SÉMINAIRE HENRI CARTAN

JEAN CERF

Théorèmes de fibration des espaces de plongements. Applications

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 8, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A2_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN
15e année, 1962/63, n° 8

17 décembre 1962

THÉORÈMES DE FIBRATION DES ESPACES DE PLONGEMENTS. APPLICATIONS

par Jean CERF

1. Les théorèmes de fibration des espaces de plongements.

On considère des espaces de fonctions de classe C^∞, de source une variété à bord anguleux (cf. [2], exposé 1, p. 2) V et de but une variété W ; on suppose que la source V est compacte (c'est le cas dans toutes les applications qu'on a en vue), et on munit les espaces fonctionnels de la topologie C^∞ (cf. [2], exposé 4, p. 3).

Dans ce paragraphe, afin d'obtenir des énoncés ayant le maximum de simplicité, on se borne au cas où le but W est sans bord ; on indiquera plus loin (cf. n° 2, 3°) comment les énoncés doivent être modifiés lorsque W a un bord non vide.

On note $\mathrm{Pl}(V, W)$ l'espace des plongements de classe C^∞ de la variété V dans la variété W.

THÉORÈME 1. - Soient V une variété compacte (à bord anguleux), W une variété sans bord ; soit M une sous-variété formée de V ; l'application canonique

$$\mathrm{Pl}(V, W) \to \mathrm{Pl}(M, W)$$

est une fibration localement triviale [1].

THÉORÈME 2. - Soient V, W, M comme ci-dessus ; soit f_0 un plongement de V dans W ; on identifie V à son image dans W ; on note $\mathrm{Pl}(V, W ; M)$ l'espace des plongements de V dans W qui induisent l'identité sur M. Soit r un entier $\geqslant 1$ (ou éventuellement $r = \infty$) ; on note $J^r_M \mathrm{Pl}(V, W ; M)$ l'espace des r-jets le long de M de ces plongements, muni de la topologie naturelle des espaces de jets [2]. L'application canonique :

---

[1] On rappelle que si E et B sont deux espaces topologiques et p une application continue : $E \to B$, on dit que p est une fibration localement triviale si pour tout $x_0 \in B$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $p^{-1}(\mathcal{V})$ soit homéomorphe à $\mathcal{V} \times p^{-1}(x_0)$ de façon compatible avec les projections sur $\mathcal{V}$; on notera que la fibre située au-dessus d'un point dépend en général de la composante connexe de ce point ; elle peut être vide, autrement dit p n'est pas supposée surjective.

[2] On rappelle que le r-jet le long de M d'une application de V dans W est la classe d'équivalence définie dans $\mathrm{Hom}^\infty(V, W)$ par la relation "être tangents jusqu'à l'ordre r le long de M" (cf. [1], II, 3).

$$Pl(V , W ; M) \to J^r_M Pl(V , W ; M)$$

est une fibration localement triviale.

THÉORÈME 3. - Soient V et W comme au théorème 1. Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe de tous les difféomorphismes de V. $\mathcal{G}$ opère à droite dans $Pl(V , W)$, et y détermine une structure d'espace fibré principal (au sens de [3], exposé 8). Si en plus $\mathcal{G}$ est ouvert, alors l'application canonique

$$Pl(V , W) \to Pl(V , W)/\mathcal{G}$$

est une fibration localement triviale.

La démonstration de ces trois théorèmes se fait suivant le même principe ; on utilise le lemme suivant, qui permet de se ramener à montrer l'existence de sections locales pour les opérations d'un groupe dans un espace.

LEMME 1. - Soient E et B deux espaces topologiques, p une application continue : $E \to B$. Pour que p soit une fibration localement triviale, il suffit que pour tout $x_o \in B$ il existe un groupe topologique G opérant à gauche dans E et dans B de façon que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ \text{identité} \times p \downarrow & & p \downarrow \\ G \times B & \longrightarrow & B \end{array}$$

soit commutatif, et que l'application : $g \to g.x_o$ de G dans B ait une section continue au voisinage de x_o.

