

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

LOUIS BOUTET DE MONVEL

**Transformation des opérateurs de Calderon-Zygmund
par difféomorphisme**

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 10, p. 1-11

[<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A10_0>](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A10_0)

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION DES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND PAR DIFFÉOMORPHISME

par Louis BOUTET de MONVEL

Cet exposé a pour but de montrer que les opérateurs de Calderon-Zygmund qui semblent faire intervenir la structure affine de l'espace sur lesquels ils ont été définis, sont en fait invariants par difféomorphisme. Ceci permettra de définir un opérateur de Calderon-Zygmund sur une variété.

Dans cet exposé, nous nous placerons toujours sur $\mathbb{R}^n$ ou sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que les espaces H^s (et tous ceux qui interviendront dans cet exposé) sont des espaces de courants impairs de degré 0 ; mais comme dans les deux exposés précédents, nous les identifions aux espaces de distributions auxquels ils sont canoniquement isomorphes.

I. Transformation par difféomorphisme des espaces H^s .

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. H_K^s désigne l'espace des distributions $\varphi \in H^s$, à support dans K , muni de la norme induite par celle de l'espace H^s .

THÉOREME 1. - Soit u un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage ouvert Ω de K sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout s , l'extension de u à l'espace des distributions est un isomorphisme de H_K^s sur $H_{u(K)}^s$.

Démonstration. - C'est évident pour $s = 0$, car $H_K^0 = L_K^2$ (Bien entendu, u ne conserve pas la mesure de Lebesgue ; mais il la transforme en une mesure comprise sur K , entre c et C fois la mesure de Lebesgue, c et C constantes).

Nous allons le démontrer dans le cas $0 < s < 1$. Le théorème sera alors vrai pour $s > 0$, par récurrence sur s , car, pour $s \geq 1$, H_K^s est exactement l'espace des $\varphi \in L^2(K)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in H_K^{s-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), et la norme de H_K^s est équivalente à la norme

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{H^0} + \sum \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{H^{s-1}}.$$

Enfin par dualité, il sera vrai pour $s \leq 0$ (alors H_K^s est l'espace des distributions à support dans K , qui sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie induite par celle de H^{-s}).

Démonstration dans le cas $0 < s < 1$.

LEMME 1. - Si $0 < s < 1$, la norme N , définie par

$$N(\varphi) = \left(\int |\varphi(x)|^2 dx + \iint |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |x - y|^{-n-2s} dx dy \right)^{1/2}$$

est finie sur H^s , et équivalente à sa norme usuelle.

En effet, la deuxième intégrale vaut

$$\int |\varphi(x+y) - \varphi(y)|^2 |x|^{-n-2s} dx dy = \int |x|^{-n-2s} dx \int |\varphi(x+y) - \varphi(y)|^2 dy .$$

Désignons par $\hat{\varphi}(\xi)$ la transformée de Fourier de $\varphi \in H^s \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de $\varphi(x+y)$, considérée comme fonction de y seul, est $e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi)$. La formule de Plancherel montre que

$$\int |\varphi(x+y) - \varphi(y)|^2 dy = \int |e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} - 1|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi ,$$

de sorte que l'intégrale étudiée vaut

$$\begin{aligned} \int |x|^{-n-2} dx \int |e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} - 1|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \int |e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} - 1|^2 |x|^{-n-2s} dx \end{aligned}$$

(remarquons que cette intégrale converge pour $0 < s < 1$) .

Enfin

$$A(\xi) = \int |x|^{-n-2s} |e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} - 1|^2 dx$$

est une fonction finie, positive, de ξ , invariante par rotation, et homogène de degré $2s$; donc $A(\xi) = a|\xi|^{2s}$ ($a > 0$) .

On voit finalement que

$$\iint |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |x - y|^{-n-2s} dx dy = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 a|\xi|^{2s} d\xi ;$$

et

$$N(\varphi) = \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + a|\xi|^2) d\xi \right)^{1/2} .$$

Ce qui montre bien que $N(\varphi)$ est équivalente à la norme usuelle de H_s :

$$\|\varphi\|_{H_s} = \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} .$$

COROLLAIRE. - La norme de H_K^s est équivalente à la norme

$$N_1(\varphi) = \left(\int_K |\varphi(x)|^2 dx + \iint_{K_1 \times K_1} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |x - y|^{-n-2s} dx dy \right)^{1/2}$$

K_1 désignant un voisinage compact de K .

