

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n° 1, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A1_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS À BORD ANGULEUX ET VOISINAGES TUBULAIRES

par Adrien DOUADY

I. Variétés à bord anguleux.

1. Secteurs d'espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\underline{\mathbb{R}}$. Un secteur d'indice k ou k -secteur de E est un sous-espace A défini par les conditions $f_1(x) \geq 0, \dots, f_k(x) \geq 0$, où f_1, \dots, f_k sont des formes linéaires sur E , linéairement indépendantes. E lui-même est un 0 -secteur de E .

Une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E sera dite adaptée au secteur A si les f_i sont choisis parmi les formes coordonnées relatives à cette base. Un secteur A de $\underline{\mathbb{R}}^n$ sera dit adapté si la base canonique de $\underline{\mathbb{R}}^n$ est adaptée à A .

Soit $j \leq k$. Les conditions $f_{i_1}(x) = \dots = f_{i_j}(x) = 0$, où i_1, \dots, i_j sont j indices distincts pris dans $\{1, \dots, k\}$, définissent un sous-ensemble F du secteur A , qui est un secteur de dimension $n - j$ et d'indice $k - j$. On dit que F est une face de codimension j , ou une j -face, de A . Le nombre des j -faces de A est $\binom{k}{j} = C_k^j$.

Par définition, l'indice de A en un point x est la plus grande codimension des faces de A contenant x . Alors l'indice de A n'est autre que l'indice de A au point 0 .

2. Application C^∞ .

Une fonction φ , définie dans un ouvert U d'un secteur A d'un espace vectoriel E , à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\underline{\mathbb{R}}$, est dite différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire

$$\varphi'_x : E \rightarrow F, \quad ,$$

telle que

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi'_x(y - x) + \eta_x(y) \quad ,$$

où η_x est une fonction définie sur U , à valeurs dans F , telle que

$$\frac{\|\eta_x(y)\|}{\|y - x\|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } y \rightarrow x, \quad y \in U, \quad y \neq x \quad .$$

Cette condition est indépendante des normes choisies. L'application φ'_x est alors unique, d'où la notion d'application continûment différentiable sur U , d'application r -fois continûment différentiable ou C^r , d'application C^∞ ou C^r pour tout r .

3. Catégorie de modèles.

On définit une catégorie \mathcal{M}_n de la façon suivante :

Les objets de \mathcal{M}_n sont les ouverts U des secteurs adaptés A de \mathbb{R}^n , d'indice variable.

Les morphismes d'un objet U dans un objet U' sont les difféomorphismes C^∞ de U sur un ouvert U'' de U' .

Si $\varphi : U \rightarrow U'$ est un morphisme de \mathcal{M}_n , pour tout point x de U , U' a même indice au point $\varphi(x)$ que U au point x .

4. Définition des variétés à bord anguleux.

Définition. - Une variété à bord anguleux est un espace topologique V , localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une classe de \mathcal{M}_n -atlas.

Rappelons qu'un \mathcal{M}_n -atlas est une famille $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où les V_i forment un recouvrement ouvert de V , et où, pour chaque i , φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert U_i d'un secteur adapté A de \mathbb{R}^n sur V_i ; ces données étant astreintes à la condition suivante : pour tout couple i, j ,

$$\gamma_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)}$$

est une application C^∞ d'un ouvert de U_i dans U_j .

Deux \mathcal{M}_n -atlas sont équivalents si leur réunion est encore un \mathcal{M}_n -atlas.

Soient V une variété à bord anguleux, et x un point de V .

L'indice de V_i au point $\varphi_i^{-1}(x)$, est le même pour toutes les cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ où $V_i \ni x$, et est appelé indice de V au point x .

On peut toujours trouver dans un atlas complet de V une carte

$$\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$$

telle que

$$\varphi_i(0) = x \quad .$$

U est alors un voisinage de 0 dans un k -secteur adapté A de $\underline{\mathbb{R}}^n$, où k est l'indice de V en x .