Démonstration du lemme 1. - Soit F_o la fibre de E située au-dessus de x_o. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de x_o tel qu'il existe au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue pour l'application $g \to g.x_o$; il existe alors une application continue $\sigma : \mathcal{V} \to G$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $\sigma(x).x = x_o$; l'application

$$p^{-1}(\mathcal{V}) \ni z \to (p(z) , \sigma(p(z)).z) \in \mathcal{V} \times F_o$$

est alors un homéomorphisme, car elle a une application réciproque continue, à savoir :

$$\mathcal{V} \times F_o \ni (x , y) \to (\sigma(x))^{-1}.y \in p^{-1}(\mathcal{V}) \quad .$$

Application du lemme 1 à la démonstration des théorèmes de fibration.

THÉORÈME 1. - Soit $k_o \in Pl(M , W)$; on identifie M à son image par k_o ; soit T un voisinage tubulaire fermé de M dans W ; on note $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur $W - T$. Le groupe $\mathcal{H}$ opère à

gauche dans $Pl(V, W)$ et $Pl(M, W)$ de façon compatible avec l'application canonique du premier espace sur le second ; d'après le lemme 1, on est ramené à montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de k_o dans $Pl(M, W)$ et une application continue $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$, tels que $\sigma(k)|M = k$ pour tout $k \in \mathcal{V}$. Autrement dit, $\sigma(k)$ doit être un difféomorphisme de W (à "support" dans T) prolongeant k. Or, à l'aide de la théorie de Whitney sur le prolongement des fonctions différentiables, on montre facilement qu'il existe au voisinage de k_o une application continue : $k \to \sigma'(k) \in \mathrm{Hom}(W, W ; W - T)$, telle que $\sigma'(k)$ soit un prolongement de k, et $\sigma'(k_o) = e$; donc, pour k assez voisin de k_o, $\sigma'(k)$ est voisin de e ; c'est donc un difféomorphisme (cf. [2], exposé 5, corollaire 2, p. 3 ; ou [1], II, 1.4.2, p. 287).

THÉORÈME 2. - Le rôle du groupe G du lemme 1 est joué ici par le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur M et sur le complémentaire d'un voisinage fixe de M dans W (pour la démonstration du théorème d'existence de sections locales, auquel on se trouve ramené, cf. [1], II, 3.2 et 3.3).

THÉORÈME 3. - On se borne à démontrer la deuxième assertion (locale trivialité lorsque $\mathcal{E}$ est ouvert). On note $Pl(V, W) = \mathcal{E}$; soit $f_o \in \mathcal{E}$; on identifie V à son image par f_o. Soient T un voisinage tubulaire fermé de V dans W, et $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur $W - T$. Le groupe $\mathcal{H}$ opère à gauche dans $\mathcal{E}$, et ces opérations passent au quotient dans $\mathcal{E}/\mathcal{B}$ (puisque $h.(f.g) = (h.f).g$), de sorte qu'ici encore $\mathcal{H}$ joue le rôle du groupe G du lemme 1. D'après ce lemme, on est donc ramené à ceci : soit $\dot{f}_o$ l'image de f_o dans $\mathcal{E}/\mathcal{B}$; il existe une section continue au voisinage de $\dot{f}_o$ pour l'application $h \to h.f_o$. Or, en [1], II, 2.4.4, on a établi le résultat suivant (qui servait à donner une démonstration du premier théorème de fibration n'utilisant pas la théorie du prolongement de Whitney) :

LEMME 2. - *Avec les notations ci-dessus, il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* f_o *dans* $\mathcal{E}$ *et une application* $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$, *tels que :*

(i) $\tau(f_o) = e$;

(ii) *pour tout* $f \in \mathcal{V}$, $\tau(f).f$ *est de la forme* $f_o.g$, *où* g *est un difféomorphisme de* V ;

(iii) *pour tout* $f \in \mathcal{V}$, *et pour tout difféomorphisme* g *de* V *tel que* $f.g \in \mathcal{V}$, $\tau(f.g) = \tau(f)$.

Appliquons ce lemme. La relation d'équivalence définie par $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$ étant ouverte, l'image $\dot{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est un voisinage ouvert de $\dot{f}_o$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$, et la topologie de $\dot{\mathcal{V}}$ est la topologie quotient de celle de $\mathcal{V}$ pour la relation d'équivalence induite ; donc, d'après (iii), τ passe au quotient et définit une application continue $\dot{\tau} : \dot{\mathcal{V}} \to \mathcal{H}$. D'après (i) et (ii), pour f assez voisin de f_o, $\tau(f).f$ s'identifie à un difféomorphisme de V qui est voisin de l'identité, donc, puisque $\mathcal{G}$ est ouvert, à un élément de $\mathcal{G}$. Donc pour $\dot{f}$ assez voisin de $\dot{f}_o$, $\dot{\tau}(\dot{f}).\dot{f} = \dot{f}_o$; donc $\dot{\tau}^{-1}$ fournit la section cherchée.

