LUC ILLUSIE

Caractère de Chern. Classe de Todd

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A6_0>

CARACTÈRE DE CHERN. CLASSE DE TODD

par Luc ILLUSIE

1. Rappel.

Comme dans l'exposé précédent, on désignera par $\chi(n , N)$ le fibré universel de base $BU(n , N)$, grassmannienne des n-plans de C^{n+N} . Si X est un espace paracompact de dimension au plus égale à $2N$, il existe une bijection canonique de l'ensemble $[X , BU(n , N)]$ des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $BU(n , N)$ sur l'ensemble $\Phi_n(X)$ des classes d'isomorphie de fibrés $\underset{\sim}{C}$-vectoriels de dimension n sur X.

On désignera par $BU(n)$ la limite inductive des $BU(n , N)$ suivant les injections canoniques $BU(n , N) \to BU(n , N + 1)$, et par $\chi(n)$ le fibré universel de base $BU(n)$. Sur chaque $BU(n , N)$, $\chi(n)$ induit $\chi(n , N)$. Si X est un espace paracompact, il existe une bijection canonique de $[X , BU(n)]$ sur $\Phi_n(X)$. Si de plus X est compact, tout fibré $\underset{\sim}{C}$-vectoriel de dimension n sur X est image réciproque de $\chi(n , N)$ pour N assez grand.

Tous les fibrés considérés dans la suite seront des fibrés $\underset{\sim}{C}$-vectoriels de base paracompacte.

La donnée d'une classe de cohomologie $g \in H^*(BU(n) , G)$ (G : groupe abélien) permet de définir une correspondance fonctorielle associant à tout fibré E de dimension n sur X un élément $g(E) \in H^*(X , G)$: si $E = f^* \chi(n)$, on pose $g(E) = f^* g$, ce qui est légitime puisque la classe d'homotopie de f est uniquement déterminée par E , et $g(E)$ dépend fonctoriellement de E . La classe totale de Chern donne un exemple d'une telle correspondance. Le caractère de Chern, que l'on se propose maintenant d'étudier, va en fournir un nouvel exemple.

2. Définition du caractère de Chern : cas absolu.

Rappelons que l'on a : $H^*(BU(n) ; \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}[c_1 , \dots , c_n]$, les c_i désignant les classes de Chern de $\chi(n)$. En particulier, $H^*(BU(1) ; \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}[t]$, avec $t = c_1(\chi(n))$. Considérons le produit $BU(1) \times BU(1) \times \dots \times BU(1)$, (n facteurs), et notons p_i la projection sur le i-ième facteur. On a

$$H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1) ; \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}[x_1 , \dots , x_n] ,$$

avec $x_i = p_i^* t$. Soit α_n l'application classifiante $BU(1) \times \dots \times BU(1) \to BU(n)$.

On sait (exposé 4) que l'application

$$\alpha_n^* : H^*(BU(n) ; \underset{\sim}{Z}) \to H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1) ; \underset{\sim}{Z})$$

est un isomorphisme sur la sous-algèbre de $\underset{\sim}{Z}[x_1 , \dots , x_n]$ formée des polynômes <u>symétriques</u>. Cet isomorphisme est déterminé par

$$\alpha_n^*(c_1) = x_1 + \dots + x_n , \dots , \alpha_n^*(c_n) = x_1 \dots x_n .$$

Tout polynôme symétrique homogène de degré k par rapport aux x_i est l'image par α_n^* d'un polynôme bien déterminé par rapport aux c_i , isobare et de poids k , chaque c_i étant de poids i . Nous identifierons, dans la suite, $H^*(BU(n) ; \underset{\sim}{Z})$ à son image par α_n^* . Nous écrirons donc :

$$c(\chi(n)) = 1 + c_1 + \dots + c_n = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) .$$

Nous identifierons d'autre part les c_i et les x_i à leurs images par l'homomorphisme de la cohomologie entière à la cohomologie rationnelle, lequel est injectif dans le cas présent.

