\alpha(x, \delta u, D^m v) : x \to A_\alpha(x, \delta u(x), D^m v(x)).$$

On suppose que

$$(1.2) \begin{cases} \forall u \in W_p^m(\Omega), \quad v \in W_p^m(\Omega), \quad \text{on a} \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{cases}$$

D'après M.A. Krasnosel'skii [Topological methods in the theory of non linear integral equations ; Pergamon, 1964 ; traduction de l'édition russe de 1956] on peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que (1.2) ait lieu.

Notons seulement ceci, de vérification facile : (1.2) a lieu si :

$$(1.3)\qquad |A_\alpha(x,\eta,\zeta)| \leqslant c[|\eta|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} + k(x)], \qquad k \in L_{p'}(\Omega) .$$

On peut améliorer (i.e. augmenter) l'exposant de $|\eta|$ dans (1.3) en utilisant les inégalités de Sobolev.

<u>L'opérateur</u> A.

Pour $u, w \in V$, on définit

$$(1.4)\qquad a(u,w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx$$

ce qui a un sens puisque $A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \in L_{p'}(\Omega)$ et $D^\alpha w \in L_p(\Omega)$. La forme $w \to a(u,w)$ est linéaire continue sur V, donc de la forme

$$(1.5)\qquad a(u,w) = (A(u),w), \qquad A(u) \in V' .$$

<u>Le problème aux limites</u>.

Pour f donné dans V', on cherche u dans V satisfaisant à

$$(1.6)\qquad A(u) = f$$

ou, ce qui revient au même

$$(1.6')\qquad a(u,w) = (f,w) \qquad \forall w \in V .$$

C'est un problème avec conditions aux limites de Dirichlet (resp. Neumann, resp. "mêlées") si $V = \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ (resp. $W^m_p(\Omega)$, resp. $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega) \subset V \subset W^m_p(\Omega)$ avec inclusions strictes).

2. <u>Théorème 2.</u>

On suppose que (1.1) et (1.3) ont lieu, ainsi que

$$(2.1)\qquad \frac{|a(v,v)|}{\|v\|} \to \infty \qquad \text{si} \quad \|v\| \to \infty \ ;$$

$$(2.2)_1 \quad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\eta,\xi)\xi_\alpha / [|\xi| + |\xi|^{p-1}] \to \infty \quad \text{si} \qquad \to \infty , \\ x \text{ fixé, p.p. dans } \Omega \text{ , et pour } |\eta| \text{ borné,} \end{cases}$$

$$(2.2)_2 \quad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x,\eta,\xi^*) - A_\alpha(x,\eta,\xi)][\xi^*_\alpha - \xi_\alpha] > 0 \quad \text{si} \quad \xi^* \neq \xi , \\ \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : il existe $u \in V$ solution du problème aux limites (1.6).

<u>Remarques</u>.

1) Il est facile de donner des conditions <u>suffisantes</u> pour que (2.1) ait lieu. Par exemple, l'hypothèse

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\eta,\xi)\,\xi_\alpha \geqslant |\xi|^p \quad \text{pour} \quad |\xi| > \text{constante},$$

et les inégalités de Sobolev impliquent que (2.1) a lieu quand Ω <u>est suffisamment petit et régulier</u> et que $V = \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ (car alors

$$\|u\| \sim \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\Big)^{1/p}).$$

2) On peut remplacer (sans changer la conclusion) (η,ξ) par ζ et (2.2) par

$$(2.3) \qquad \sum_{|\alpha|\leqslant m} [A_\alpha(x,\zeta) - A_\alpha(x,\zeta^*)][\zeta_\alpha - \zeta^*_\alpha) \geqslant 0 ;$$

on prendra alors $A(u,v) = A(v)$; ce cas est plus simple à établir que celui de l'énoncé du Théorème 2.

3. Lemmes.

LEMME 3.1. Si $u_\mu \to u$ dans $W_p^{m-1}(\Omega)$ fort et $v \in W_p^m(\Omega)$, on a

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$$

dans $L_{p'}$ fort. Cf. Krasnosel'skii, loc.cit. en 1.

