

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

MICHEL ZISMAN

La théorie de Marston Morse, II : topologie algébrique

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 15, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A5_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA THÉORIE DE MARSTON MORSE, II :
TOPOLOGIE ALGÈBRE
par Michel ZISMAN

A. Notations, énoncé des théorèmes

1. Préliminaires.

Comme dans l'exposé précédent, M désigne une variété paracompacte munie d'une structure riemannienne C^∞ complète. N désigne une sous-variété différentiable C^∞ de M , P désigne un point donné de M , $P \notin N$. Les renvois à l'exposé précédent seront notés I, suivi du numéro du paragraphe auquel on fait appel.

(1.1) L'espace $\Omega(M, N, P)$.

C'est l'espace de tous les chemins u différentiables par morceaux, paramétrés proportionnellement à la longueur de l'arc pour $t \in [0, 1]$, avec $u(0) = P$, $u(1) \in N$. On munit Ω de la topologie induite par la métrique

$$d(u, v) = \sup_{0 \leq t \leq 1} d(u(t), v(t)) + |L(u) - L(v)|$$

où $u, v \in \Omega(M, N, P)$, et où L désigne la longueur de l'arc compris entre les valeurs 0 et 1 du paramètre.

On démontrera en appendice que $\Omega(M, N, P)$ a même type d'homotopie (faible) que l'espace des chemins continus joignant P à N , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Par définition même de la topologie de Ω , L est une fonction continue sur Ω .

(1.2) L'espace $S(M, N, P)$.

C'est l'espace de toutes les géodésiques de $\Omega(M, N, P)$ normales à N . On a vu que si P est régulier (cf. I, (10.3)), les éléments de S sont isolés dans Ω , et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de S de longueur $\leq \ell$. (cf. I, (10.2)).

Dans tout cet exposé, on suppose que P est régulier. Rappelons (I, (10.3)) que N étant donné, l'ensemble des points P réguliers est dense dans M .

(1.3) Une notation.

Soient E un espace topologique, f une fonction à valeurs réelles définie sur E . On note :

$$E(a) = \{x \in E, f(x) \leq a\} \quad ,$$

$$E^-(a) = \{x \in E, f(x) < a\} \quad .$$

(1.4) Posons $\Omega(\ell) = \Omega(M, N, P)(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$ (la fonction f étant ici L). D'après (1.2), $S(M, N, P)$ est un ensemble dénombrable. Les points de cet ensemble étant isolés dans Ω , et L étant continue sur Ω , on peut ordonner l'ensemble des longueurs des éléments de S de façon à obtenir une suite strictement croissante $\ell_1 < \dots < \ell_n < \dots$. On notera :

$$\Omega_i \text{ l'ensemble } \Omega(\ell_i) \text{ ,}$$

$$\Omega_i^- \text{ l'ensemble } \Omega^-(\ell_i) \text{ ,}$$

ω_i l'ensemble des éléments de $S(M, N, P)$ de longueur ℓ_i . Les ℓ_i seront appelés les valeurs stationnaires de L sur Ω .

(1.5) Soit a une valeur non stationnaire prise par L sur $\Omega(M, N, P)$. Il existe alors un i tel que $\ell_i < a$ (en particulier $\ell_1 < a$). En effet, désignons par Ω' l'espace $\Omega(M, N, P)$ muni de la topologie induite par la métrique

$$d(u, v) = \sup_{t \in [0,1]} d(u(t), v(t)) \quad .$$

$\Omega'(a)$ est compact et L est semi-continue inférieurement sur $\Omega'(a)$. Il existe donc un $g \in \Omega(M, N, P)$ tel que $L(g)$ soit minimum, et on a $L(g) \leq a$. D'après la condition nécessaire de minimum (cf. I, 6), $g \in S(M, N, P)$; mais a étant non stationnaire, on a forcément $L(g) < a$

C. Q. F. D.

2. Les théorèmes sur $\Omega(M, N, P)$ (les démonstrations seront données au paragraphe G).

(2.1) THÉORÈME. - Si P est régulier, on a :

$$H_n(\Omega_i^- \cup \{g\}, \Omega_i^-; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \lambda(g) \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = \lambda(g) \end{cases} \quad \text{pour } g \in \omega_i, \lambda(g) = \text{indice de } g$$

(cf. I, paragraphe 3).

(2.2) THÉORÈME. - Si P est régulier, les inclusions

$$(\Omega_i, \Omega_{i-1}) \subset (\Omega_i, \Omega_i^-)$$

$$(\Omega_i^- \cup \omega_i, \Omega_i^-) \subset (\Omega_i, \Omega_i^-)$$

induisent des isomorphismes en homologie et en cohomologie.