Cela dit, considérons la série :

$$\operatorname{ch} \chi(n) = \sum_{i=1} e^{x_i} = n + c_1 + (c_1^2 - 2c_2)/2 + \dots = n + \sum_{k\geq 1} s_k(\chi(n))/k! ,$$

où $s_k(\chi(n))$ est le polynôme qui exprime $x_1^k + \dots + x_n^k$ par rapport aux c_i . ($s_k(\chi(n))$ appartient donc à $H^{2k}(BU(n) ; \underset{\sim}{Z})$.) C'est un élément de $H^{**}(BU(n) ; \underset{\sim}{Q})$, en notant $H^{**} = \prod_i H^i$, par opposition à $H^* = \bigoplus_i H^i$. Ici,

$$H^{**}(BU(n) ; \underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{Q}[[c_1 , \dots , c_n]] ,$$

algèbre des séries formelles.

Soit maintenant E un fibré quelconque de base X . Nous poserons

$$\operatorname{ch} E = f^{**} \operatorname{ch} \chi(n) \quad \text{si} \quad E = f^{-1} \chi(n) .$$

On a donc

$$\operatorname{ch} E = n + \sum_{k\geq 1} s_k(E)/k! \in H^{**}(X ; \underset{\sim}{Q}) ,$$

avec $s_k(E)/k! \in H^{2k}(X , \underset{\sim}{Q})$. On définit ainsi pour tout fibré E une série dont les termes appartiennent à la cohomologie de la base à coefficients rationnels, et qui dépend fonctoriellement de E . Cette série, notée $\operatorname{ch} E$, s'appelle <u>caractère de Chern de</u> E . Si la base X est de dimension finie ou compacte, alors la série $\operatorname{ch} E$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls (car dans ce cas E est image réciproque de $\chi(n , N)$ pour N assez grand) et définit un élément de $H^{**}(X ; \underset{\sim}{Q})$.

PROPOSITION 1. - Si E et F sont deux fibrés de bases X et Y respectivement (X , Y et $X \times Y$ sont supposés paracompacts), on a

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = p^{**}\ \mathrm{ch}\, E + q^{**}\ \mathrm{ch}\, F$$

(p et q désignent les projections de $X \times Y$ sur X et Y respectivement).

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $E = \chi(m)$, $F = \chi(n)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi(1) \oplus \dots \oplus \chi(1) \arrow[r] \arrow[d] & \chi(m) \oplus \chi(n) \arrow[r] \arrow[d] & \chi(m+n) \arrow[d] \\
BU(1) \times \dots \times BU(1) \arrow[r, "(\alpha_p, \alpha_q)"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{p+q}"'] & BU(m) \times BU(n) \arrow[r] & BU(m+n)
\end{tikzcd}$$

Les homomorphismes :

$$H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1) ; \underset{\sim}{Q}) \xleftarrow{(\alpha_p,\alpha_q)^*} H^*(BU(m) \times BU(n) ; \underset{\sim}{Q}) \leftarrow H^*(BU(m+n) ; \underset{\sim}{Q})$$

sont injectifs.

D'autre part, $H^*(BU(m) \times BU(n) ; \underset{\sim}{Q})$ s'identifie à $H^*(BU(m) ; \underset{\sim}{Q}) \otimes H^*(BU(n) ; \underset{\sim}{Q})$. Par définition du caractère de Chern, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(\chi(m) \oplus \chi(n)) &= \exp x_1 + \dots + \exp x_{m+n} \\
&= \exp x_1 + \dots + \exp x_m + \exp x_{m+1} + \dots + \exp x_{m+n} \\
&= \mathrm{ch}\, \chi(m) + \mathrm{ch}\, \chi(n)
\end{aligned}$$

($H^{**}(BU(m) ; \underset{\sim}{Q})$ et $H^{**}(BU(n) ; \underset{\sim}{Q})$ étant identifiés à des sous-algèbres de $H^{**}(BU(m) \times BU(n) ; \underset{\sim}{Q})$).