LEMME 3.2. Soit $g \in L_q(\Omega)$, $g_\nu \in L_q(\Omega)$, $\|g_\nu\|_{L_q(\Omega)} \leq c$; $1 < q < \infty$; si $g_\nu \to g$ p.p., alors $g_\nu \to g$ dans $L_q(\Omega)$ faible.

Démonstration. Soit

$$E(N) = \left\{ x \mid x \in \Omega, |g_\nu(x) - g(x)| \leq 1 \quad \forall \nu \geq N \right\} ;$$

$E(N)$ croît avec N et $\text{mes}(E(N)) \to \text{mes}\, \Omega$; alors l'ensemble des fonctions φ_N, $\in L_{q'}(\Omega)$, nulles (p.p.) hors de $E(N)$, est lorsque $N \to \infty$, dense dans $L_{q'}(\Omega)$. Or

$$\int_\Omega \varphi_N(x)[g_\nu(x) - g(x)]dx \to 0$$

lorsque $\nu \to \infty$ (φ_N fixée) ; d'où le résultat.

LEMME 3.3. Soit $u_\mu, u \in W_p^m(\Omega)$, $\|u_\mu\| \leq c$, $u_\mu \to u$ dans V faible. On pose :

$$F_\mu = F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) = \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) -$$
$$- A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u)][D^\alpha u_\mu - D^\alpha u]$$

et l'on suppose que

$$\int_\Omega F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u)dx \to 0$$

Alors

(3.1) $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u)$ dans $L_{p'}(\Omega)$ faible.

Démonstration.

Grâce à $(2.2)_2$, $F_\mu \geq 0$; donc de toute sous-suite de $\{\mu\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\nu\}$ telle que

(3.2) $$\delta u_\nu(x) \to \delta u(x),\ F_\nu(x) \to 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

Fixons x non exceptionnel dans (3.2) et tel que $k(x) < \infty$ (k donné dans (1.3)) ; notons $\eta = \delta u(x)$, $\eta_\nu = \delta u_\nu(x)$, $\zeta = D^m u(x)$ et ζ^* l'une quelconque des limites de $D^m u_\nu(x) = \zeta_\nu$. Alors

$$F_\nu(x) \geq \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_\nu, \zeta_\nu)\zeta_{\nu\alpha} - c(|\zeta_\nu|^{p-1} + |\zeta_\nu| + 1)$$

et si l'on avait $|\zeta^*| = \infty$, alors, vu $(2.2)_1$, on aurait $F_\nu(x) \to \infty$ contrairement à (3.2). Donc $|\zeta^*| < \infty$.

Alors (3.2) et la continuité en η, ζ des A_α impliquent

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \zeta^*) - A_\alpha(x, \eta, \zeta)][\zeta^*_\alpha - \zeta_\alpha] = 0$$

donc, vu $(2.2)_2$,

$$\zeta^* = \zeta$$

Donc

$$A_\alpha(x, \delta u_\nu(x), D^m u_\nu(x)) \to A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x)) \quad \text{p.p. dans } \Omega ,$$

et, vu le Lemme 3.2,

(3.3) $$A_\alpha(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible.}$$

Pour que de toute suite extraite de $\{\mu\}$ on puisse extraire une suite donnant lieu à (3.3) (donc avec une limite <u>indépendante</u> de la suite extraite), il faut que (3.1) ait lieu.

4. Démonstration du théorème 2.

Il est commode de poser

$$a_1(u,v,w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m v) D^\alpha w \, dx ,$$

$$a_2(u,w) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx$$

Alors

$$a(u,v,w) = a_1(u,v,w) + a_2(u,w)$$

définit $A(u,v) \in V'$ par

$$a(u,v,w) = (A(u,v),w) .$$

Il est facile de voir que tous ces opérateurs sont bornés. L'hypothèse (2.1) est évidemment équivalente à (1.1) de sorte que pour montrer le théorème il suffit, en vertu du théorème 1, de vérifier que les hypothèses II, (i),(ii), (iii) ont lieu.

Vérification de (i).

On a :

$$(A(u,u) - A(u,v), u-v) = [a_1(u,u, u-v) - a_1(u,v, u-v)]$$

et ceci est ≥ 0 d'après (2.2) ; il reste à montrer que

$$a(u,v_1 + \lambda v_2, w) \to a(u,v,w) \quad \text{si} \quad \lambda \to 0, \quad u, v_i, w \in V .$$

Cela résulte de ce que

$$A_\alpha(x, \delta^{m-1} u, D^m(v_1 + \lambda v_2)) \to A_\alpha(x, \delta^{m-1} u, D^m v_1)$$

dans $L_{p'}(\Omega)$ faible (il y a même convergence dans $L_{p'}$ fort !) ce qui suit par ex. du Lemme 3.2.