En effet, on vérifie sans peine que le terme négligé :

$$\iint_{\mathbb{C}(K_1 \times K_1)} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |x - y|^{-n-2s} dx dy$$

est uniformément dominé par $\|\varphi\|_{H^s}^2 = \int_K |\varphi(x)|^2 dx$ quand $\text{Supp } \varphi \subset K$.

Si u est un difféomorphisme C^∞ de $\Omega \supset K$ sur $\omega \subset \mathbb{R}^n$, on peut choisir $K_1 \subset \Omega$.

La différentielle de u et son inverse sont alors uniformément bornées sur K_1 ; par suite, la fonction $\frac{|x - y|}{|u(x) - u(y)|}$, et son inverse $\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}$ sont bornées sur K_1 ; et la norme $N_1(\varphi)$ est encore équivalente à la norme $N_2(\varphi)$ définie par

$$N_2(\varphi) = \left(\int_K |\varphi(x)|^2 du(x) + \iint_{K_1 \times K_1} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |u(x) - u(y)|^{-n-2s} du(x) du(y) \right)^{1/2}$$

($du(x)$ désignant l'image réciproque par u de la mesure de Lebesgue sur ω).

Ceci signifie exactement que l'extension de u à l'espace des fonctions définit un isomorphisme $H_K^s \rightarrow H_{u(K)}^s$.

C. Q. F. D.

II. Transformation par difféomorphisme des opérateurs de Calderon-Zygmund.

1. Enoncé du théorème.

Rappelons que le bsupport d'un opérateur $h : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le plus petit fermé F tel que

1° $\text{Supp } h\varphi \subset F$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$;

2° $h\varphi = 0$ si $\text{Supp } \varphi \cap F = \emptyset$

(F est aussi le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $F \times F$ contienne le support du noyau-distribution définissant h).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 1. - On appelle opérateur de Calderon-Zygmund, à bsupport compact sur Ω , la restriction $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ d'un opérateur de Calderon-Zygmund sur $\mathbb{R}^n$, à bsupport compact inclus dans Ω .

Même définition pour les opérateurs de Calderon-Zygmund vectoriels.

Le symbole d'un tel opérateur sera lui aussi défini par restriction. C'est une

fonction numérique (resp. à valeurs dans un espace d'applications linéaires), définie sur $T^*\Omega$ (complémentaire de la section nulle du fibré cotangent à Ω), de classe C^∞_0 , et nulle au-dessus du complémentaire d'un compact de Ω .

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 2. - Si u est un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur un autre : ω , et si h est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact, sur Ω ,

1° l'image $u(h)$ de h par u est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ à bisupport compact sur ω ,

2° le symbole de $u(h)$ est l'image par u du symbole de h .

Rappelons que $u(h)$ opère en fait de $\mathcal{O}(\omega)$ dans $\mathcal{O}(\omega)$ puisqu'il est à bisupport compact.

$u(h)$ est défini par

$$u(h) \cdot \varphi = [h(\varphi \circ u)] \cdot u^{-1} \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{O}(\omega).$$

L'image du symbole σ de h par u est la fonction $u(\sigma)$ sur $T^*_0\omega$, définie par

$$u(\sigma)(x, \xi) = \sigma(u^{-1}(x), {}^tDu(u^{-1}(x)) \cdot \xi)$$

(ξ désignant un vecteur cotangent sur ω , x sa projection, et Du la différentielle de u).

Avant d'aborder la démonstration, nous allons faire quelques réductions.

Remarque 1. - Le théorème 2 est vrai pour les opérateurs différentiels (cf. exposés 1 et 2).

Remarque 2. - Le § I montre qu'il est vrai pour les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact, ρ -améliorants.

Remarque 3. - Si le théorème est vrai pour deux opérateurs h_1 et h_2 , il est vrai pour leur produit $h_1 \circ h_2$.

Nous allons démontrer le théorème pour les opérateurs d'ordre ρ , quand $-n < \rho < 0$. Le théorème résultera alors des remarques 1, 2 et 3, et du lemme suivant :

LEMME 2. - Tout opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact sur Ω est égal, à un opérateur ρ -améliorant près, au produit d'un opérateur différentiel, et d'une suite d'opérateurs de Calderon-Zygmund $h_1, h_2, \dots, h_r$ d'ordres $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$, avec $-n < \rho_i < 0$, à bisupports compacts.