PROPOSITION 1 bis. - Si E et F sont deux fibrés de même base X , on a

$$\mathrm{ch}(E \oplus_X F) = \mathrm{ch}\, E + \mathrm{ch}\, F .$$

La proposition 1 bis se déduit de la proposition 1 (pour $X = Y$) en utilisant l'application diagonale $X \to X \times X$.

<u>Remarque</u>. - La définition du caractère de Chern s'étend au cas des fibrés de dimension non constante. En effet, soit E un fibré sur X (paracompact), de dimension non nécessairement constante. Il est toujours possible de décomposer X en une réunion dénombrable de sous-ensembles X_i à la fois ouverts et fermés disjoints tels que, pour tout i , la dimension de E_{X_i} soit constante. On définit alors $\mathrm{ch}\, E$ comme l'unique élément de $H^{**}(X ; Q)$ induisant $\mathrm{ch}\, E_{X_i}$ sur chaque

$H^{**}(X_i ; Q)$. Le caractère de Chern est alors fonctoriel vis-à-vis des morphismes stricts au sens de l'exposé 1, c'est-à-dire les morphismes qui sont des isomorphismes sur chaque fibre.

La remarque qui précède, jointe à la proposition 1 bis, montre que le caractère de Chern définit un homomorphisme de monoïdes $\Phi(X) \to H^{**}(X ; Q)$ pour tout espace paracompact X , donc d'après la définition de $K(X)$, (cf. exposé 3) définit un homomorphisme de groupes : $K(X) \to H^{**}(X ; Q)$ que nous noterons encore ch .

PROPOSITION 2. - Si E et F sont deux fibrés quelconques (de bases paracompactes), on a

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}\, E \times \mathrm{ch}\, F \qquad \text{(cup-produit externe)} .$$

Comme pour la proposition 1, il suffit de faire la démonstration pour $E = \chi(m)$ et $F = \chi(n)$. Examinons d'abord le cas particulier $m = n = 1$. On a $E = F = \chi(1)$, $X = Y = BU(1)$, et l'on considère le produit tensoriel externe $E \otimes F$ sur $X \times Y$. $E \otimes F$ étant de dimension 1, sa classe totale de Chern s'écrit

$$c(E \otimes F) = 1 + c_1 \text{ , avec } c_1 \in H^2(X \times Y ; Z) .$$

Mais $H^*(X \times Y ; Z) = Z[x_1 , x_2]$, x_1 et x_2 étant les images réciproques du générateur de $H^*(BU(1) ; Z)$ par les projections de $X \times Y$ sur les facteurs. En particulier, on a

$$H^2(X \times Y ; Z) = Zx_1 \oplus Zx_2 .$$

c_1 s'écrit donc : $c_1 = ax_1 + bx_2$, a et b entiers rationnels. Considérons l'application $p : X \to X \times Y$ définie par $p(x) = (x , y_o)$, y_o point fixe de Y . L'homomorphisme

$$p^* : H^2(X \times Y ; \underset{\sim}{Z}) \to H^2(X ; \underset{\sim}{Z})$$

est un projecteur. On a donc $p^* c_1 = ax_1$. D'autre part, on a $p^*(E \otimes F) \approx E$, d'où $p^* c_1 = c_1(E) = x_1$, soit $a = 1$. On montre de même que $b = 1$. Alors,

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \exp c_1 = \exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \exp x_2 = \mathrm{ch}\, E \times \mathrm{ch}\, F ,$$

ce qui démontre la proposition dans ce cas particulier. D'après la distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe, la proposition est alors démontrée si E et F sont des sommes directes de fibrés égaux à $\chi(1)$.