Soient A et B deux séries formelles en t à coefficients réels. On écrit

$$A \geq B$$

s'il existe une série formelle C à coefficients ≥ 0 telle que :

$$A = B + (1 + t) C \quad .$$

Il revient au même de dire qu'il existe entre les coefficients a_i et b_i de A et B les inégalités suivantes :

$$a_0 \geq b_0$$

$$a_1 - a_0 \geq b_1 - b_0$$

$$a_2 - a_1 + a_0 \geq b_2 - b_1 + b_0 \quad .$$

Soient alors $g \in S(M, N, P)$ et $\lambda(g)$ l'indice de g . On considère l'expression :

$$\sum_{g \in S(M, N, P)} t^{\lambda(g)} \quad .$$

Si cette expression est une série formelle en t (i. e. s'il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques de $S(M, N, P)$ ayant même indice), on l'appelle la série de Morse de (M, N, P) , et on la désigne par $\mathfrak{M}(t)$.

(2.4) THÉORÈME. - Si P est régulier, et si le triple (M, N, P) admet une série de Morse $\mathfrak{M}(t)$, alors

$$\mathfrak{M}(t) \geq \Omega(t) \quad ,$$

où $\Omega(t)$ désigne la série de Poincaré de $\Omega(M, N, P)$ pour l'homologie à coefficients dans un corps de caractéristique quelconque.

COROLLAIRE. - Dans ces conditions, si $\mathfrak{M}(t)$ ne contient que des termes de degrés pairs, on a $\mathfrak{M}(t) = \Omega(t)$, et $\Omega(M, N, P)$ est sans torsion.

En effet, l'égalité $\mathfrak{M}(t) = \Omega(t)$ résulte immédiatement de l'hypothèse faite sur les degrés de \mathfrak{M} , et de (2.4). Cette égalité ayant lieu quelle que soit la caractéristique du corps des coefficients, on en déduit, d'après la formule des coefficients universels, que $\Omega(M, N, P)$ est sans torsion.

B. Quelques lemmes

Dans ce qui suit, le groupe (constant) de coefficients avec lequel on calcule l'homologie ne joue aucun rôle ; aussi le supprime-t-on des notations.

(3.1) LEMME. - Soient E un espace topologique, F et X deux sous-espaces disjoints, X étant fermé. Pour tout voisinage U de X , l'application naturelle $H((U \cap F) \cup X, U \cap F) \rightarrow H(F \cup X, F)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. - Posons $A = F \cup X$, $W = F - (U \cap F)$. L'adhérence de W dans A est contenue dans F , puisque U est ouvert ; F est ouvert dans A , puisque

X est fermé. D'après le théorème d'excision, $H(A - W, F - W) \rightarrow H(A, F)$ est un isomorphisme

C. Q. F. D.

(3.2) LEMME. - Soient E un espace topologique, F , X_1 et X_2 trois sous-espaces disjoints, X_1 et X_2 étant fermés. Soit $X = X_1 \cup X_2$. Alors les inclusions $(F \cup X_i, F) \rightarrow (F \cup X, F)$ induisent un isomorphisme

$$H(F \cup X, F) \approx H(F \cup X_1, F) \circ H(F \cup X_2, F) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - La composée des deux applications naturelles

$$H(F \cup X_1, F) \xrightarrow{\alpha} H(F \cup X, F) \rightarrow H(F \cup X, F \cup X_2)$$

est un isomorphisme, en vertu du lemme (3.1) (où F serait remplacé par $F \cup X_2$, X par X_1 , et U par $E - X_2$). Donc α est une injection sur un facteur direct. Même résultat en échangeant les rôles de X_1 et X_2 . Finalement, la suite exacte d'homologie

$$H(F \cup X_1, F) \rightarrow H(F \cup X, F) \rightarrow H(F \cup X, F \cup X_1)$$

achève la démonstration.

(3.3) LEMME. - Soit E un espace topologique dans lequel les points sont fermés; soit F un sous-espace de E , et soient x_i ($i \in I$) des points distincts de E , en nombre fini, dont aucun n'appartient à F . Alors les inclusions

$$(F \cup \{x_i\}, F) \rightarrow (F \cup \bigcup_i \{x_i\}, F)$$

induisent une décomposition directe $H(F \cup \bigcup_i \{x_i\}, F) \approx \bigoplus_{i \in I} H(F \cup \{x_i\}, F)$.

DÉMONSTRATION à partir du lemme (3.2), par récurrence sur le nombre des éléments de I .