2. Quelques compléments relatifs aux théorèmes 1 et 2.

1° On peut donner un énoncé qui généralise à la fois le théorème 1 et le théorème 2 (et qui est une conséquence immédiate des théorèmes d'existence de sections locales utilisés pour démontrer ces théorèmes ; cf. [1], théorème 6', p. 319) :

THÉORÈME 2'. - Soient V, W, M comme dans l'énoncé du théorème 1 ; soit r un entier $\geqslant 1$ (ou éventuellement $r = \infty$). L'application canonique :

$$Pl(V , W) \to J^r_M Pl(V , W)$$

est une fibration localement triviale.

2° Fibration de certains sous-espaces de $Pl(V , W)$.

On utilisera dans la suite les deux théorèmes suivants, analogues au théorème 1, mais donnant des fibrations de certains sous-espaces de $Pl(V , W)$:

THÉORÈME 1.a. - Soient V, W, M, f_o, r comme dans l'énoncé du théorème 2 ; soit L un fermé de M ; soit N un "tube local" ([3]) normal à M dans V, d'âme L ; on note $Pl(V , W ; J^r_N)$ l'espace des plongements de V dans W qui sont r-tangents à f_o le long de N ; l'application canonique :

$$Pl(V , W ; J^r_N) \to Pl(M , W ; J^r_L)$$

est une fibration localement triviale.

([3]) C'est-à-dire une partie de V telle qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M dans V et un tube T normal à M dans V, d'âme L, tels que

$$\mathcal{V} \cap N = \mathcal{V} \cap T \quad .$$

THÉORÈME 1.b. - Soient V , W , M , f_o , r , L comme ci-dessus ; on suppose en plus que dimension M = dimension V , et que $V - M$ est une sous-variété de V , qu'on note M' ; on note $M \cap M' = Q$. Soit N un tube local ([3]) normal à Q dans M' , d'âme $L \cap Q$; l'application canonique :

$$Pl(V , W ; J^r_{L\cup N}) \to Pl(M , W ; J^r_L)$$

est une fibration localement triviale.

Les théorèmes 1.a et 1.b sont des cas particuliers d'un théorème de [1] (corollaire 2 du théorème 5', p. 298), qui se démontre à l'aide d'un théorème d'existence de sections locales analogue à celui utilisé ci-dessus pour démontrer le théorème 1.

On utilisera également le théorème suivant, analogue au théorème 2 (et qui est un cas particulier du corollaire du théorème 6" de [1], p. 321) :

THÉORÈME 2.a. - Soient V , W , M , f_o , r , L , N comme dans l'énoncé du théorème 1.a ; on note $Pl(V , W ; M ; J^r_N)$ l'espace des plongements de V dans W qui coïncident avec f_o sur M et sont r-tangents à f_o le long de N . L'application canonique

$$Pl(V , W ; M ; J^r_N) \to J^r_M Pl(V , W ; M ; J^r_N)$$

est une fibration localement triviale.

3° Cas où W a un bord non vide.

Dans le cas où, toutes les autres hypothèses restant les mêmes, on suppose que W est une variété à bord (anguleux), on a des théorèmes analogues aux théorèmes 1 et 2 pour les espaces de plongements ayant des "relations d'incidence" ([4]) données. Par exemple, le théorème 1 se généralise comme suit :

"Soient V , W , M , f_o comme dans l'énoncé du théorème 2 ; soit k_o l'injection de M dans W ; on note $Pl(V , W ; f_o)$ l'espace des plongements de V dans W ayant mêmes relations d'incidence que f_o . L'application canonique :

$$Pl(V , W ; f_o) \to Pl(M , W ; k_o)$$

est une fibration localement triviale."