Si maintenant $E = \chi(m)$, $F = \chi(n)$, on a

$$(\alpha_m , \alpha_n)^* \mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(\alpha_m^* E \otimes \alpha_n^* F) = (\mathrm{ch}\, \alpha_m^* E)\ (\mathrm{ch}\, \alpha_n^* F) = (\alpha_m , \alpha_n)^* \mathrm{ch}\, E \times \mathrm{ch}\, F ,$$

ce qui achève la démonstration en vertu de l'injectivité de $(\alpha_m , \alpha_n)^*$.

COROLLAIRE. - Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} K(X) \otimes K(Y) \arrow[r] \arrow[d, "ch \otimes ch"] & K(X \times Y) \arrow[d, "ch"] \\ H^{**}(X\,;\,Q) \otimes H^{**}(Y\,;\,Q) \arrow[r] & H^{**}(X \times Y\,;\,Q) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

PROPOSITION 2 bis. - Si E et F sont deux fibrés de même base X, on a

$$ch(E \otimes_X F) = ch\, E \times ch\, F \qquad \text{(cup-produit interne).}$$

COROLLAIRE. - Le caractère de Chern est un homomorphisme d'anneaux

$$ch : K(X) \to H^{**}(X\,;\,Q) .$$

3. Définition du caractère de Chern : cas relatif.

Dans tout ce paragraphe nous écrirons, pour abréger, $H(X)$ et $H(X, A)$ au lieu de $H^{**}(X\,;\,Q)$ et $H^{**}(X, A\,;\,Q)$. Par un couple d'espaces topologiques (X, A), on entendra toujours X compact, A fermé dans X.

On se propose de définir un homomorphisme du foncteur $K(,)$ dans le foncteur $H(,)$ (considérés comme foncteurs du couple (X, A)) qui se réduise, sur les couples $(X, \emptyset)$, à l'homomorphisme $ch : K(X) \to H(X)$ précédemment défini. On va voir que ce problème a une solution et une seule.

Pour tout espace pointé (X, x_o), on définira $ch : K(X, x_o) \to H(X, x_o)$ comme l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K(X, x_o) \arrow[r] \arrow[d] & K(X) \arrow[r] \arrow[d, "ch"] & K(x_o) \arrow[r] \arrow[d, "ch"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H(X, x_o) \arrow[r] & H(X) \arrow[r] & H(x_o) & \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes, et où les deux flèches verticales de droite sont le ch précédemment défini. Le problème posé a donc une solution unique lorsqu'on restreint les foncteurs $K(,)$ et $H(,)$ à la catégorie des espaces pointés. Or, pour tout couple (X, A), l'application canonique

$$p : (X, A) \to (X/A, a)$$

induit un isomorphisme

$$p^* : K(X/A, a) \to K(X, A) \qquad \text{(cf. exposé 3).}$$

Le problème est alors résolu dans le cas général, si l'on définit

$$\mathrm{ch} : K(X, A) \to H(X, A)$$

comme l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(X/A, a) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & K(X, A) \arrow[d] \\ H(X/A, a) \arrow[r] & H(X, A) \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3. - Le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(X) \otimes K(Y, A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}\otimes\mathrm{ch}"] & K(X \times Y, X \times A) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ H(X) \otimes H(Y, A) \arrow[r] & H(X \times Y, X \times A) \end{tikzcd}$$

est commutatif. (La flèche horizontale supérieure a été définie dans l'exposé 3 ; quant à la flèche inférieure, elle est définie par le cup-produit.)