4. Topologie d'une fonctionnelle de \mathbb{R}^n .

(4.1) LEMME. - Soient $E = \mathbb{R}^n$, et J une forme quadratique non dégénérée sur E , d'indice i . Notons $J^-(0)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $J(x) < 0$. Dans ces conditions :

$$H_n(J^-(0) \cup \{0\}, J^-(0)) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq i, \\ \text{anneau de coefficients} & \text{si } n = i. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. - On considère dans \mathbb{R}^n un système d'axes rectangulaires de coordonnées x_1, \dots, x_n tel que

$$J(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2, \quad ,$$

et on désigne par \mathbb{R}^i et \mathbb{R}^{n-i} les deux sous-espaces orthogonaux engendrés par

(x_1, \dots, x_i) et (x_{i+1}, \dots, x_n) . On pose :

$$f(t, x) = (x_1, \dots, x_i, (1-t)x_{i+1}, \dots, (1-t)x_n)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$. Alors f définit une rétraction par déformation de $(J^-(0) \cup \{0\}, J^-(0))$ sur $(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$, d'où le résultat.

(4.2) LEMME. - Soient $E = \mathbb{R}^n$, J une fonction à valeurs réelles définie sur E , de classe C^∞ , nulle et stationnaire en 0 (i. e. $\frac{\partial J}{\partial x^i}|_0 = 0$), ayant un hessien non nul à l'origine (i. e. $\text{Det} \frac{\partial^2 J}{\partial x^i \partial x^j}|_0 \neq 0$). Dans ces conditions :

$$H_n(J^-(0) \cup \{0\}, J^-(0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq i \\ \text{anneau de coefficients} & \text{si } n = i \end{cases}$$

i désignant l'indice de forme quadratique définie par le hessien.

DÉMONSTRATION. - D'après (3.1), appliqué au cas où $F = J^-(0)$ et $X = \{0\}$, il suffit de calculer $H_n(U \cap J^-(0) \cup \{0\}, U \cap J^-(0))$ pour un voisinage ouvert U de 0 assez petit. Alors le lemme (4.2) résulte de (4.1), en vertu du lemme suivant :

(4.3) LEMME. - Sous les hypothèses du lemme (4.2), il existe au voisinage de 0 un système de coordonnées locales y_1, \dots, y_n (nulles en 0) telles que :

$$J(x) = -y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - On sait que si une fonction numérique $g(t)$, deux fois continûment dérivable pour $0 \leq t \leq 1$, satisfait à $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, on a

$$g(1) = \int_0^1 (1-t) g''(t) dt \quad .$$

Appliquons ce résultat à $g(t) = J(tx_1, \dots, tx_n)$. Il vient

$$J(x) = \sum_{j,k} a_{jk}(x) x_j x_k \quad ,$$

avec

$$a_{jk}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 J}{\partial x_j \partial x_k}(tx_1, \dots, tx_n) dt \quad .$$

Les $a_{jk}(x) = \varepsilon_{kj}(x)$ sont différentiables, non toutes nulles à l'origine. Par une transformation linéaire sur les x_j , on se ramène au cas où $a_{11}(0) \neq 0$. Soit $\varepsilon_1 = \text{signe de } a_{11}(0)$. Au voisinage de 0 , les fonctions

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\varepsilon_1 a_{11}(x)} \left(x_1 + \frac{\sum_{j \geq 2} a_{1j}(x) x_j}{a_{11}(x)} \right) \\ x_2, \dots, x_n \end{cases}$$

forment un système de coordonnées locales, et

$$J(x) = \varepsilon_1 y_1^2 + \sum_{j,k \geq 2} a_{jk}(x) x_j x_k \quad .$$

En opérant par récurrence, on obtient un système de coordonnées locales tel que

$$J(x) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j y_j^2 \quad (\varepsilon_j = \pm 1) \quad ,$$

et comme l'indice est i , il s'ensuit que le nombre des ε_j égaux à -1 est i . Le lemme (4.3) est démontré.

C. Démonstration des théorèmes

(5.1) DÉFINITION. - Soient $B \subset A \subset \Omega(M, N, P)$; rappelons que L désigne la longueur d'une courbe $u \in \Omega(M, N, P)$. Une homotopie $I \times A \xrightarrow{h} A$ sera appelée une L -déformation de A dans B si $h(0, \cdot) : A \rightarrow A$ est l'identité, $h(1, \cdot) : A \rightarrow B$, et si de plus $L(h(t, a))$ est une fonction décroissante (au sens large) de t pour tout $a \in A$.

(5.2) DÉMONSTRATION du théorème (2.1). - Soit \mathcal{P} l'ensemble des géodésiques brisées qui interviennent dans le calcul de l'indice de la géodésique $g \in S(M, N, P)$ (cf. I, (7.5)). \mathcal{P} est défini par la donnée de $p+1$ points parcourant, les p premiers des boules fermées à $n-1$ dimensions, le dernier une boule fermée à $q = \dim N$ dimensions. Le produit de ces boules étant compact, on en déduit que \mathcal{P} est homéomorphe à une boule fermée d'un $\mathbb{R}^{(n-1)p+q}$. Sur \mathcal{P} , L est une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ , stationnaire en g (cf. I, 7) dont la forme quadratique associée au hessien n'est autre que la forme quadratique Q de (I, 7). P étant régulier par hypothèse, ce hessien est non nul. D'après (I, (7.5)) et le lemme (4.2), on a donc

$$H_n(\mathcal{P}^-(\ell_i) \cup \{g\}, \mathcal{P}^-(\ell_i); Z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \lambda(g) \\ Z & \text{si } n = \lambda(g) \end{cases} \quad \text{où } \ell_i = L(g) \quad .$$