5. Espace et secteur tangent.

Soient V une variété à bord anguleux de dimension n , et x un point de V . L'espace tangent $T_x(V)$ en x à V est le dual de \mathfrak{J}_x^2 , où \mathfrak{J}_x est l'idéal de l'anneau local \mathcal{O}_x formé des germes de fonctions C^∞ sur V qui s'annulent en x . C'est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} .

Soit $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ une carte telle que $\varphi_i(0) = x$. Cette carte définit un isomorphisme $\varphi_i^! : \mathbb{R}^n$ sur $T_x(V)$.

L'image par cet isomorphisme du secteur A , dans lequel U est ouvert, est un secteur $A_x(V)$ de $T_x(V)$, qui ne dépend pas de la carte choisie, et qu'on appellera secteur tangent à V en x , ou secteur des vecteurs rentrants.

C'est l'ensemble des vecteurs $X \in T_x(V)$, tels que $\langle X, df \rangle \geq 0$ pour toute fonction f , de classe C^∞ , définie sur un voisinage de x dans V , ≥ 0 , et telle que $f(x) = 0$.

6. Diverses notions de bord.

Soit V une variété à bord anguleux, de dimension n .

L'ensemble $b^k V$ des points de V , où V est d'indice $\geq k$, est un fermé de V . $bV = b^1 V$ n'est autre que le "bord topologique" de V .

Le sous-espace $\partial^k V$ formé des points de V , où V est d'indice k , est une variété sans bord de dimension $n - k$.

On va maintenant définir une variété à bord anguleux $\partial^k V$ de dimension $n - k$, telle que $\partial^k V - b(\partial^k V)$ s'identifie à $\partial^k V$. Les points de $\partial^k V$ sont les couples (x, F) où x est un point de $b^k V$, et F une k -face du secteur tangent $A_x(V)$. Cet ensemble $\partial^k V$ est muni de la topologie et de la structure de variété définie par les cartes suivantes : pour toute carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ de V , où U_i est un ouvert d'un secteur A_i de \mathbb{R}^n , et pour toute k -face $F_{i,j}$ de A_i , on considère l'application $\varphi_{i,j} : U_i \cap F_{i,j} \rightarrow \partial^k V$ définie par

$$\varphi_{i,j}(x) = (\varphi_i(x), \varphi_i^!(x)(F_{i,j})) \quad .$$

Les $\varphi_{i,j}$ forment un \mathfrak{M}_{n-k} -atlas de $\partial^k V$.

Tout point x , où V est d'indice ℓ , est représenté par $\binom{\ell}{k}$ points de $\partial^k V$,

qui sont d'indice $l - k$ dans $\partial^k V$. Enfin $\partial^j(\partial^k V)$ est un revêtement à $\binom{j+k}{k}$ feuillets de $\partial^{j+k} V$.

7. Sous-secteurs.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un secteur adapté, défini par les inégalités $x_{i_1} \geq 0, \dots, x_{i_k} \geq 0$. Un sous-secteur adapté A' de A est l'ensemble défini par les conditions obtenues en remplaçant l des k inégalités qui définissent A par des égalités $x_{i_1} = 0$, et en ajoutant $p - l$ égalités de la forme $x_{i_1} = 0$, et j inégalités de la forme $x_{i_1} \geq 0$, portant sur de nouvelles coordonnées distinctes. A' est donc un secteur de dimension $n - p$ et d'indice $k - l + j$; p est la codimension de A' dans A , l est le co-indice de A' dans A , (c'est la plus grande codimension des faces de A contenant A') et j est l'indice complémentaire.

Les faces relatives de A' dans A sont obtenues en remplaçant dans la définition de A' certaines des j inégalités complémentaires par les égalités correspondantes.

Par abus de langage, A' sera dit sans faces relatives dans A , si $j = 0$.

Un sous-secteur adapté, sans faces relatives de A , est donc la trace de A sur un sous-espace vectoriel adapté de \mathbb{R}^n , i. e. un sous-espace vectoriel engendré par certains éléments de base.

Un sous-secteur A' d'un secteur A d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble de A qui devient un sous-secteur adapté pour une certaine base de E adaptée à A . Une telle base est dite adaptée à A et A' .