Les théorèmes 2, 2', 1.a, 1.b, 2.a ci-dessus admettent des généralisations analogues. Du théorème 2.a ainsi généralisé on déduit immédiatement la proposition suivante :

([4]) Cf. [2], exposé 2, définition 3, p. 2

PROPOSITION 1. - Soit V une variété compacte, à bord anguleux, dont toutes les faces de codimension 1 soient des sous-variétés ; soit M une partie du bord ∂V de V qui soit réunion de telles faces ; on note $\mathrm{Diff}(V ; \partial V ; J^r_M)$ le groupe des difféomorphismes de V qui induisent l'identité sur ∂V et qui sont tangents d'ordre r à l'identité le long de M. L'application canonique :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(V ; J^r_{\partial V})) \to \pi_i(\mathrm{Diff}(V ; \partial V ; J^r_M)$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

Cas particulier. - L'application canonique

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(V ; J^r_{\partial V})) \to \pi_i(\mathrm{Diff}(V ; \partial V))$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

3. Espaces de plongements et arrondissement des arêtes.

Soit V une variété compacte ; supposons d'abord que V soit à bord lisse ; soit T un voisinage tubulaire dans V du bord ∂V de V ; T est difféomorphe à $\partial V \times [0 , 1]$. Soit ρ un difféomorphisme de $[0 , 1]$ sur $[1/3 , 1]$ qui induise l'identité sur $[2/3 , 1]$; on choisit une trivialisation de T, et on pose, pour tout $\lambda \in [0 , 1]$,

$$(1) \qquad g_\lambda(x , \xi) = (x , (1 - \lambda)\xi + \lambda\rho(\xi)) \quad \text{pour} \quad (x , \xi) \in \partial V \times [0 , 1]$$

g_λ définit un plongement de T dans T, qui se prolonge canoniquement en un plongement de V dans V, qu'on note encore g_λ, et qui vérifie :

a. g_λ dépend continuement de λ ;

b. $g_0 =$ identité ;

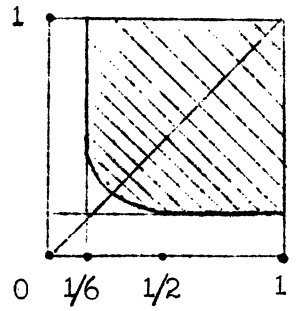
c. pour tout λ, g_λ induit l'identité sur $V - T$

d. $\lambda' < \lambda$ entraîne : $g_{\lambda'}(V) \subset g_\lambda(V)$.

Supposons maintenant que V ait un bord anguleux ; ∂V possède alors un "voisinage prismatique" T dans V ; cette notion est définie de façon précise dans [1], page 250 ; on peut dire de façon heuristique que " T est un fibré généralisé" de base ∂V ; la "fibre" située au-dessus d'un point x intérieur à une face de dimension q de V est l'image d'un plongement $[0 , 1]^{n-q} \to V$ qui envoie l'origine en x, et qui est bien déterminé, à une permutation près du cube $[0 , 1]^{n-q}$, par la donnée de T. En prolongeant le difféomorphisme ρ ci-dessus

de façon naturelle à $[0\ ,\ 1]^{n-q}$, on peut encore définir à l'aide de la formule (1) appliquée dans un système convenable de cartes définissant T , une famille (g_λ) de plongements de V dans V ayant les propriétés (a), (b), (c), (d) ci-dessus (pour les détails, cf. [1], p. 297).

Soit maintenant X une arête de V (cf. [2], exposé 3, p. 1) ; la partie T_X de T située au-dessus de X est un fibré de base X , de fibre $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$, de groupe structural $\underset{\sim}{Z}_2$ (opérant par la symétrie diagonale). Soit A la partie de $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$ hachurée sur la figure ci-contre (A est convexe, limitée par une courbe de classe C^∞ , symétrique par rapport à la diagonale, et contient le segment $[1/2, 1] \times \{1/6\}$). La donnée de A et de T_X définit une partie A_X de T_X ; soit V' la partie de V définie par :



$$\begin{cases} V' \cap T_X = A_X \\ V' \cap (V - T_X) = (\rho_{1/2}(V)) \cap (V - T_X) \end{cases}$$

V' est une sous-variété de l'intérieur de V , difféomorphe à la variété obtenue à partir de V en arrondissant X (cf. [2], exposé 3, p. 1 et 2). Pour tout $x \in X$, la restriction de ρ_λ à la fibre T_x de T située au-dessus de x est définie (après identification de T_x à $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$) par

$$\rho_\lambda(\xi_1\ ,\ \xi_2) = (\rho_\lambda(\xi_1)\ ,\ \rho_\lambda(\xi_2)) \qquad ;$$

or $\rho_\lambda(\xi) \geqslant \xi$ pour tout $\xi \in [0\ ,\ 1]$; donc, d'après la convexité de A , (g_λ) vérifie

e. pour tout $\lambda \in [0\ ,\ 1]$, $g_\lambda(V') \subset V'$.