Or on a le lemme suivant (qui sera démontré au paragraphe D) :

LEMME. - Soit $g \in \omega_i$. On peut choisir \mathcal{P} (permettant de calculer l'indice de g) de façon qu'il existe un voisinage ouvert U de g dans $\Omega(M, N, P)$ et une L -déformation de U dans $\mathcal{P} \cap U$ tels que les points de $\mathcal{P} \cap U$ restent fixes pendant la déformation.

Donc $H_n(U \cap \Omega_i^- \cup \{g\}, U \cap \Omega_i^-) \approx H_n(U \cap \Omega_i^- \cap \rho \cup \{g\}, U \cap \Omega_i^- \cap \rho)$. Mais, d'après le lemme (3.1), le premier membre est isomorphe à $H_n(\Omega_i^- \cup \{g\}, \Omega_i^-)$, et le second est isomorphe à $H_n(\rho^-(\ell_i) \cup \{g\}, \rho^-(\ell_i))$, d'où la conclusion du théorème (2.1).

(5.3) DÉMONSTRATION du théorème (2.2). - On utilise le lemme suivant (qui sera démontré au paragraphe D).

LEMME. - Soit a une valeur non stationnaire prise par L sur $\Omega(M, N, P)$. Soit ℓ_i la plus grande des valeurs stationnaires inférieures à a (ℓ_i existe d'après (1.5)). Il existe une L-déformation de $\Omega(a)$ dans $\Omega_i^- \cup \omega_i$.

Soit alors D la déformation donnée par le lemme ; D est aussi une L-déformation de Ω_i dans $\Omega_i^- \cup \omega_i$, puisque $\Omega_i \subset \Omega(a)$ et que D n'augmente pas les longueurs.

L'existence de D montre donc que :

$$H(\Omega(a), \Omega_i^- \cup \omega_i) = H(\Omega_i, \Omega_i^- \cup \omega_i) = 0 \quad .$$

La suite exacte associée au triple

$$\Omega_i^- \subset \Omega_i^- \cup \omega_i \subset \Omega_i$$

soit

$$0 = H_{r+1}(\Omega_i, \Omega_i^- \cup \omega_i) \rightarrow H_r(\Omega_i^- \cup \omega_i, \Omega_i^-) \rightarrow H_r(\Omega_i, \Omega_i^-) \rightarrow H_r(\Omega_i, \Omega_i^- \cup \omega_i) = 0$$

montre que l'inclusion $(\Omega_i^- \cup \omega_i, \Omega_i^-) \rightarrow (\Omega_i, \Omega_i^-)$ induit un isomorphisme en homologie.

Pour démontrer que l'inclusion $(\Omega_i, \Omega_{i-1}^-) \rightarrow (\Omega_i, \Omega_i^-)$ induit un isomorphisme en homologie, on considère le triple

$$\Omega_i^- \cup \omega_i \subset \Omega_i \subset \Omega(a)$$

dont la suite exacte associée est :

$$0 = H_r(\Omega(a), \Omega_i^- \cup \omega_i) \rightarrow H_r(\Omega(a), \Omega_i) \rightarrow H_{r-1}(\Omega_i, \Omega_i^- \cup \omega_i) = 0$$

et par conséquent :

$$H_r(\Omega(a), \Omega_i) = 0 \quad \text{pour tout } a \in [\ell_i, \ell_{i+1}[\quad .$$

Puisque Ω_{i+1}^- est la réunion des $\Omega(a)$ pour $a < \ell_{i+1}$, et que le foncteur homologie commute aux limites inductives, on en déduit que $H(\Omega_{i+1}^-, \Omega_i) = 0$ pour tout i ; en particulier, $H(\Omega_i^-, \Omega_{i-1}^-) = 0$. La suite exacte associée au triple

$$\Omega_{i-1} \subset \Omega_i^- \subset \Omega_i$$

donne alors le résultat.

(5.4) COROLLAIRE au théorème (2.2). - Les inclusions $(\Omega_i^- \cup \{g\}, \Omega_i^-) \rightarrow (\Omega_i, \Omega_i^-)$ où g parcourt l'ensemble ω_i , induisent une décomposition en somme directe

$$H(\Omega_i, \Omega_i^-) \approx \sum_{g \in \omega_i} H(\Omega_i^- \cup \{g\}, \Omega_i^-) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - On applique le théorème (2.2) et le lemme (3.3).

REMARQUE. - (5.4) et (2.1) déterminent donc complètement $H(\Omega_i, \Omega_i^-)$.