Démonstration. - Il suffit (d'après l'exposé n° 9) de montrer que si $\sigma(x, \xi)$ est un ρ -symbole nul pour $x \notin K$ (K compact $\subset \Omega$), on a

$$\sigma(x, \xi) = \sigma_0(x, \xi) \times \sigma_1(x, \xi) \times \dots \times \sigma_r(x, \xi),$$

où $\sigma_0(x, \xi)$ est le symbole d'un opérateur différentiel,

$\sigma_1(x, \xi), \dots, \sigma_r(x, \xi)$ des symboles d'ordre $\rho_1, \dots, \rho_r$, avec $-n < \rho_1 < 0$, et $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont tous nuls pour $x \notin K'$ (K' compact $\subset \Omega$).

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, égale à 1 sur K . Soit p un entier tel que $\rho - 2p < 0$. Et soit r un entier tel que $-n < \rho' = \frac{\rho - 2p}{r} < 0$.

On peut prendre

$$\sigma_0 = \varphi(x) \cdot |\xi|^{2p} \quad (\text{symbole d'un "laplacien" itéré})$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{r-1} = \varphi(x) \cdot |\xi|^{\rho'}$$

$$\sigma_r = \sigma(x, \xi) \cdot |\xi|^{-2p - (r-1)\rho'} = \sigma(x, \xi) \cdot |\xi|^{-\rho + \rho'}$$

2. Etude du noyau des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre $\rho < 0$.

PROPOSITION 1. - Soit $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et soit

$$B(x, z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; -n - \rho) \quad (\rho < 0)$$

(espace des fonctions C^∞ , homogènes de degré $-n - \rho$ en z , "à décroissance rapide" en x).

Alors $B(x, x - y) \psi(y) dy$ est le noyau d'un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , dont le symbole est

$$\sigma(x, \xi) = \psi(x) \mathfrak{F}_z B(x, z) (\xi).$$

Rappelons que si $N(x, y)$ est sommable, l'opérateur de noyau $N(x, y) dy$ est défini par

$$f(x) \rightsquigarrow g(x) = \int N(x, y) f(y) dy.$$

Nous rappelons le résultat suivant [GARDING (démontré dans l'exposé n° 8, § 4)] :

LEMME 3. - La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace des distributions homogènes de degré $-n - \rho$, C^∞ en dehors de l'origine, sur l'espace des distributions homogènes de degré ρ , C^∞ en dehors de l'origine.

$\mathfrak{F}_z B(x, z) (\xi)$ désigne la restriction au complémentaire de l'origine de la transformée de Fourier partielle par rapport à z de $B(x, z)$. C'est une fonc-

tion de x, ξ qui, d'après le lemme 3, appartient à

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; -\rho) = \mathcal{S}(T_0^* \mathbb{R}^n; \rho)$$

(espace des symboles d'ordre ρ).

Démonstration de la proposition 1.

1° Cas où $B(x, z) = \varphi(x) B(z)$ avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{S}(\Sigma; -n - \rho)$.

Alors l'opérateur h de noyau $B(x, x - y) \psi(y) dy$ est le produit de trois opérateurs

$$h = (\varphi) \circ (B) \circ (\psi)$$

où (φ) (resp. (ψ)) désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ (resp. $\psi \in \mathcal{S}$), et (B) désigne l'opérateur de convolution avec la distribution définie par B : si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(B).f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}B.\mathcal{F}f).$$

D'après le lemme 3, $\mathcal{F}B$ est une distribution C^∞ , homogène de degré ρ en dehors d'un voisinage compact de l'origine.

La proposition 5 bis de l'exposé n° 9 montre alors que h est un opérateur de Calderon-Zygmund, qui a pour symbole

$$\sigma_h(x, \xi) = \varphi(x) \psi(x) \mathcal{F}B(\xi) = \psi(x) \mathcal{F}_z B(x, z)(\xi).$$

2° Le cas général se déduit du précédent par passage au produit tensoriel complété.

En effet considérons les trois applications bilinéaires suivantes :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma; -n - \rho) \rightarrow \cap \mathcal{L}(H^S, H^{S-\rho})$$

définie par $(\varphi, B) \rightsquigarrow h$ (h désignant l'opérateur de noyau $\varphi(x)B(x, x - y)\psi(y)dy$)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma; -n - \rho) \rightarrow \mathcal{S}(T_0^* \mathbb{R}^n; \rho)$$

définie par $(\varphi, B) \rightsquigarrow \sigma_{(h)} = \psi(x) \mathcal{F}_z B(x, z)(\xi)$ (symbole de l'opérateur h ci-dessus)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma; -n - \rho) \rightarrow \cap \mathcal{L}(H^S, H^{S-\rho+1})$$

définie par $(\varphi, B) \rightsquigarrow h - \Theta(\sigma_{(h)})$ où $\Theta(\sigma_{(h)})$ désigne l'opérateur de Calderon-Zygmund canonique défini par le symbole $\sigma_{(h)}$ (exposé n° 9).

