Luc Illusie

Opérateur D_0

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 17, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A2_0>

OPÉRATEUR D_0

par Luc ILLUSIE

Soit X une variété C^∞ riemannienne compacte orientée de dimension paire. Soit $B(X)$ (resp. $S(X)$) le fibré en boules unité (resp. sphères unité) associé au fibré cotangent $T^*(X)$. Il résulte de l'exposé précédent que $K(B(X) , S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ est un module libre à un générateur sur $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$. Nous allons maintenant construire un opérateur différentiel elliptique D_0 sur X , tel que l'image de son symbole dans $K(B(X) , S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ soit un générateur de ce module. Ceci nous définira un isomorphisme de $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ sur $K(B(X) , S(X)) \otimes \underset{\sim}{Q}$ et nous permettra de considérer les deux membres de la formule d'Atiyah-Singer, indice analytique et indice topologique, comme des fonctions sur $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$, ce qui est une étape importante dans la démonstration de la formule ([1] et [2]).

1. Définitions et notations.

1.1. - Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , muni d'un produit scalaire euclidien $\langle \, , \, \rangle$. Ce produit scalaire s'étend à l'algèbre extérieure $E = \bigoplus_p \Lambda^p E$ par la formule :

$$\langle x_1 \ldots x_p , y_1 \ldots y_p \rangle = \det \langle x_i , y_j \rangle ,$$

et définit sur E une structure d'espace euclidien, pour laquelle $\Lambda^p E$ est orthogonal à $\Lambda^q E$ si $p \neq q$. Si $e_1 , \ldots , e_n$ forment une base orthonormale de E , les éléments $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, forment une base orthonormale de ΛE . Soit $E_{\underset{\sim}{C}} = E \otimes_{\underset{\sim}{R}} \underset{\sim}{C}$ le complexifié de E . On définit un produit scalaire hermitien $(\, | \,)$ sur $\Lambda_{\underset{\sim}{C}}(E_{\underset{\sim}{C}}) = (\Lambda_{\underset{\sim}{R}} E)_{\underset{\sim}{C}}$ par la formule $(x|y) = \langle x , \overline{y} \rangle$. Toute base orthonormale de ΛE sur $\underset{\sim}{R}$ (pour le produit euclidien) est une base orthonormale de $\Lambda E_{\underset{\sim}{C}}$ sur $\underset{\sim}{C}$ (pour le produit hermitien).

1.2. - Supposons E orienté par le choix d'un élément $e \in \Lambda^n E$ tel que $\langle e , e \rangle = 1$. Notons $\star$ l'opérateur de dualité qui à $x \in \Lambda E$ fait correspondre le produit intérieur droit de e par x [3]. Autrement dit, $\star$ est défini par la formule :

$$(1) \qquad \langle \star x , y \rangle = \langle e , x \wedge y \rangle .$$

Si $(e_1 , \dots , e_n)$ est une base orthonormale de E telle que

$$e = e_1 \wedge \dots \wedge e_n ,$$

on a

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q} ,$$

si $(i_1 , \dots , i_p , j_1 , \dots , j_q)$ est une permutation paire de $(1 , 2 , \dots , n)$. Il en résulte que

$$(\star)^2 \, x = (-1)^{p(n-p)} \, x \quad \text{pour} \quad x \in \Lambda^p E .$$

L'opérateur $\star$ est donc une isométrie, qui pour chaque p est un isomorphisme de $\Lambda^p E$ sur $\Lambda^{n-p} E$. Enfin, on a la formule

$$\langle x , y \rangle \, e = x \wedge \star \, y ,$$

qui aurait pu servir de définition à $\star$.

1.3. - Prolongeons $\star$ à $\Lambda E_{\underset{\sim}{C}}$ de façon $\underset{\sim}{C}$-linéaire. Soit α l'opérateur ([1] et [2]) sur $\Lambda E_{\underset{\sim}{C}}$ défini par

$$\alpha \big|_{\Lambda^p E_{\underset{\sim}{C}}} = i^{p(p+1)-m} \, \star \qquad \text{si} \quad n = 2m ,$$

$$\alpha \big|_{\Lambda^p E_{\underset{\sim}{C}}} = i^{p(p+1)-m-1} \, \star \qquad \text{si} \quad n = 2m + 1 .$$

On a $\alpha^2 = 1$. Soit $\Lambda^+ E$ (resp. $\Lambda^- E$) le sous-espace propre de $\Lambda E_{\underset{\sim}{C}}$ correspondant à la valeur propre $+1$ (resp. -1) . On a :

$$\Lambda E_{\underset{\sim}{C}} = \Lambda^+ E \oplus \Lambda^- E ,$$

la décomposition étant donnée par $x = 1/2(x + \alpha x) + 1/2(x - \alpha x)$. Les sous-espaces $\Lambda^+ E$ et $\Lambda^- E$ sont d'ailleurs orthogonaux, car on vérifie aussitôt que α est hermitien.