Comparaison du groupe des difféomorphismes d'une variété et de son arrondie.

On conserve les notations ci-dessus ; on note en plus $g_1(V) = V''$ (c'est une sous-variété de l'intérieur de V' , difféomorphe à V). On note $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$, resp. $\mathcal{G}''$) le groupe des difféomorphismes de V (resp. V' , resp. V'') qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de ∂V (resp. $\partial V'$, resp. $\partial V''$).

On a d'une part des applications canoniques (définies par prolongement par l'application identique)

$$\alpha : \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \; ; \qquad \alpha' : \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}' \quad .$$

D'autre part, on définit un homéomorphisme $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$, en posant, pour tout $f \in \mathcal{G}$:

$$\beta(f) = g_1 \circ f \circ g_1^{-1} \quad .$$

L'application $\alpha \circ \alpha' \circ \beta$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{G}$, car si on pose, pour $\lambda \in [0 , 1]$:

$$\gamma_\lambda(f) \quad \begin{cases} g_\lambda \circ f \circ g_\lambda^{-1} & \text{sur } g_\lambda(V) \\ \text{identité} & \text{sur } V - g_\lambda(V) \end{cases}$$

on a : $\gamma_0(f) = f$, et $\gamma_1(f) = \alpha \circ \alpha' \circ \beta(f)$.

L'application $\alpha' \circ \beta \circ \alpha$ de $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}'$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{G}'$, car d'après la condition (e), pour tout $f' \in \mathcal{G}'$ et tout $\lambda \in [0 , 1]$, $\gamma_\lambda(\alpha(f'))$ induit l'identité sur $V - V'$; or $\gamma_0(\alpha(f'))|V' = f$, et $\gamma_1(\alpha(f'))|V' = \alpha' \circ \beta \circ \alpha(f')$.

On peut donc énoncer :

PROPOSITION 2. - Soient V une variété compacte, X une arête de V, V' une variété définie à partir de V en arrondissant X. Soit $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$) le groupe des difféomorphismes de V (resp. V') qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de ∂V (resp. $\partial V'$). Les groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ont même type d'homotopie.

Plongements d'une sous-variété et de son arrondie.

On suppose maintenant que V est une sous-variété fermée d'une variété compacte W ; au lieu du bord ∂V de V, on considère cette fois son bord relatif ∂V_W (cf. [2], exposé 1, p. 5) ; on prend pour T un voisinage prismatique de ∂V_W dans V, et on définit comme ci-dessus, pour tout $\lambda \in [0 , 1]$, un plongement g_λ de V dans W, vérifiant les conditions (a), (b), (c) et (d) ci-dessus, et ayant mêmes relations d'incidence que l'injection de V dans W ; d'après le théorème 1 (appliqué dans le cas où W a un bord, cf. ci-dessus, n° 2, 3°), chaque g_λ se prolonge en un difféomorphisme de W, vérifiant encore les conditions (a), (b), (c), (d).

Soit alors X une arête de l'intérieur de ∂V_W ; la donnée de T et de la partie A de $[0 , 1] \times [0 , 1]$ définie ci-dessus, définit une sous-variété V' de V.

Définition. - On dit que la sous-variété V' de W définie par le procédé ci-dessus est obtenue à partir de V en arrondissant X (à l'aide de ρ, T et A).

(On notera que V' est contenue dans l'intérieur relatif de V ; si $\tilde{V}'$ est la sous-variété de W obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}$ et $\tilde{A}$, $\tilde{V}'$ se déduit de V' par une isotopie de V.)