Ces trois applications sont continues, donc se prolongent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; -n - \rho)$.

Ainsi, si h désigne l'opérateur de noyau $B(x, x - y) \psi(y) dy$ de la proposition 1, et $\sigma(h)$ la fonction $\psi(x) \mathcal{F}_z B(x, z)(\xi)$, $h - \Theta(\sigma_{(h)})$ est un opérateur

ρ -améliorant. Donc h est un opérateur de Calderon-Zygmund, d'ordre ρ , et a pour symbole $\sigma(h)$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - On suppose $-n < \rho < 0$.

Soit h un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact K .

Il existe un opérateur h' , différent de h par un opérateur ρ -améliorant, et ayant pour noyau

$$\varphi(x) B(x, x-y) \psi(y) dy$$

où $B(x, z)$ est C^∞ pour $z \neq 0$, homogène de degré $-n-\rho$ en z ; φ et ψ sont C^∞ , à support dans un voisinage compact donné de K .

En effet, si ρ est compris entre $-n$ et 0 , toute fonction C^∞ , homogène de degré ρ pour $\xi \neq 0$, est sommable au voisinage de 0 , et définit une distribution homogène de degré ρ . Comme il n'y a pas de distribution homogène de degré ρ à support ponctuel, le lemme 3 montre que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{E}(\Sigma; -n-\rho)$ sur $\mathcal{E}(\Sigma; \rho)$. L'application

$$B(x, z) \rightsquigarrow \mathfrak{F}_z B(x, z) (\xi)$$

est alors un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; -n-\rho)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$.

Soit $\sigma(x, \xi)$ le symbole de h . On a $\sigma(x, \xi) = \mathfrak{F}_z B(x, z) (\xi)$ pour une fonction $B(x, z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma; -n-\rho)$ convenable.

Comme $\sigma(x, \xi)$ est nul si $x \notin K$, on a $\sigma(x, \xi) = \varphi(x) \psi(x) \mathfrak{F}_z B(x, z) (\xi)$ si φ et ψ (appartenant à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$) sont égales à 1 au voisinage de K . On peut en outre supposer φ et ψ nulles en dehors d'un voisinage donné de K .

Alors l'opérateur h' de noyau $\varphi(x) B(x, x-y) \psi(y) dy$ est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , et a même symbole que h , d'après la proposition 1. Il diffère donc de h par un opérateur ρ -améliorant.

3. Démonstration du théorème 2 pour les opérateurs d'ordre ρ (quand $-n < \rho < 0$).

u désigne un difféomorphisme $C^\infty: \Omega \rightarrow \omega$, $v = u^{-1}$ désignera le difféomorphisme inverse.

Soit h un opérateur de Calderon-Zygmund, à bisupport compact, d'ordre ρ ($-n < \rho < 0$) sur Ω . Le corollaire de la proposition 1, et la remarque 2 suivant l'énoncé du théorème permettent de supposer que h a pour noyau

$$\varphi(x) B(x, x-y) \psi(y) dy$$

(avec $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$; $B(x, z)$ étant C^∞ , homogène de degré $-n + \alpha$ pour $z \neq 0$).

L'opérateur $u(h)$ est alors défini par :

$$\begin{aligned} u(h).f &= g(x) = \int_{\Omega} \varphi(vx) B(vx, vx-y) \psi(y) f(uy) dy \\ &= \int_{\omega} \varphi(vx) B(vx, vx-vy) \psi(vy) f(y) J(y) dy \end{aligned}$$

(avec $J(y) = |\det Dv(y)|$, Dv désignant la différentielle de v).