8. Sous-variétés.

Parmi les diverses notions de sous-variété qu'on pourrait donner ici, nous choisissons la plus exigeante :

Définition. - Nous appellerons sous-variété de codimension p et de co-indice l d'une variété à bord anguleux V un sous-espace fermé W de V tel que, pour tout point x de W , il existe une carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ de V , où U_i est un ouvert d'un secteur adapté A_i de \mathbb{R}^n telle que

$$\varphi_i(0) = x,$$

et que

$$\varphi_i^{-1}(V_i \cap W) = U_i \cap \Lambda_i^!$$

où $\Lambda_i^!$ est un sous-secteur adapté de Λ_i , de codimension p et de co-indice ℓ .

Une telle carte sera dite adaptée à W .

W sera dite sans bord relatif dans V si $\Lambda_i^!$ est toujours un sous-secteur sans faces relatives de Λ_i .

Remarque. - Le fait d'imposer la valeur de la codimension et du co-indice n'est pas essentiel : si on les laissait variables, ils resteraient constants dans chaque composante connexe de W .

9. Secteur transverse.

Soient V une variété à bord anguleux de dimension n , W une sous-variété de codimension p et de co-indice ℓ . En un point x de W , on a l'espace $T_x(V)$ tangent à V de dimension n , l'espace $T_x(W)$ tangent à W de dimension $n - p$, et l'espace transverse à W dans V , $T_x(V : W) = T_x(V) / T_x(W)$, de dimension p .

Le secteur transverse $A_x(V : W)$ à W dans V est, par définition, l'image du secteur tangent $A_x(V)$ à V dans $T_x(V : W)$. C'est un secteur de dimension p et d'indice ℓ . Les $A_x(V : W)$ sont les fibres d'un fibré $A(V : W)$ de base W , de groupe structural G , groupe des automorphismes du secteur A_0 de \mathbb{R}^n défini par $x_1 \geq 0, \dots, x_\ell \geq 0$.

G est le groupe des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Y & Z \end{array} \right)$$

où X est une matrice $\ell \times \ell$, qui a dans chaque ligne et dans chaque colonne un coefficient > 0 et tous les autres nuls ; Z est une matrice régulière $(p - \ell) \times (p - \ell)$, et Y est quelconque.

D'autre part, les fonctions de transition sont de classe C^∞ , à valeurs dans le groupe de Lie G .

II. Voisinages tubulaires.

1. Tubes.

Soit A_0 le ℓ -secteur de $\underline{\mathbb{R}}^p$ défini par $x_1 \geq 0, \dots, x_\ell \geq 0$, muni de la métrique euclidienne canonique de $\underline{\mathbb{R}}^p$.

Le groupe des isométries de A_0 s'identifie au produit $\mathcal{G}(\ell) \times O(p - \ell)$, et il opère sur la trace B_0 de A_0 sur la boule unité de $\underline{\mathbb{R}}^p$.

Définition. - Un (p, ℓ) -tube T , ayant pour âme une variété à bord anguleux W , est un fibré sur W , de fibre-type B_0 , de groupe structural $\mathcal{G}(\ell) \times O(p - \ell)$, à fonctions de transitions C^∞ . W sera toujours identifié à son image dans T par la section nulle ("âme" du tube).

T est une variété à bord anguleux, et W est une sous-variété sans bord relatif de T dont la codimension est p et le co-indice ℓ . Le fibré transverse $A(T : W)$ s'identifie au fibré de base W associé à T , de fibre A_0 .

2. Définition des voisinages tubulaires.

Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété sans bord relatif. Un voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de W dans V est donné par ;

a. Une famille $\mu = (\mu_x)_{x \in W}$, où, pour chaque $x \in W$, μ_x est une métrique euclidienne sur $T_x(V : W)$, dépendant de façon C^∞ du point x .

b. Un difféomorphisme ψ du fibré en boules de secteurs transverses $B = B(V : W ; \mu)$ (où, pour chaque x , B_x est la trace de $A_x(V : W)$ sur la boule-unité de μ_x) sur une sous-variété N de W , tel que

α. la restriction de ψ à la section nulle de B identifiée à W , soit l'injection canonique de W dans V ;

β. l'application

$$\psi : A(B : W) \rightarrow A(N : W)$$

induite par φ sur les fibrés en secteurs transverses de base W , soit l'identité de $A(V : W)$.