Comme ci-dessus, V' vérifie, relativement à g_λ, la condition (e) ; on note encore : $g_1(V) = V''$. Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$, resp. $\mathcal{E}''$) l'espace des plongements de V (resp. V', resp. V'') dans W qui ont mêmes relations d'incidence que l'injection, et qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $V \cap \partial W$ (resp. $V' \cap \partial W$, resp. $V'' \cap \partial W$). On a d'une part des applications canoniques (définies par la restriction)

$$\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \; ; \qquad \alpha' : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'' \; ;$$

et d'autre part on définit une application continue $\beta : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}$, en posant, pour tout $f'' \in \mathcal{E}''$:

$$\beta(f'') = g_1^{-1} \circ f'' \circ g_1|V \quad .$$

L'application $\beta \circ \alpha' \circ \alpha$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{E}$; car d'après (d), $g_\lambda^{-1} \circ f \circ g_\lambda|V$ a un sens pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$; c'est un élément de $\mathcal{E}$ qu'on note f_λ ; il vérifie : $f_0 = f$, $f_1 = \beta \circ \alpha' \circ \alpha(f)$.

L'application $\alpha \circ \beta \circ \alpha'$ de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{E}'$; car d'après (e), $g_\lambda^{-1} \circ f' \circ g_\lambda|V'$ a un sens pour tout $f' \in \mathcal{E}'$ et tout $\lambda \in [0, 1]$; c'est un élément de $\mathcal{E}'$ qu'on note f'_λ ; il vérifie :

$$f'_0 = f' \; , \qquad f'_1 = \alpha \circ \beta \circ \alpha'(f') \quad .$$

On peut donc énoncer :

PROPOSITION 2'. - *Soient W une variété compacte (à bord anguleux) et V une sous-variété fermée de W. Soit X une arête de V située dans l'intérieur du bord relatif ∂V_W de V. Soit V' une sous-variété de W obtenue à partir de V en arrondissant X. Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) l'espace des plongements de V (resp. V') dans W qui ont mêmes relations d'incidence que l'injection et qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $V \cap \partial W$ (resp. $V' \cap \partial W$). L'application canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ (définie par la restriction) est une homotopie-équivalence.*

4. Application aux groupes d'homotopie de quelques espaces de plongements. Théorème de Smale sur le groupe des difféomorphismes de la sphère S^2 .

PROPOSITION 3. - Soit V une variété compacte de classe C^∞ , sans bord, de dimension n . Soit p un entier $\leqslant n$. Les groupes d'homotopie de l'espace des plongements de classe C^∞ de D^p dans V sont canoniquement isomorphes à ceux de l'espace des p-repères de l'espace tangent à V .

Démonstration. - L'application qui à tout plongement de D^p dans V associe son 1-jet à l'origine est une fibration localement triviale d'après le théorème 2'. La base de cette fibration s'identifie à l'espace des p-repères de l'espace tangent à V ; sa fibre est acyclique en toute dimension d'après [1], proposition 8, page 336.

PROPOSITION 4. - Soit $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long de S^{n-1} ; pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}\ S^n) \approx \pi_i(\mathcal{H}) \oplus \pi_i(SO(n+1)) \quad .$$

Démonstration. - Soit S^n_+ l'hémisphère nord de S^n ; considérons l'application canonique :

(1) $$\mathrm{Diff}\ S^n \to \mathrm{Pl}(S^n_+ , S^n) \quad .$$

C'est une fibration localement triviale d'après le théorème 1 ; les groupes d'homotopie de la fibre sont canoniquement isomorphes à ceux de $\mathcal{H}$ d'après [1], II, 5.1.2, page 334 ; ceux de la base sont canoniquement isomorphes à ceux de $SO(n+1)$ d'après la proposition 3. D'où la suite exacte canonique :

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathcal{H}) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^n) \xrightarrow{\varpi_i} \pi_i(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$

Cette suite exacte se décompose, car l'application canonique $\pi_i(SO(n+1)) \to \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^n)$, définie par l'inclusion, est une section pour l'application ϖ_i .

PROPOSITION 5. - Soit $\mathcal{H}$ comme ci-dessus (proposition 4). Soit $\mathcal{A}$ l'espace des plongements de l'équateur D^{n-1} de D^n dans D^n , qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long du bord S^{n-2} de D^{n-1} . Pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\pi_i(\mathcal{H}) \approx \pi_{i+1}(\mathcal{A}) \quad .$$