<u>Vérification de</u> (ii)

Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et

$$(A(u_\mu,u_\mu) - A(u_\mu,u),u_\mu - u) \to 0.$$

Avec les notations du Lemme 3.3,

$$(A(u_\mu,u_\mu) - A(u_\mu,u),u_\mu - u) = \int_\Omega F_\mu \, dx$$

et donc, d'après le Lemme 3.3

$$A_\alpha(x,\delta u_\mu,D^m u) \to A_\alpha(x,\delta u,D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible,}$$

et, pour $|\alpha| = m$, $A_\alpha(x,\delta u_\mu,D^m v) \to A_\alpha(x,\delta u,D^m v)$ dans $L_{p'}(\Omega)$ faible (et même fort). Donc

$$a(u_\mu,v,w) \to a(u,v,w) \qquad \forall\, w \in V$$

donc $A(u_\mu,v) \to A(u,v)$ dans V' faible, c.q.f.d.

<u>Vérification de</u> (iii)

Soit $u_\mu \to u$ dans V faible, $A(u_\mu,v) \to v'$ dans V' faible. Alors (Lemme 3.1) $A_\alpha(x,\delta u_\mu,D^m v) \to A_\alpha(x,\delta u,D^m v)$ dans $L_{p'}(\Omega)$ fort, donc

$$a_1(u_\mu,v,u_\mu) \to a_1(u,v,u). \tag{4.1}$$

Par ailleurs

$$|a_2(u_\mu,u_\mu - u)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha(u_\mu - u)\|_{L_p(\Omega)}$$

et donc, d'après (1.1), $a_2(u_\mu,u_\mu - u) \to 0$.

Grâce à (4.1),

$$a_2(u_\mu,u) = (A(u_\mu,v),u) - a_1(u_\mu,v,u) \to (v',u) - a_1(u,v,u),$$

donc

$$a_2(u_\mu,u_\mu) = a_2(u_\mu,u_\mu - u) + a_2(u_\mu,u) \to (v',u) - a_1(u,v,u).$$

Alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) = a_1(u_\mu, v, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu) \to (V', u),$$

et (iii) suit.

5. Remarques.

1) Dans le cas où les coefficients $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ ont une croissance plus rapide que polynominale, il faut remplacer les espaces de Sobolev $W_p^m(\Omega)$ construits à partir de $L_p(\Omega)$ par des espaces analogues construits à partir d'espaces d'Orlicz sur Ω.

Noter aussi que les A_α n'ont pas tous forcément "même croissance" ; on peut donc être conduit à introduire au lieu de $W_p^m(\Omega)$ des espaces

$$W^m_{p\alpha}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L_{p\alpha}(\Omega),\ |\alpha| \leq m,\ \ p_\alpha \text{ dépendant de } \alpha\};$$

remarque analogue encore en remplaçant $L_{p\alpha}(\Omega)$ par un espace d'Orlicz dépendant de α. Pour tout cela, cf. Visik [4].

2) Si la frontière Γ de Ω est assez régulière, on peut également introduire dans (1.4) des intégrales de surface.

§ 3. Application au système de Navier-Stokes
(cas stationnaire : vitesse tangente aux parois)

Il s'agit du problème de Dirichlet, qui régit les écoulements visqueux stationnaires

$$\begin{cases} \Delta u_i - \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - u_k D_k u_i = f_i \text{ , div. } u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \text{ ;} \\ u_i = \gamma_i \text{ (donné) sur } \quad \partial\Omega \text{ (bord de } \Omega \text{) ;} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$; $u = (u_1, \ldots, u_n)$; $\Omega \subset \underline{\underline{R}}^n$; Ω borné.

Notations.