Ces conditions entraînent que N est un voisinage de W dans V , d'où la terminologie.

Nous nous proposons maintenant de démontrer l'existence d'un voisinage tubulaire

pour toute sous-variété W sans bord relatif d'une variété à bord anguleux V .

3. Connexions adaptées.

Soient V une variété à bord anguleux, E un fibré vectoriel C^∞ sur V . On notera $\Gamma(E)$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de E ; c'est un $\mathcal{O}(V)$ -module, $\mathcal{O}(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ sur V à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}$. On posera

$$\Theta(V) = \Gamma(T(V)) \quad ;$$

c'est l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur V .

Une connexion de E sur V est une application $\underline{\mathbb{R}}$ -bilinéaire

$$\Delta : \Theta(V) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad ,$$

notée

$$(X, Y) \rightsquigarrow \Delta_X(Y) \quad ,$$

satisfaisant aux relations :

$$\text{(Con 1)} \quad \Delta_{fX}(Y) = f\Delta_X(Y) \quad ,$$

$$\text{(Con 2)} \quad \Delta_X(fY) = f\Delta_X(Y) + \langle X, df \rangle \cdot Y \quad ,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(V)$.

Soient (V_i) un recouvrement ouvert de V , (η_i) une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée à (V_i) , et donnons-nous, pour chaque i , une connexion Δ_i de la restriction de E à V_i . On définit alors une connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$ de E sur V par

$$\Delta_X(Y) = \sum \eta_i \Delta_{iX}(Y) \quad .$$

Si $\varphi : W \rightarrow V$ est une application C^∞ , on définit pour toute connexion Δ de E sur V une connexion $\varphi^* \Delta$ du fibré image réciproque $\varphi^* E$ sur W . [3]. Quand on parlera de connexion sur V sans préciser le fibré, il s'agira d'une connexion du fibré tangent $T(V)$.

Définition. - Soient W une sous-variété de V et Δ une connexion sur V . On dira que W est géodésique pour Δ si la connexion

$$i_o^* \Delta : \Theta(W) \times \Gamma_W(i_o^* T(V)) \rightarrow \Gamma_W(i_o^* T(V)) \quad ,$$

où $i : W \rightarrow V$ désigne l'injection canonique, applique

$$\Theta(W) \times \Theta(W) \text{ dans } \Theta(W) \quad . \quad (1)$$

$i^* \Delta$ induit alors une connexion sur W , qu'on notera $\Delta|_W$. La propriété pour W d'être géodésique pour Δ est locale au sens suivant :

Si (V_i) est un recouvrement ouvert de V , et si, pour chaque i , $W \cap V_i$ est géodésique pour la connexion induite par Δ sur V_i , W est géodésique pour Δ .

Soient (V_i) un recouvrement ouvert de V , et W une sous-variété de V telle que, pour chaque i , $W \cap V_i$ soit géodésique pour une connexion Δ_i sur V_i . Alors, pour toute partition de l'unité (η_i) sur V subordonnée à (V_i) , W est géodésique pour la connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$.

Définition. - Soit V une variété à bord anguleux.

Une connexion Δ sur V sera dite adaptée à V si toute sous-variété de V de co-indice égal à sa codimension est géodésique.

Pour cela, il faut et il suffit que, pour chaque carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ d'un atlas de V , où U_i est un ouvert d'un secteur A_i de \mathbb{R}^n , les traces sur U_i des faces de A_i , soient géodésiques pour la connexion $\Delta_i = \varphi_i^* \Delta$ sur U_i .

Définition. - Si W est une sous-variété de V , une connexion Δ sur V sera dite adaptée à V et W si Δ est adaptée à V , si W est géodésique pour Δ et si la connexion induite $\Delta|_W$ est adaptée à W .