Démonstration. - Soit D^n_+ la demi-boule formée nord de D^n. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des plongements de D^n_+ dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $D^n_+ \cap S^{n-1}$; soit T un voisinage tubulaire de $D^n_+ \cap S^{n-1}$ dans D^n_+ ; d'après la proposition 2', les groupes d'homotopie de $\mathcal{E}$ sont canoniquement isomorphes à ceux de l'espace des plongements de T dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $T \cap S^{n-1}$; et ces derniers groupes sont nuls d'après [1], corollaire 4, page 333 ; donc $\pi_i(\mathcal{E}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. D'après le théorème 1.a, l'application canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$ est une fibration localement triviale ; soit $\mathcal{K}$ la fibre de $\mathcal{E}$ située au-dessus de l'injection $D^{n-1} \to D^n$; $\mathcal{K}$ s'identifie au groupe des difféomorphismes de D^n_+ qui induisent l'identité sur D^{n-1} et qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de $D^n_+ \cap S^{n-1}$; d'après la proposition 1 et la proposition 2', $\pi_i(\mathcal{K})$ est canoniquement isomorphe à $\pi_i(\mathcal{K})$ pour tout $i \geqslant 0$. La proposition résulte donc de la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$.

PROPOSITION 6. - Soit B un voisinage tubulaire (difféomorphe à $D^{n-2} \times [-1,+1]$) de l'équateur D^{n-2} de D^{n-1} dans D^{n-1} ; soit $\mathcal{B}$ l'espace des plongements de B dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $B \cap S^{n-1}$. Soit $\mathcal{K}$ comme ci-dessus (proposition 4). Pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathcal{K})$ sur un facteur direct de $\pi_{i+2}(\mathcal{B})$.

Démonstration. - On note M_1 et M_2 les adhérences des deux composantes connexes de $D^{n-1} - B$. Soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'espace des plongements de $M_1 \cup B$ (resp. B) dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $(M_1 \cup B) \cap S^{n-1}$ (resp. $B \cap S^{n-1}$). D'après les propositions 1 et 2', $\pi_i(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. D'après le théorème 1.b, l'application canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{B}$ est une fibration localement triviale ; soit $\mathcal{A}'$ la fibre située au-dessus de l'injection $B \to D^n$; la suite exacte d'homotopie donne un isomorphisme canonique

$$\pi_i(\mathcal{A}') \approx \pi_{i+1}(\mathcal{B}) \quad \text{pour tout } i \geqslant 0 \qquad (2)$$

$\mathcal{A}'$ s'identifie à l'espace des plongements de M_1 dans $D^n - \overset{\circ}{B}$ qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de ∂M_1. On va comparer $\mathcal{A}'$ et l'espace $\mathcal{A}$ défini ci-dessus (proposition 5), et pour cela les comparer tous deux au sous-espace $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}'$, formé des plongements dont l'image ne rencontre pas M_2.

Comparaison de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''$. - D'après le théorème 1.b, l'application canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$ est une fibration localement triviale ; on a vu d'une part que $\pi_i(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; et d'autre part la fibre de cette fibration s'identifie

canoniquement à $\mathfrak{A}''$. On a donc un isomorphisme canonique

(3) $\qquad \pi_i(\mathfrak{A}) \approx \pi_i(\mathfrak{A}'') \quad$ pour tout $i \geqslant 0$.

Comparaison de $\tilde{\mathfrak{A}}'$ et $\tilde{\mathfrak{A}}''$. - Soit C un voisinage tubulaire de D^{n-2} dans D^n (difféomorphe à $D^{n-2} \times D^2$), tel que $C \cap D^{n-1} = B$. On note $\tilde{\mathfrak{A}}'$ le sous-espace de $\mathfrak{A}'$ formé des plongements dont l'image ne rencontre pas $\overset{\circ}{C}$; on note $\tilde{\mathfrak{A}}' \cap \mathfrak{A}'' = \tilde{\mathfrak{A}}''$. Soit $\psi_\lambda(C)$ l'image de C par l'affinité orthogonale à D^{n-1} , de rapport λ ; pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{A}'$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f(M_1)$ ne rencontre pas l'intérieur de $\psi_\lambda(C)$; il en résulte que pour tout $i \geqslant 0$, $\pi_i(\tilde{\mathfrak{A}}')$ est canoniquement isomorphe à $\pi_i(\mathfrak{A}')$ et $\pi_i(\tilde{\mathfrak{A}}'')$ à $\pi_i(\mathfrak{A}'')$.