$u(h)$ a donc pour noyau

$$\varphi(vx) B(vx, vx-vy) \psi(vy) J(y) dy.$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 2, nous allons faire un développement de Taylor de v et de B :

$$v(x) - v(y) = Dv(x).(x-y) + \sum_{2 \leq |k| \leq r} \frac{v^{(k)}}{k!}(x).(x-y)^k + \varepsilon(x, y)$$

où $\varepsilon(x, y)$ est une fonction C^∞ , dominée par $|x-y|^{r+1}$ sur tout compact.

$$B(X, a+c) = B(X, a) + \sum_{1 \leq |\rho| \leq m} \frac{\partial^\rho}{\partial z^\rho} B(X, a).c^\rho + \eta(X, a, c)$$

D'où en composant :

$$B(vx, vx-vy) = B(vx, Dv(x).(x-y)) + \dots$$

Le premier terme est C^∞ pour $x \neq y$, homogène de degré $-n + \alpha = -n - \rho$ en $(x-y)$. L'opérateur h_1 qui lui correspond est, d'après la proposition 1, un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , qui a pour symbole

$$\begin{aligned} \sigma_{h_1}(x, \xi) &= \varphi(vx) \psi(ux) J(x) [\mathfrak{F}_z B(vx, Du(x).z)](\xi) \\ &= \varphi(ux) \psi(vx) [\mathfrak{F}_z B(ux, Du(x).z).|\det Dv(x)|](\xi) \\ &= \varphi(vx) \psi(ux) [\mathfrak{F}_z B(vx, z)](t_{Dv}^{-1}(\xi)) = u(\sigma_h)(x, \xi). \end{aligned}$$

En examinant les autres termes du développement, nous allons montrer que $h - h_1$ est un opérateur ρ -améliorant.

Les autres termes se séparent en deux sortes :

1° Termes où ne figure aucun des restes (ε ou η). On vérifie qu'ils sont homogènes, de degré $\geq -n + \alpha + 1$ en $(x-y)$. Les opérateurs qui leur correspondent sont donc ρ -améliorants d'après la proposition 1.

2° Termes où figure le reste du développement de Taylor de v ou de B .

Nous allons montrer que, pour s donné, les noyaux correspondant à ces termes opèrent continûment $H^s \rightarrow H^{s-\rho+1}$ si les développements ont été poussés assez loin. Pour cela, nous nous servons du lemme suivant :

LEMME 4. - Si $N(x, y)$ est de classe C^{2k} , à support compact, l'opérateur de noyau $N(x, y)$ dy opère continûment $H^s \rightarrow H^k$ pour $|s| \leq k$.

L'hypothèse entraîne que $x \rightsquigarrow N_x(y) = N(x, y)$ est une fonction k fois continûment différentiable : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}^k(\mathbb{R}^n)$. Le noyau $N(x, y)$ dy opère donc continûment $\mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^k$, et a fortiori, il opère continûment $H^s \rightarrow H^k$ pour $|s| \leq k$.

Examinons d'abord le reste $\eta(x, y)$ provenant du développement de Taylor de B . Il est C^∞ pour $x \neq y$. Il s'agit d'étudier son comportement au voisinage de la diagonale.

Posons comme ci-dessus

$$\eta(X, a, c) = B(X, a + c) - B(X, a) - \sum_{1 \leq |\ell| \leq m} \frac{\partial^\ell}{\partial z^\ell} B(X, a) \cdot c^\ell.$$

Sous forme intégrale, ce reste s'écrit

$$\eta(X, a, c) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} B(X; a + tc) \frac{(t-1)^m}{m!} dt$$

(formule valable si $a + tc \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$).

En se servant du fait que $B(x, z)$ est homogène de degré $-n-\rho$ en z , on montre sans difficulté qu'une dérivée d'ordre k par rapport à X, a, c de $\left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} B(X, a + tc)$ est dominée par

$$(|a| - |c|)^{(-n-\rho)-(m+1)-k} |c|^{(m+1)-k}$$

quand a et c tendent vers 0, avec $|c| \leq |a|$, uniformément quand $0 \leq t \leq 1$ et quand X parcourt un compact.

La même majoration vaut pour $\eta(X, a, c)$.

Enfin comme $X = vx$,

$$a = vx - vy = O(|x - y|) \text{ sur tout compact}$$

$$\text{et } c = vx - vy - Dv(x) \cdot (x - y) = O(|x - y|^2)$$

sont des fonctions C^∞ de x et y , une dérivée d'ordre k de $\eta(x, y)$ est dominée sur tout compact par

$$|x - y|^{(-n-\rho)-(m+1)-k} |x - y|^{2(m+1)-2k} = |x - y|^{(-n-\rho-3k)+(m+1)}.$$

Par suite, si l'ordre m du développement de E est assez grand, $\eta(x, y)$ et ses dérivées d'ordre $\leq 2p$ tendent vers 0 quand $|x - y| \rightarrow 0$. $\eta(x, y)$ est de classe C^{2p} , et le noyau correspondant opère continûment $H^s \rightarrow H^{s-\rho+1}$ si on a choisi $p \geq |s|, |s - \rho + 1|$, d'après le lemme 3.