LEMME. - Pour toute variété à bord anguleux V et toute sous-variété W , il existe une connexion Δ sur V adaptée à V et W .

Démonstration. - Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n , A un secteur de \mathbb{R}^n et A' un sous-secteur, une connexion Δ sur $U \cap A$ sera adaptée à $U \cap A$ et $U \cap A'$, si et seulement si, pour toute face F de A ou de A' , $U \cap F$ est géodésique pour Δ . En particulier, la connexion canonique de \mathbb{R}^n est adaptée. Soit maintenant (U_i, V_i, φ_i) un atlas de V tel que toute carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ où $V_i \cap W \neq \emptyset$ soit adaptée à W , et soit, pour tout i , Δ_i la connexion sur V_i transportée par φ_i de la connexion canonique sur U_i . Soit η_i une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée à (V_i) . La connexion $\Delta = \sum \eta_i \Delta_i$ répond à la question, ce qui démontre le lemme.

(1) Ceci entraîne que toute courbe géodésique tangente à W reste dans W . La réciproque n'est vraie que si on suppose Δ sans torsion.

Remarque. - Toute métrique riemannienne μ sur V définit une connexion $\Delta(\mu)$. Dans sa thèse, J. CERF a montré que, pour toute variété à bord anguleux V et toute sous-variété W , il existe une métrique riemannienne μ sur V telle que la connexion $\Delta(\mu)$ soit adaptée à V et W . En cessant d'exiger que la connexion Δ provienne d'une métrique riemannienne, idée due à Marie-Hélène SCHWARTZ, on simplifie considérablement la démonstration de ce lemme et celle du théorème d'existence des voisinages tubulaires.

4. Chemins géodésiques.

Soit $\varphi : I \rightarrow V$ un chemin C^∞ dans V , c'est-à-dire une application C^∞ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans V . Une connexion Δ sur V définit une connexion $\varphi^* \Delta$ du fibré $\varphi^* T(V)$ sur I . Le chemin $\varphi : I \rightarrow V$ sera dit géodésique pour Δ si $\varphi^* \Delta_X(Y) = 0$ quand X est le champ de vecteurs unitaire sur I et $Y = \varphi'(X)$.

D'après un théorème connu de géométrie différentielle, si V est une variété sans bord et Δ une connexion sur V , pour tout point $x \in V$ et tout vecteur $X \in T_x(V)$, il existe un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , $I \ni 0$, et un chemin géodésique $E \rightarrow \gamma(x, X, t)$ dans V , défini sur I unique tel que

$$\gamma(x, X, 0) = x \text{ et } \gamma'_{(x, X, 0)}(1) = X \quad .$$

Dans la mesure où il est défini, $\gamma(x, X, t)$ ne dépend que de x et du produit tX , nous écrirons donc $\gamma(x, tX)$, et l'application $(x, X) \rightarrow (x, \gamma(x, X))$ est un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle du fibré $T(V)$ sur un voisinage de la diagonale dans $V \times V$. L'application γ sera appelée application intégrale de la connexion Δ .

5. Théorème d'existence des voisinages tubulaires.

THÉORÈME 1. - Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété de V sans bord relatif. Alors il existe un voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de W dans V .

Démonstration. - Soient A un secteur d'un espace vectoriel E , E' un sous-espace de E tel que $A' = E' \cap A$ soit un sous-secteur de A . Un relèvement linéaire σ de E/E' dans E sera dit adapté à A s'il existe une base de E adaptée à A et A' , telle que σ soit le relèvement défini par cette base. Pour cela, il faut et il suffit que $\sigma(E/E')$ soit contenu dans tout hyperplan de E

engendré par une l -face de A ne contenant pas A' . Si les σ_i sont des relèvements adaptés et les η_i des nombres vérifiant $\sum \eta_i = 1$, le relèvement $\sigma = \sum \eta_i \sigma_i$ est adapté.

Ceci permet de construire un relèvement différentiable σ du fibré $T(V : W)$ dans le fibré sur W induit par $T(V)$, adapté en chaque point x de W au secteur $A_x(V)$. On a donc, en chaque point $x \in W$

$$\sigma(A_x(V : W)) \subset A_x(V) \quad .$$

Soient Δ une connexion sur V adaptée à V et W , (U_i, V_i, φ_i) des cartes de V adaptées à W , telles que les V_i recouvrent W .