(5.5) DÉMONSTRATION du théorème (2.4). - On utilise les lemmes suivants, dont la démonstration ne présente aucune difficulté :

a. LEMME. - Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ un espace vectoriel différentiel gradué, les A_n étant de dimension finie. On pose $A(t) = \sum_{n \geq 0} (\dim A_n) t^n$ et

$$H(A)(t) = \sum_{n \geq 0} (\dim H_n(A)) t^n \quad .$$

Alors :

$$A(t) \geq H(A)(t) \quad .$$

b. LEMME. - Soit A un espace vectoriel différentiel gradué, filtré par des $F^p(A)$ tels que $F^p(A) \subset F^{p+1}(A)$ et que le terme E^1 de la suite spectrale associée à cette filtration soit de type fini ; alors

(i) $H(F^p A)$ est de type fini ;

(ii) si i^p désigne l'inclusion $F^p A \rightarrow A$, les groupes $\text{Im } i_*^p$ définissent une filtration croissante de $H(A)$ telle que

$$\cap \text{Im } i_*^p = 0 \quad ;$$

(iii) $\text{GH}(A) \approx E^\infty$.

On considère alors la suite d'inclusions (dans le cas où il y a un nombre infini de valeurs stationnaires)

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_i \subset \dots \subset \Omega = \Omega(M, N, P) \quad .$$

Si l'ensemble des valeurs stationnaires ℓ_i est fini ($i = 0, 1, \dots, s$), on prend la suite :

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_s \subset \Omega(a_{s+1}) \subset \dots \subset \Omega(a_{s+i}) \subset \dots \subset \Omega$$

où les a_{s+i} sont des nombres réels qui tendent vers l'infini en croissant avec i ; par abus de notation, écrivons Ω_{s+i} au lieu de $\Omega(a_{s+i})$.

Alors, les $C(\Omega_i)$ définissent une filtration croissante de $C(\Omega)$, et le terme E^1 de la suite spectrale associée à cette filtration est

$$E_i^1 = H(\Omega_i, \Omega_{i-1}) \quad .$$

D'après (5.4), (2.1) et (2.2), l'existence d'une série de Morse $\mathbb{K}(t)$ implique que E^1 est de type fini et que $\mathbb{K}(t) = E^1(t)$. Mais alors, d'après les lemmes a et b,

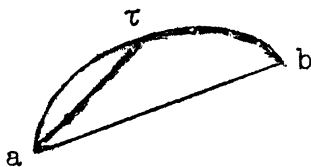
$$\mathbb{K}(t) = E^1(t) \geq E^2(t) \geq \dots \geq E^r(t) \geq E^\infty(t) = \text{GH}(\Omega)(t) = \mathbb{H}(\Omega)(t)$$

C. Q. F. D.

REMARQUE. - L'introduction d'une suite spectrale dans l'étude des inégalités de Morse est due à R. DEHEUVELS [1].

D. Démonstration des lemmes (5.2) et (5.3).

(6.1) On rappelle (cf. I, 7) qu'étant donné un compact $A \subset M$, il existe un nombre $d > 0$ tel que si a et b appartiennent à A avec $d(a, b) < d$, il existe un arc de géodésique et un seul joignant a à b ; alors la longueur de cet arc est égale à $d(a, b)$. Soit γ un arc de courbe tracé dans A , de longueur inférieure à d et τ un point de l'arc γ . On peut joindre a et τ par une unique géodésique $\overline{a\tau}$ dont la longueur est inférieure ou égale à celle de l'arc $\widehat{a\tau}$ de γ . Lorsque τ varie de a à b , on obtient une L -déformation de γ sur la géodésique \overline{ab} .



(6.2) DÉMONSTRATION du lemme (5.2). - Soit U_1 le voisinage de g dans $\Omega(M, N, P)$ formé par les courbes u telles que $L(u) < 2L(g)$. Pour $t \in [0, 1]$, $u(t)$ est un point de la boule fermée de centre P et de rayon $2L(g)$. M étant complète, cette boule est compacte. Soit d le nombre positif associé à ce compact (cf. (5.1)). On considère alors :

- des points $M_0 = P, M_1, \dots, M_p, M_{p+1} \in N$ sur g tels que $d(M_i, M_{i+1}) < d$;
- des boules fermées \mathcal{V}_i ($i = 1, \dots, p+1$) de centre M_i , de rayon ε assez petit pour que :

a. si $T_i \in \mathcal{V}_i$, alors $0 < d(T_i, T_{i+1}) < d$ pour $i = 0, \dots, p$;

b. si S_i désigne l'hypersurface passant par M_i ($i \leq p$; $S_{p+1} = N$) (qui sert à définir \mathcal{P} , cf. I, 7), alors la ligne polygonale de géodésiques $T_{i-1} T_i T_{i+1}$ coupe S_i en un point Q_i et un seul qui dépend continûment des points T_{i-1}, T_i, T_{i+1} .