1.4. - Soit X une variété C^∞ riemannienne compacte orientée de dimension n . En chaque point $x \in X$, $T^*_x(X)$ est un espace euclidien orienté ; on a donc des opérateurs $\star$ et α sur $\Lambda T^*_x(X)_{\underset{\sim}{C}}$. Soit Ω (resp. $\Omega_{\underset{\sim}{C}}$) l'espace des sections C^∞ de $\Lambda T^*(X)$ (resp. $\Lambda T^*(X)_{\underset{\sim}{C}}$) . α opère sur $\Omega_{\underset{\sim}{C}}$, et $\Omega_{\underset{\sim}{C}}$ est somme directe des sous-espaces propres Ω^+ et Ω^- correspondant aux valeurs propres 1 et -1. On définit d'autre part un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) global sur Ω (resp. $\Omega_{\underset{\sim}{C}}$) par la formule :

$$\langle a , b\rangle = \int_X \langle a_x , b_x\rangle \, dx \quad (\text{resp.} \quad (a , b) = \int_X (a_x , b_x) \, dx) ,$$

où dx désigne l'élément de volume. Soit maintenant $\not{d}$ l'opérateur égal à $1/2\pi i$ fois l'opérateur usuel de différentiation extérieure sur Ω.

A partir de maintenant, dans cet exposé, on écrira d au lieu de $\not{d}$ pour simplifier l'écriture.

Soit ∂ l'adjoint du nouvel opérateur d ; ∂ est donc défini par la formule

$$(da|b) = (a|\partial b) \ ;$$

un calcul facile montre que $\partial = (-1)^{np} \star d \star$ sur Ω_C^p, en particulier

$$\partial = \star \, d \star$$

si n est pair. On vérifie par ailleurs les formules :

(2) $$\partial\alpha = -\alpha d \ , \quad d\alpha = -\alpha\partial \ .$$

(On remarquera que ces formules, jointes à $\alpha^2 = 1$ et au fait que α coïncide avec $\star$ sur les formes de degré $2m$ si $n = 4m$, déterminent entièrement α.) L'opérateur différentiel $D_o = d + \partial$ est un opérateur hermitien sur Ω_C. En vertu des relations (2), D_o envoie Ω^+ dans Ω^-, et vice-versa. (Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous considérerons D_o comme opérant de Ω^+ dans Ω^-.) L'opérateur D_o est elliptique. En effet, calculons son symbole $s(D_o)$. Soit $s(d)$ (resp. $s(\partial)$) le symbole de d (resp. ∂). On a :

$$s(D_o) = s(d) + s(\partial) \ .$$

Au-dessus de $v \in T^*(X)$, $s(d)$ est la multiplication extérieure à gauche par v. Comme d et ∂ sont adjoints, leurs symboles le sont aussi. On a donc la formule :

$$s(D_o)(v)x = v \wedge x + x \llcorner v \ , \text{ pour } \ v \in T^*(X) \ .$$

Il en résulte que :

$$\langle s(D_o)(v)x\ ,\ s(D_o)(v)y\rangle = \langle s(D_o^2)(v)x\ ,\ y\rangle$$
$$= \langle v \wedge (x \llcorner v) + (v \wedge x) \llcorner v\ ,\ y\rangle$$
$$= \langle x \llcorner v\ ,\ y \llcorner v\rangle + \langle v \wedge x\ ,\ v \wedge y\rangle$$
$$= \langle v\ ,\ v\rangle\langle x\ ,\ y\rangle\ .$$

Donc, au-dessus de chaque vecteur cotangent v, le symbole de D_o est une similitude de rapport $\|v\|$, ce qui montre que D_o est elliptique.

Remarque. Le calcul précédent montre également que le symbole de $D_o^2 = (1/4\pi^2)\Delta$ ([5]) , où Δ est le laplacien, est, au-dessus de chaque vecteur cotangent v, la multiplication par le scalaire $\|v\|^2$.