Chaque U_i est la trace sur un secteur A_i de \mathbb{R}^n d'un ouvert Ω_i . Soit Δ_i une connexion sur Ω_i prolongeant la connexion transportée sur U_i par φ_i de la connexion Δ induite sur V_i , et telle que les hyperplans engendrés par les l -faces de A_i soient géodésiques, pour Δ_i .

Posons

$$U_i^! = \varphi_i^{-1}(W \cap V_i) = A_i^! \cap \Omega \quad .$$

Soit $\tilde{\sigma}_i$ le relèvement différentiable de fibrés sur $U_i^!$

$$\tilde{\sigma}_i : A(U_i : U_i^!) \rightarrow T(U_i^!) \quad ,$$

et posons

$$\psi_i = \gamma_i \circ \tilde{\sigma}_i \quad ,$$

où $\gamma_i : T(U_i^!) \rightarrow \Omega_i$ est l'application intégrale de la connexion Δ_i .

Si x est un point de $U_i^!$ qui se trouve dans une l -face F de A_i ne contenant pas $A_i^!$, pour tout vecteur $X \in A_x(U_i : U_i^!)$,

$$\tilde{\sigma}_i(x, X) = (x, Y) \quad ,$$

où $Y \in T_x(F)$ car $\tilde{\sigma}_i$ est un relèvement adapté au secteur $A_x(U_i)$ dont $A_x(F)$ est une l -face ne contenant pas $A_x(U_i^!)$. L'hyperplan engendré par F étant géodésique pour Δ_i , $\gamma_i(x, Y)$ restera dedans.

Si x est un point quelconque de $U_i^!$, et si $X \in F$, où F est une l -face de $A_x(U : U_i^!)$,

$$\tilde{\sigma}_i(x, X) = (x, Y) \quad ,$$

où $Y \in \chi^{-1}(F)$, $\chi^{-1}(F)$ est une 1-face de $A_x(U_i)$ contenant $A_x(U_i)$. C'est l'espace tangent à une 1-face F_1 de A_i contenant $A_i^!$. L'hyperplan engendré par F_1 étant géodésique pour Δ_i , $\gamma_i(x, Y)$ restera dedans.

L'application ψ_i vérifie donc les propriétés suivantes : C'est une application de $A(U_i : U_i^!)$ dans Ω_i qui induit l'identité sur $U_i^!$, identifié à la section nulle du fibré $A(U_i : U_i^!)$; elle induit également l'identité sur les fibrés vectoriels transverses à $U_i^!$, qui s'identifient tous deux à $T(U_i : U_i^!)$. Enfin elle envoie les 1-faces de $A(U_i : U_i^!)$ dans celles de A_i . Elle induit donc un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle dans $A(U_i : U_i^!)$ sur un voisinage de $U_i^!$ dans $A_i \cap \Omega_i = U_i$.

On en déduit en particulier que les chemins géodésiques qui ont servi à construire ψ_i sont géodésiques pour la connexion $\varphi_i^* \Delta$ et ne dépendent pas de la façon dont on a prolongé cette métrique en Δ_i . Il en résultera, par unicité des géodésiques d'une connexion, que les applications ψ_i se recollent en une application ψ qui est un difféomorphisme d'un voisinage C de la section nulle dans $A(V : W)$ sur un voisinage de W dans V .

Il ne reste plus, pour terminer la construction du voisinage tubulaire, qu'à munir les fibres de $T(V : W)$ d'une métrique euclidienne variant de façon C^∞ et telle que, pour chaque $x \in W$, la trace de la boule unité B_x sur $A_x(V : W)$ soit contenue dans $C \cap A_x(V : W)$. Ceci est facile, ce qui détermine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1961, p. 227-382 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).
- [2] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod ; Roma, Cremonese, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 2).
- [3] NOMIZU (Katsumi). - Lie groups and differential geometry. - Tokyo, Mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 2).