$W^n = W\times,\dots,\times W$ (n fois) ;

$V = \{w \mid w \in (\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))^n,\ \mathrm{div}\ w = 0\}$; $\|w\|^2 = \sum_{k,i} \int_\Omega |D_k w_i|^2 dx$

$H = \{f \mid f \in (L_2(\Omega))^n,\ \mathrm{div}\ f = 0\}$

$V \subset H \subset V'$; V' = dual de V ; H est identifié à son dual.

On suppose $\partial\Omega$ deux fois différentiable ;

On se donne $\gamma \in (W_2^1(\Omega))^n$, dont la trace sur $\partial\Omega$ est donc définie ; pour

$$u - \gamma \in V,\quad v - \gamma \in V,\quad w \in V,$$

on pose

$$a(u,v,w) = \sum_{i,k=1}^{n} (D_k v_i, D_k w_i) + \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_k (D_k v_i) w_i\, dx \tag{1.1}$$

en écrivant donc $a(u,v,w)$ au lieu de $a(u-\gamma, v-\gamma, w)$. La fonction trilinéaire $u-\gamma, v-\gamma, w \to a(u,v,w)$ est continue sur $V\times V\times V$ <u>si la dimension</u> $n \leqslant 4$, car le théorème de Sobolev donne alors $u,w \in (L_4(\Omega))^n$, donc

$$a(u,v,w) = (A(u,v),w), \quad \text{où}\quad A(u,v) \in V'. \tag{1.2}$$

2) <u>Preuve que</u> $A(u,v)$ <u>vérifie l'hypothèse II du théorème 1</u>.- <u>Vérification de</u> (i) : $v \to a(u,v,w)$ est continue sur V.

Ensuite

$$(A(u,u) - A(u,v), u-v) = a(u,u,u-v) - a(u,v,u-v) = \sum_{i,k} (D_k(u_i - v_i), D_k(u_i - v_i))$$

car

$$\sum_{i,k} \int_\Omega u_k (D_k w_i) w_i\, dx = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \int_\Omega u_k D_k (w_i)^2\, dx = 0 ;$$

par Stokes, puisque $\mathrm{div}\ u = 0$; ce résultat s'énonce :

(2.1) $$(A(u,u) - A(u,v),u-v) = \|u-v\|^2 .$$

<u>Vérification de</u> (ii) : Vu (2.1), si $(A(u_\mu,u_\mu) - A(u_\mu,u),u_\mu-u) \to 0$, alors $u_\mu \to u$ dans V fort ; donc

$$a(u_\mu,v,w) \to a(u,v,w) ;$$

donc

$$A(u_\mu,v) \to A(u,v) \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

<u>Vérification de</u> (iii) : Soit $u_\mu \to u$ dans V faible ; alors

$$u_{\mu,k} \to u_k \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ fort,}$$

$$u_{\mu,k} \text{ est borné dans } L_4(\Omega) .$$

De toute suite extraite de $\{u_\mu\}$ on peut donc extraire une suite $\{u_\nu\}$ telle que

$$u_{\nu,k}(x) \to u_k(x) \text{ p.p. ;}$$

évidemment

$$u_{\nu,k} \to u_k \text{ dans } L_4(\Omega) \text{ faible,}$$

$$u_{\nu,k}\, u_{\nu,i} \to u_k\, u_i \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible.}$$

Donc

$$u_{\mu,k} \to u_k \text{ dans } L_4(\Omega) \text{ faible ;}$$

$$u_{\mu,k}\, u_{\mu,i} \to u_k\, u_i \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible .}$$

Donc

$$A(u_\mu,v) \to A(u,v) \text{ dans } V' \text{ faible ;}$$

$$(A(u_\mu,v),u-\gamma) \to (A(u,v),u-\gamma) .$$

Voici prouvé (iii) et même bien plus.

3. <u>Condition pour que</u> A <u>soit coercitif</u>.- Puisque nous notons $a(u,v,w)$ ce que le § 1 noterait $a(u-\gamma,v-\gamma,w)$, il s'agit de chercher sous quelle condition

$$(3.1) \qquad \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{(A(u,u),u-\gamma)}{\|u\|} = \infty \ .$$

On a

$$\begin{aligned}(A(u,u),u-\gamma) &= a(u,u,u-\gamma) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} (D_k u_i, D_k(u_i-\gamma_i)) + \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_k(D_k u_i)(u_i-\gamma_i)dx \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} (D_k u_i, D_k(u_i-\gamma_i)) + \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_k(D_k \gamma_i)(u_i-\gamma_i)dx\end{aligned}$$

car

$$\sum_k \int_\Omega u_k \quad (u_i-\gamma_i)D_k(u_i-\gamma_i)dx = \frac{1}{2} \sum_k \int_\Omega u_k D_k(u_i-\gamma_i)^2 dx = 0$$

par Stokes.