m étant choisi comme ci-dessus, montrons que les autres termes (où figure le reste $\varepsilon(x, y)$) sont eux aussi suffisamment différentiables, donc que les noyaux qui leur correspondent opèrent continûment $H^s \rightarrow H^{s-\rho+1}$ si l'ordre r du développement de v est assez grand. Cela résulte immédiatement de la remarque suivante : si $a(x, z)$ est C^∞ , homogène de degré k en z , pour $z \neq 0$, et si $\varepsilon_1(x, z)$ est C^∞ , dominée sur tout compact par $|z|^{\ell+1}$, le produit $a(x, x-y) \varepsilon_1(x, x-y)$ est de classe $C^{k+\ell}$. (Les termes où figure le reste du développement de v sont de cette forme, avec $k \geq -n - \rho - m$, $\ell \geq r$) Ainsi, si les développements ont été poussés assez loin, tous les noyaux correspondant aux restes opèrent continûment $H^s \rightarrow H^{s-\rho+1}$.

Si h_1 désigne comme ci-dessus l'opérateur de Calderon-Zygmund de noyau

$$\varphi(vx) B(vx, Dv(x) \cdot (x - y)) \psi(vy) J(y) dy,$$

on voit que $u(h) = h_1$ opère continûment $H^s \rightarrow H^{s-\rho+1}$. Comme ceci est vrai pour tout s , c'est un opérateur ρ -améliorant.

Par suite $u(h)$ est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , et a même symbole que h_1 c'est-à-dire $u(\sigma_h)$

C. Q. F. D.

Ceci, avec les remarques qui suivent l'énoncé du théorème, en achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - L'énoncé du théorème 2 s'applique sans modification aux opérateurs de Calderon-Zygmund vectoriels.

COROLLAIRE 2. - Soient U, V deux isomorphismes de fibrés vectoriels C^∞
 $U : \Omega \times E \rightarrow \omega \times E \quad \{ (x, e) \rightsquigarrow (u(x), A(x) \cdot e) \}$
 $V : \Omega \times F \rightarrow \omega \times F \quad \{ (x, f) \rightsquigarrow (u(x), B(x) \cdot f) \}$
au-dessus du même difféomorphisme $u : \Omega \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit h un opérateur de
Calderon-Zygmund à bisupport compact, d'ordre ρ , sur Ω , de E dans F .

L'image de h par (U, V) est un opérateur de Calderon-Zygmund h_1 d'ordre ρ , à bisupport compact, sur ω , de E dans F ; et le symbole de h_1 est

$$\sigma_{h_1}(x, \xi) = B(u^{-1}x) \sigma_h(u^{-1}x, {}^t D u(x) \cdot \xi) A^{-1}(u^{-1}x).$$

Démonstration. - Le théorème 2 permet de supposer que u est l'identité. L'image h_1 de h est alors définie par

$$h_1(\varphi) = B(x) [h(A^{-1}(t) \varphi(t))] (x) \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{O}_E(\Omega) .$$

Si $\lambda(x) \in \mathcal{O}(\Omega)$ est égale à 1 sur un voisinage du bsupport de h , on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{O}_E(\Omega)$,

$$h_1(\varphi) = \lambda(x) B(x) \cdot [h(\lambda(t) A^{-1}(t) \varphi(t))] (x)$$

or $\varphi \rightsquigarrow \lambda(t) A^{-1}(x) \varphi(x)$ (resp. $\psi \rightsquigarrow \lambda(x) B(x) \psi(x)$) est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre 0 de E dans E (resp. F dans F) qui a pour symbole $\sigma(x, \xi) = \lambda(x) A^{-1}(x)$ (resp. $\lambda(x) B(x)$). h_1 est donc un opérateur de Calderon-Zygmund, et a pour symbole

$$\lambda(x) B(x) \cdot \sigma_h(x, \xi) \cdot \lambda(x) A^{-1}(x) = B(x) \sigma_h(x, \xi) A^{-1}(x) .$$

Si on définit le symbole de h comme une section du fibré $T_0^* \Omega$ dans le fibré

$$\mathcal{L}(\Omega \times E, \Omega \times F) \simeq \Omega \times \mathcal{L}(E, F) ,$$

on voit que le symbole de l'image de h est l'image du symbole de h .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).
- [2] SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.