On définit alors \mathcal{P} à l'aide des M_i , des S_i et des \mathcal{V}_i : on prend des $m_i \in S_i \cap \mathcal{V}_i$, et on considère la géodésique brisée $u = P m_1 m_2 \dots m_{p+1}$; c'est un élément de \mathcal{P} . Les fonctions $s_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, définies par $s_i(u) =$ longueur de l'arc de géodésique $m_{i-1} m_i$, sont continues et strictement positives et $\sum s_i(u) = L(u)$. $\Omega(M, N, P)$ étant un espace normal, et \mathcal{P} étant un compact de $\Omega(M, N, P)$, on peut prolonger les s_i en des fonctions continues sur $\Omega(M, N, P)$ tout entier, les s_i étant encore strictement positives.

Soit $u \in \Omega(M, N, P)$. On pose $t_i = \frac{s_1(u) + \dots + s_i(u)}{s_1(u) + \dots + s_{p+1}(u)}$ pour $i=1, \dots, p+1$,

et $t_0 = 0$. On a $0 \leq t_i \leq 1$. On peut donc considérer les points $T_i = u(t_i)$. Les nombres t_i et les points T_i sont des fonctions continues de u . Il existe donc un voisinage U de g tel que :

$$\alpha. d(T_i, M_i) < \varepsilon \quad \text{pour } u \in U, \quad i = 0, \dots, p+1,$$

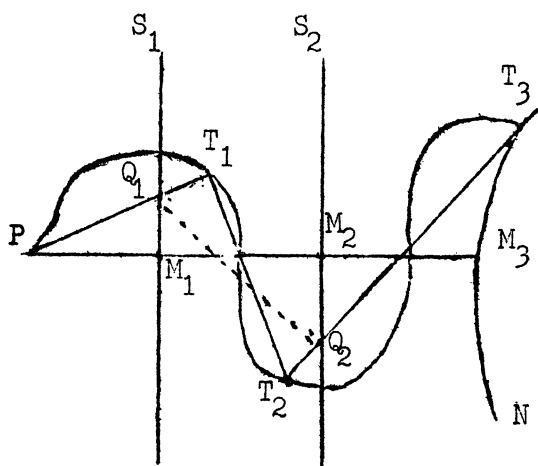
$$\beta. \frac{s_i(u)}{s_1(u) + \dots + s_{p+1}(u)} L(u) < d \quad \text{pour } u \in U, \quad i = 1, \dots, p+1.$$

Autrement dit :

$$\alpha'. T_i \in \mathcal{V}_i;$$

β' . longueur de l'arc $\widehat{T_{i-1} T_i} < d$ (on rappelle que les courbes de $\Omega(M, N, P)$ sont paramétrées proportionnellement à la longueur de l'arc pour t variant de 0 à 1).

On déforme U en $U \cap \mathcal{P}$ de la façon suivante :



Première étape : D'après (6.1) et β' , on peut déformer u en la géodésique brisée $PT_1 \dots T_{p+1}$, par une L -déformation.

Deuxième étape : D'après β et α' , la ligne polygonale $T_{i-1} T_i T_{i+1}$ coupe S_i en un seul point Q_i . D'après (6.1), on peut déformer la géodésique brisée $PT_1 \dots T_{p+1}$ en la géodésique brisée $PQ_1 \dots Q_p T_{p+1}$ par une L -déformation. Mais $PQ_1 \dots Q_p T_{p+1} \in \mathcal{P}$, et $\mathcal{P} \cap U$ reste fixe pendant les deux opérations précédentes,

(6.3) Construction d'une L-déformation D_t de $\Omega(a)$ dans $\Omega^-(a)$.

Toutes les courbes de $\Omega(a)$ sont tracées dans la boule compacte de centre P et de rayon $2a$. Soit d le nombre positif associé à ce compact. Soit $\delta \leq d$ un nombre positif qui sera déterminé dans la suite. On choisit un entier positif q tel que

$$\frac{a}{q} < \delta \quad .$$

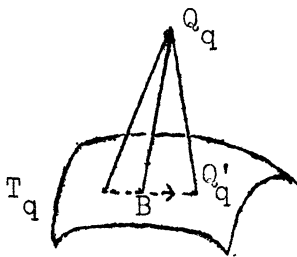
Première étape : Si $u \in \Omega(a)$, on appelle T_i les points de u de paramètre $\frac{i}{q}$, $0 \leq i \leq q$. La longueur de l'arc $\overline{T_{i-1} T_i}$ étant inférieure à d , on peut joindre les T_i par une ligne polygonale de géodésiques, et il existe d'après (6.1) une L-déformation de u sur la géodésique brisée $PT_1 \dots T_q$. De plus, $L(PT_1 \dots T_q) < a$ sauf si $PT_1 \dots T_q = u$, avec $L(u) = a$.