La démonstration va se faire en deux temps : on va d'abord montrer la commutativité dans le cas où A est réduit à un point ; on se ramènera ensuite à ce cas au moyen de l'isomorphisme : $K(X/A ; a) \approx K(X, A)$.

a. <u>A est un point</u> y_o . - Considérons le diagramme "cubique" :

$$\begin{tikzcd} & K(X) \otimes K(Y) \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathrm{ch}\otimes\mathrm{ch}"] & & K(X \times Y) \arrow[dd, "\mathrm{ch}"] \\ K(X) \otimes K(Y, y_o) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathrm{ch}\otimes\mathrm{ch}"'] & & K(X \times Y, X \times y_o) \arrow[ur, "i^*"] \arrow[dd, "\mathrm{ch}"] & \\ & H(X) \otimes H(Y) \arrow[rr] & & H(X \times Y) \\ H(X) \otimes H(Y, y_o) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H(X \times Y, X \times y_o) \arrow[ur, "i^*"] & \end{tikzcd}$$

Les deux homomorphismes i^* sont injectifs, car $X \times y_o$ est un rétracte de $X \times Y$ (pour le i du haut, voir l'exposé 3). La commutativité du diagramme en résulte, par fonctorialité, compte tenu de la proposition 2.

b. <u>Cas général</u>. - Il suffit de considérer le diagramme suivant, dans lequel $I \otimes p$ est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
 & K(X) \otimes K(Y/A\,,\,a) \arrow[rr] \arrow[dl, "I\otimes p^*"'] \arrow[dd, "ch\otimes ch"] & & K(X \times (Y/A)\,,\,X \times a) \arrow[dl] \arrow[dd, "ch"] \\
K(X) \otimes K(Y\,,\,A) \arrow[rr] \arrow[dd, "ch\otimes ch"'] & & K(X \times Y\,,\,X \times A) \arrow[dd, "ch"] & \\
 & H(X) \otimes H(Y/A\,,\,a) \arrow[rr] \arrow[dl] & & H(X \times (Y/A)\,,\,X \times a) \arrow[dl] \\
H(X) \otimes H(Y\,,\,A) \arrow[rr] & & H(X \times Y\,,\,X \times A) &
\end{tikzcd}$$

COROLLAIRE. - Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K(X) \otimes K(X\,,\,A) \arrow[r] \arrow[d, "ch\otimes ch"] & K(X\,,\,A) \arrow[d, "ch"] \\
H(X) \otimes H(X\,,\,A) \arrow[r] & H(X\,,\,A)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Autrement dit, le caractère de Chern respecte les structures de module de $K(X\,,\,A)$ et de $H(X\,,\,A)$ (sur $K(X)$ et $H(X)$ respectivement).

4. Classe de Todd.

Reprenons les notations du début du paragraphe 2. Soit $Q(x)$ une série formelle à coefficients rationnels, de terme constant égal à 1. Le produit $\prod_{i=1}^{n} Q(x_i)$ est une série de la forme $1 + \sum_{k\geq 1} \tilde{Q}_k(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)$ où les $\tilde{Q}_k$ sont des polynômes (à coefficients rationnels) symétriques par rapport aux x_i, homogènes et de degré k. D'après ce qu'on a dit plus haut, cette série s'écrit de manière unique :

$$q(\chi(n)) = 1 + \sum_{k\geq 1} Q_k(c_1\,,\,\dots\,,\,c_n)\ ,$$

avec $Q_k(c_1\,,\,\dots\,,\,c_n) \in H^{2k}(BU(n)\,;\,\mathbb{Q})$. Pour tout fibré E de base X, nous poserons $q(E) = f^*\,q(\chi(n))$, si $E = f^*\,\chi(n)$. La série $q(E) = 1 + \sum_{k\geq 1} Q_k(E)$, où $Q_k(E) \in H^{2k}(X\,;\,\mathbb{Q})$, dépend fonctoriellement de E. Si X est de dimension finie, ou compact, elle n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, et définit un élément de $H^{\text{pair}}(X\,;\,\mathbb{Q})$.

PROPOSITION 4. - Quels que soient les fibrés E et E', on a

$$q(E \oplus E') = q(E).q(E') \qquad \text{(cup-produit externe).}$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 1.

Définition. - Soit E un fibré de base X. On appelle classe de Todd de E, et l'on note $\tau(E)$, la série définie à partir de la série formelle

$$T(x) = x/(1 - \exp(-x)) = 1 + x/2 + \sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1} B_k\, x^{2k}/2k!$$

(les B_k sont les nombres de Bernoulli).