Or il existe un difféomorphisme canonique de $D^n - \overset{\circ}{C}$ sur $M_1 \times S^1$: il identifie M_1 à $M_1 \times \{1\}$ et M_2 à $M_1 \times \{-1\}$, où 1 et -1 sont deux points diamétralement opposés de S^1 (plongée de façon naturelle dans $\underset{\sim}{R}^2$). On considère d'autre part le cylindre $M_1 \times \underset{\sim}{R}$; on identifie M_1 à $M_1 \times \{0\}$, et on considère l'espace $\tilde{\mathfrak{A}}'''$ des plongements de M_1 dans $M_1 \times \underset{\sim}{R}$ qui sont tangents à l'injection le long de ∂M_1 . Puisque M_1 est difféomorphe à la demi-boule fermée D^{n-1}_+ , M_1 est simplement connexe ; l'application $(x, \theta) \to (x, e^{2i\pi\theta})$ définit donc $M_1 \times \underset{\sim}{R}$ comme le revêtement universel de $M_1 \times S^1$, et tout élément de $\tilde{\mathfrak{A}}''$ se relève canoniquement en un élément de $\tilde{\mathfrak{A}}'''$; ceci définit une application $\rho : \tilde{\mathfrak{A}}' \to \tilde{\mathfrak{A}}'''$. D'autre part le choix d'un difféomorphisme φ , d'orientation positive, de $\underset{\sim}{R}$ sur $S^1 - \{-1\}$ définit un homéomorphisme $\sigma : \tilde{\mathfrak{A}}''' \to \tilde{\mathfrak{A}}''$. Soit j l'injection $\tilde{\mathfrak{A}}'' \to \tilde{\mathfrak{A}}'$; l'application $\sigma \circ \rho \circ j$ de $\tilde{\mathfrak{A}}''$ dans lui-même est homotope à l'application identique de $\tilde{\mathfrak{A}}''$ (car à tout élément $f : x \to (X(x) , e^{2i\pi\theta(x)})$ de $\tilde{\mathfrak{A}}''$, elle associe le plongement : $x \to (X(x), \varphi \circ \theta(x))$, qui lui est canoniquement isotope parce que le groupe des difféomorphismes de $\underset{\sim}{R}$ conservant l'orientation est convexe) ; donc $\sigma \circ \rho \circ j$ induit un isomorphisme de $\pi_i(\tilde{\mathfrak{A}}'')$ sur lui-même ; donc, compte tenu de l'identification de $\pi_i(\tilde{\mathfrak{A}}')$ à $\pi_i(\mathfrak{A}')$ et de $\pi_i(\tilde{\mathfrak{A}}'')$ à $\pi_i(\mathfrak{A}'')$:

(4) pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathfrak{A}'')$ sur un facteur direct de $\pi_i(\mathfrak{A}')$.

De (2), (3) et (4), il résulte que, pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathfrak{A})$ sur un facteur direct de $\pi_{i+1}(\mathfrak{B})$; d'où le résultat, compte tenu de la proposition 5.

Cas $n = 2$: le théorème de Smale. - Si $n \geqslant 2$, B est un segment intérieur au disque D^2 , et $\mathfrak{B}$ est l'espace des plongements de ce segment dans l'intérieur de D^2 . D'après la proposition 3 on a donc :

$$\begin{cases} \pi_1(\mathcal{B}) \approx \underset{\sim}{Z} & ; \\ \pi_i(\mathcal{B}) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq 1 & . \end{cases}$$

Donc d'après la proposition 6, $\pi_i(\mathcal{H}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; autrement dit :

THÉORÈME 4.- Soit $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de D^2 qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long de S^1 ; on a $\pi_i(\mathcal{H}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 1. - $\pi_i(\mathrm{Diff}(D^2 ; S^1)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 2. - L'application canonique : $\pi_i(SO(3)) \to \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^2)$ est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 3. - Le groupe Γ_3 est nul.

(Le corollaire 1 résulte immédiatement du théorème et du cas particulier de la proposition 1 ; le corollaire 2 résulte immédiatement du théorème et de la proposition 6 ; quant au corollaire 3, c'est une conséquence immédiate du corollaire 2 et de la définition des groupes Γ_n ; cf. l'exposé suivant.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-382.

[2] Séminaire H. CARTAN : Topologie différentielle, t. 14, 1961/62, exposés n° 1, 2, 3 (par A. DOUADY), 4, 5, 6, 7 (par C. MORLET).

[3] Séminaire H. CARTAN : Topologie algébrique, t. 1, 1948/49, 2e édition. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.