Deuxième étape : Soit Q_i le milieu du segment de géodésique $T_{i-1} T_i$. Comme $d(Q_{i-1} , Q_i) < d$, on peut joindre ces points par un segment de géodésique unique, et, d'après (6.1), il existe une L-déformation de $PT_1 \dots T_q$ sur $PQ_1 \dots Q_q T_q$. Alors $L(PQ_1 \dots Q_q T_q) < a$, sauf si $PT_1 \dots T_q$ est une géodésique non brisée de longueur a .

Troisième étape : D'après (I, (9.10)), il existe un nombre positif $\eta < d$ tel que, si Q appartient à la boule compacte de centre P et de rayon $2a$, et si $d(N , Q) < \eta$, alors il existe un unique point $Q' \in N$ tel que $d(Q , Q') = d(N , Q)$; de plus, l'unique géodésique joignant Q à Q' est orthogonale à N , sa longueur est égale à $d(Q , Q')$, et Q' varie continûment avec Q . Enfin, N étant une sous-variété de M , est munie elle aussi d'une structure riemannienne : il existe alors un nombre positif λ tel que, si a et b sont deux points de N dans la boule de centre P et de rayon $2a$, de distance (pour la métrique de M) inférieure à λ , il existe une unique géodésique de N , paramétrée proportionnellement à la longueur de l'arc pour t variant de 0 à 1 , joignant a et b . On choisit alors $\delta \leq \inf(\eta , \lambda , d)$.

Dans ces conditions, $Q_q T_q < \frac{\delta}{2} < \eta$, et, par conséquent, il existe un $Q'_q \in N$ unique vérifiant les conditions précédentes. Mais

$$d(T_q Q'_q) < d(T_q Q_q) + d(Q'_q Q_q) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \leq \lambda \quad .$$



Il existe une unique géodésique (pour la métrique de N) joignant T_q à Q'_q . Soit B un point de cette géodésique ; lorsque B varie de T_q à Q'_q dans le temps 1 , on obtient une L-déformation de la géodésique $Q_q T_q$ dans la géodésique $Q_q Q'_q$.

De plus, $L(PQ_1 \dots Q_q Q'_q) < a$, sauf si $PQ_1 \dots Q_q T_q = PQ_1 \dots Q_q Q'_q$, avec $L(PQ_1 \dots Q_q T_q) = a$; mais ceci est impossible, car alors $PQ_1 \dots Q_q T_q$ serait une géodésique non brisée et orthogonale à N , i. e. un élément de $S(M, N, P)$, ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle a est une valeur non stationnaire.

REMARQUE 1. - Il ressort de ce qui précède que les seuls éléments qui restent fixes dans la déformation D_t sont ceux de l'ensemble $\Omega(a) \cap S(M, N, P)$.

REMARQUE 2. - On a supposé que N est une sous-variété fermée de M .

(6.4) Avec les notations de (6.3), désignons par μ la fonction définie sur $\Omega(a)$ par $\mu(u) = L(u) - L(D_1(u))$ pour $u \in \Omega(a)$; μ est une fonction continue et, d'après la remarque 1, $\mu(u) = 0$ si et seulement si $u \in S(M, N, P)$.

Si U désigne un ouvert contenant toutes les géodésiques stationnaires de $\Omega(M, N, P)$ on a le :

LEMME. - Sur $\Omega(a) - U$, μ a une borne inférieure strictement positive.

DÉMONSTRATION. - Supposons que $\inf \mu(u) = 0$ pour $u \in \Omega(a) - U$; il existe alors une suite $u_n \in \Omega(a) - U$ telle que $\mu(u_n) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. Mais (cf. (1.5)) $\Omega'(a)$ étant compact, on peut extraire de la suite précédente une autre suite (encore désignée par u_n) qui converge vers une courbe $u \in \Omega'(a)$ (convergence au sens de Ω'). μ étant semi-continue inférieurement, et $\mu(u_n) \rightarrow 0$, on en déduit que $\mu(u) = 0$, donc $u \in S(M, N, P)$. En particulier $u \in U$. Cela est impossible; en effet :

$D_1 u_n$ est une géodésique brisée en des points $t_{1,n}, \dots, t_{q,n}$ (q indépendant de n). On peut alors extraire de la suite u_n une sous-suite (encore désignée par u_n) telle que $(D_1 u_n)(t_{i,n})$ et $(D_1 u_n)(1)$ convergent dans M pour tout $i = 1, \dots, q$; mais alors $D_1 u_n$ converge dans $\Omega(a)$. L'application identique

$$\Omega(a) \rightarrow \Omega'(a)$$

étant continue, $D_1 u_n$ converge dans $\Omega'(a)$. Donc

$$D_1 u_n \rightarrow D_1 u = u \quad \text{dans } \Omega(a).$$

Mais alors

$$d(u_n, u) = \sup_t d(u_n(t), u(t)) + |L(u_n) - L(u)|$$

$$\leq \sup_t d(u_n(t), u(t)) + |L(u_n) - LD_1(u_n)| + |LD_1(u_n) - L(u)|;$$

- le premier terme du second membre est $< \varepsilon$ pour n assez grand, car $u_n \rightarrow u$ dans Ω' ;