2. Indice analytique de D_o .

2.1. L'index de Thom-Hirzebruch. - Rappelons d'abord que, par le théorème de de Rham, $H^*(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$ s'identifie, en tant qu'algèbre, à la d-cohomologie de Ω_C , le cup-produit correspondant au produit extérieur des formes différentielles. L'application qui, à $(a\ ,\ b) \in H^*(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \times H^*(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$, associe $(\star\ a|b)$, valeur de $a \cup \bar{b}$ sur la classe fondamentale d'homologie de X , est une forme sesquilinéaire Φ sur $H^*(X)$. Si

$$(a\ ,\ b) \in H^p(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \times H^{n-p}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})\ ,$$

$(\star\ a|b)$ peut encore s'interpréter comme la valeur de $\bar{b}$ sur l'image de a par la dualité de Poincaré $H^p(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \to H_{n-p}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$; Φ est une forme hermitienne sur $H^{pair}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$. Son indice d'inertie $t(X)$ s'appelle l'index (de Thom-Hirzebruch) de la variété X ([6]) . (On rappelle que l'indice d'inertie d'une forme hermitienne H sur un espace vectoriel E de dimension finie est égal à $p^+ - p^-$, où p^+ (resp. p^-) est le maximum des dimensions des sous-espaces F de E tels que la restriction de H à F soit positive (resp. négative) et non dégénérée.)

2.2. PROPOSITION. - Soit X une variété C^∞ riemannienne compacte orientée de dimension n . L'index de X est égal à l'indice analytique de l'opérateur D_o sur X . Il est nul si $n \neq 0 \pmod 4$.

Démonstration. - Notons $i(D_o)$ l'indice analytique de D_o . Soit B l'espace des formes harmoniques complexes sur X . Posons $B^+ = B \cap \Omega^+$, $B^- = B \cap \Omega^-$. On a $B = B^+ \oplus B^-$, car α commute avec Δ . D'autre part $\operatorname{Ker} D_o = \operatorname{Ker} \Delta$, car $(D_o\, a|D_o\, b) = (\Delta\, a|b)$ quels que soient a et b dans Ω_C. On a donc $\operatorname{Ker} D_o = B^+$, et aussi $\operatorname{Coker} D_o = B^-$, car D_o est hermitien sur Ω_C, d'où finalement $i(D_o) = \dim B^+ - \dim B^-$.

a. $n \neq 0 \pmod 4$. - Dans ce cas, $t(X) = 0$, car Φ est une forme neutre ([4]). ($H^{\text{pair}}(X, \underset{\sim}{C})$ est somme directe des deux sous-espaces totalement isotropes $\bigoplus_{2p<n/2} H^{2p}(X, C)$ et $\bigoplus_{2p>n/2} H^{2p}(X, \underset{\sim}{C})$.) D'autre part, si n est impair, on a

$$B^+ = \bigoplus_{p<n/2} (B^p \oplus B^{n-p})^+ , \quad B^- = \bigoplus_{p<n/2} (B^p \oplus B^{n-p})^- ;$$

mais

$$\dim (B^p \oplus B^{n-p})^+ = \dim (B^p \oplus B^{n-p})^-$$

car $I + \alpha$ (resp. $I - \alpha$) est un isomorphisme de B^p sur $(B^p \oplus B^{n-p})^+$ (resp. $(B^p \oplus B^{n-p})^-$), d'où $i(D_o) = 0$. Enfin, si $n = 2m$, m impair, on a

$$B^+ = B^{m+} \oplus \bigoplus_{p<m} (B^p \oplus B^{n-p})^+ , \quad B^- = B^{m-} \oplus \bigoplus_{p<m} (B^p \oplus B^{n-p})^- ;$$

mais B^{m+} et B^{m-} sont isomorphes, car α coïncide avec $i\star$ sur Ω_C^m ; on a donc encore $i(D_o) = 0$.

b. $n = 0 \pmod 4$. - Posons $n = 4m$. On voit comme précédemment que $i(D_o) = \dim B^{2m+} - \dim B^{2m-}$. Mais B s'identifie, en tant qu'espace vectoriel, à $H^*(X, \underset{\sim}{C})$ ([5]). On peut considérer Φ comme une forme hermitienne sur B^{pair}. Comme Φ est neutre sur $\bigoplus_{p\neq m} B^{2p}$, il suffit, pour démontrer la proposition, de vérifier que Φ est définie positive sur B^{2m+} et définie négative sur B^{2m-}, ce qui est évident, car α coïncide avec $\star$ sur Ω_C^{2m}.

Il sera démontré, dans l'exposé suivant, que, si X est une variété C^∞ riemannienne compacte orientée de dimension paire, l'image du symbole de D_o dans $K(B(X), S(X)) \otimes Q$ engendre $K(B(X), S(X)) \otimes Q$ comme $K(X) \otimes Q$ module. On calculera en effet le caractère de Chern de D_o, et l'on montrera que sa composante de degré zéro n'est pas nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and SINGER (I. M.). - The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 422-433.

[2] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.), SINGER (I.). - Harvard University, Topology Seminar, Fall 1962. - Cambridge (Mass.), Harvard University.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 3, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1044 ; Bourbaki, 7).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 9. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Bourbaki, 24).

[5] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1222 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 3).

[6] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, 2te ergänzte Auflage. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).