On a

$$\tau(E) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} T_k(E) .$$

Les $T_k(E)$ sont des polynômes par rapport aux classes de Chern rationnelles de E appelés polynômes de Todd ; on a

$$T_k(E) \in H^{2k}(X ; \mathbb{Q})$$

(pour un calcul de ces polynômes, voir [1],1, § 1).

Appendice.

Nous allons, dans ce qui suit, donner une première caractérisation de $\tau(E)$. Nous reviendrons d'ailleurs plus tard sur cette question.

Soit M une variété analytique complexe compacte, de fibré tangent $T(M)$. Soit n la dimension (complexe) de M, et notons $[M] \in H_{2n}(M ; \mathbb{Q})$ l'image dans l'homologie rationnelle de la classe fondamentale de M. Pour toute série $Q(x)$ vérifiant les conditions du début du paragraphe, la classe $q(T(M))$ prend une valeur sur $[M]$, que nous noterons $q(M)$. Enfin, notons $P_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n.

THÉORÈME.

a. Pour tout n, on a : $\tau(P_n(\mathbb{C})) = 1$.

b. Si pour tout n, on a $q(P_n(\mathbb{C})) = 1$, alors $Q(x) = T(x)$.

Le théorème résultera de la proposition 4, des deux lemmes suivants, et en outre du fait que $[c_1(\chi'(1 , n))]^n$ prend la valeur 1 sur la classe fondamentale de $P_n(C)$ muni de son orientation naturelle (cf. exposé 5, théorème 2.5).

LEMME 1. - Si on note $1_{\mathbb{C}}$ le fibré trivial de rang 1, de base $P_n(\mathbb{C})$, on a

$$T(P_n(\mathbb{C})) \oplus 1_{\mathbb{C}} = \chi'(1 , n) \oplus \dots \oplus \chi'(1 , n)$$

(somme directe interne sur $P_n(\mathbb{C})$ de $n + 1$ termes égaux au fibré dual du fibré universel $\chi(1 , n)$).

Soit en effet L un élément de $P_n(\underset{\sim}{C})$, c'est-à-dire une droite de $\underset{\sim}{C}^{n+1}$. Soit M le supplémentaire orthogonal de L dans $\underset{\sim}{C}^{n+1}$, et soit U_L le voisinage ouvert de L formé des droites qui se projettent sur L . L'application qui, à toute application linéaire de L dans M , associe son graphe, est une carte de U_L . L'espace tangent à $P_n(\underset{\sim}{C})$ au point L s'identifie donc à $\mathrm{Hom}(L , M)$. Le lemme en résulte, vu que la fibre, au point L , du fibré trivial $1_{\underset{\sim}{C}}$ peut s'écrire $\mathrm{Hom}(L , L)$.

LEMME 2.

a. Le coefficient de x^n dans le développement de $(T(x))^{n+1}$ est égal à 1 quel que soit n .

b. La série $T(x)$ est l'unique série (à coefficients rationnels et de terme constant égal à 1) possédant cette propriété.

Démonstration. - Soit J_n le coefficient de x^n dans le développement de $(T(x))^{n+1}$. D'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$J_n = (1/2\pi i)\int_\gamma dz/(1 - \exp(- z)) ,$$

γ étant un petit cercle autour de l'origine. Le changement de variables (régulier à l'origine) $t = 1 - \exp(- z)$ donne alors :

$$J_n = (1/2\pi i) \int_{t^*(\gamma)} dt/(1 - t)t^{n+1} = 1 ,$$

ce qui démontre (a).

Quant au (b), il se déduit du fait que les équations $J_n = 1$ permettent le calcul des coefficients de $T(x)$ par récurrence.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, 9).

[2] Séminaire CARTAN, t. 16, 1963/64, exposés 1-5. - Paris, Secrétariat mathématique.