Soit $\{u_\mu\}$ une suite telle que $\dfrac{(A(u_\mu,u_\mu),u_\mu-\gamma)}{\|u_\mu\|^2}$ tende vers sa limite inférieure $(u_\mu-\gamma \in V)$; on peut la choisir convergente dans V faible; soit U sa limite ; on a (cf. iii) :

$$u_{\mu,k} \to U_k \quad \text{dans} \quad L_4(\Omega) \quad \text{faible,}$$

$$u_{\mu,k}\, u_{\mu,i} \to U_k U_i \quad \text{dans} \quad L_2(\Omega) \quad \text{faible ;}$$

donc :

$$U \in V, \ \|U\| \leq 1,$$

$$(3.2) \qquad \text{lim.inf.} \frac{(A(u,u),u-\gamma)}{\|u\|^2} = 1 + \sum_{i,k} \int_\Omega U_i U_k \, D_k \gamma_i \, dx$$

soit $\Omega(\varepsilon)$ la partie de Ω distante de $\partial\Omega$ de moins de ε .

On prouve aisément ([5], p.38-41) ceci :

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} U_i\, U_k \leqslant c\, \varepsilon^2 \|U\|^2 \quad (c \text{ : indépendant de } \varepsilon \text{ et de } U \in V) \text{ ;}$$

γ peut être choisi tel que

$$\gamma = 0 \quad \text{hors de} \quad \Omega(\varepsilon), \quad \left| D_k \gamma_i \right| \leqslant \frac{c}{\varepsilon} \text{ ,}$$

si γ a sur $\partial\Omega$ des valeurs données tangentes à $\partial\Omega$. Sous cette condition, un choix approprié de ε et γ, indépendant de U, permet donc de déduire de (3.2) que

$$\text{lim.inf.} \ \frac{(A(u,u), u-\gamma)}{\|u\|^2} \geqslant \frac{1}{2} \quad ;$$

d'où l'hypothèse de coercivité (3.1), pour ce choix de γ.

4. Conclusions.- Le théorème 1 s'applique donc : le système de Novier-Stokes a au moins une solution $u \in W_2^1(\Omega)$ prenant sur $\partial\Omega$ des valeurs données tangentes à $\partial\Omega$, si $n \leqslant 4$.

Note.- [5] prouve ce théorème pour $n \leqslant 3$ et des valeurs au bord, dont le flux est nul à travers chaque composante connexe du bord : [5] chap. II donne la majoration a priori permettant d'appliquer la théorie des points fixes par laquelle il convient de remplacer le chap. I de [5]. Mais la preuve de cette majoration *a priori* ne suffit pas à établir la coercivité. Pour obtenir ce théorème de [5] par la méthode du § 1, il faut sans doute améliorer cette méthode : faire un emploi moins particulier de la théorie des points fixes, permettant de remplacer l'hypothèse de coercivité par celle qu'existe une majoration *a priori*.

<u>Note</u>.- [5] traite le cas où Ω n'est pas borné par passage à la limite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. E. BROWDER. Variationnal boundary value problems for quasi-linear elliptic equations of arbitrary order, Proc. Nat. Acad. Sci. vol. 50 (1963), pp. 31-37, Notes II, III, idem. Divers articles à paraître.

[2] G.J. MINTY. a) Monotone (non linear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. 29 (1962), p.341-346.
b) On the Maximal domain of a monotone function, Michigan Math. J. 8 (1961), p.135-137.
c) On a "monotonicity" method for the solution of non linear equations in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. 50 (1963), p.1038-1041.

[3] I.M. VISIK. a) Doklady Akad. Nauk. t.138 (1961), p.518-521.
b) Troudi Moskov. Mat. Obv. t.12 (1963), p.125-184.

[4] ----- Doklady Akad. Nauk. t.151 (1963), p.758-761.

[5] J. LERAY. Journal de Math., t.12 (1933), p.21-63.