- le deuxième terme est $< \varepsilon$ pour n assez grand, car $\mu(u_n) \rightarrow 0$;

- le troisième terme est $< \varepsilon$ pour n assez grand, car $D_1 u_n \rightarrow u$ dans Ω .

Donc $u_n \rightarrow u$ dans Ω . Mais ceci est impossible, car $u_n \in \Omega(a) - U$ qui est fermé dans $\Omega(a)$ et $u \in U$.

Soient g_1, \dots, g_s les géodésiques stationnaires de $\Omega(a)$. On considère les boules ouvertes de centre g_k et de rayon ε (pour la métrique de $\Omega(M, N, P)$) assez petit pour que ces boules soient disjointes, et contenues dans $\Omega(a)$. Soit U l'ouvert réunion des boules précédentes. On a alors :

(6.5) LEMME. - Il existe une L-déformation Δ_t de $\Omega(a)$ dans $\Omega_i^{\bar{r}} \cup U$. (i est le plus grand indice tel que $\ell_i < a$) .

DÉMONSTRATION. - Les g_k ($k = 1, \dots, s$) restant fixes dans la déformation D_t , il existe des boules ouvertes de centre g_k et de rayon assez petit pour que leurs images par D_t soient contenues dans U . Soit U' la réunion de ces boules pour $k = 1, \dots, s$; posons $\delta = \inf \mu$ pour $u \in \Omega(a) - U'$; δ est strictement positif d'après (6.4). Je dis qu'il existe un nombre entier r tel que D_t^r soit une déformation de $\Omega(a)$ dans $\Omega(\ell_i + \frac{\delta}{2})$. En effet, c'est évident si $\ell_i + \frac{\delta}{2} \geq a$; si, au contraire, $\ell_i + \frac{\delta}{2} < a$, $\mu > a$, d'après (6.4), une borne inférieure $\delta' > 0$ dans $\Omega(a) - \Omega^{\bar{r}}(\ell_i + \frac{\delta}{2})$. On prend pour r un nombre entier tel que $a - \delta'r < \ell_i + \frac{\delta}{2}$.

Soit alors $\Delta_t = D_t^{r+1}$; Δ_t répond à la question. En effet :

a. si $D_t^r u \in U'$, alors, par définition $\Delta_t u \in U$;

b. si $D_t^r u \notin U'$, alors $D_t^r u \in \Omega(\ell_i + \frac{\delta}{2}) - U'$. Comme, par définition, D_t

diminue les longueurs de δ au moins dans $\Omega(a) - U'$, on a dans ce cas

$$\Delta_t(u) = D_t^{r+1}(u) \in \Omega(\ell_i + \frac{\delta}{2} - \delta) = \Omega(\ell_i - \frac{\delta}{2}) \subset \Omega_i \quad .$$

(6.6) DEMONSTRATION du lemme (5.3). - Soit ε le rayon des boules dont la réunion est désignée par U dans (6.5). On peut choisir cet ε assez petit pour que :

a. les boules de centre g_k et de rayon 2ε ($k = 1, \dots, s$) soient disjointes ;

b. il existe des L -déformations $\Delta_{k,t}$ de $\Omega(a)$ telles que :

b_1 . $\Delta_{k,t}$ soit l'identité en dehors de la boule de centre g_k et de rayon 2ε ;

b_2 . $\Delta_{k,t}$ déforme la boule de centre g_k et de rayon ε dans $\Omega^-(\ell_i) \cup \{g_k\}$ ($k = 1, \dots, s$) .

ε étant ainsi fixé, il suffit, pour avoir une déformation satisfaisant au lemme (5.3), de composer Δ_t du lemme (6.5) (construite avec cet ε) et les $\Delta_{k,t}$ satisfaisant à b).

(6.7) Construction des $\Delta_{k,t}$.

Si $L(g_k) < \ell_i$, il suffit de prendre $\Delta_{k,t} =$ identité. Supposons donc que $L(g_k) = \ell_i$, et écrivons simplement g, ℓ , en supprimant tous les indices. Soit \mathcal{P} l'ensemble des géodésiques brisées construit dans (6.2). Dans \mathcal{P} on considère le voisinage "tubulaire" \mathfrak{J} des éléments u tels que

$$\ell - \eta \leq L(u) \leq \ell + \eta \quad ,$$

η étant assez petit pour qu'il existe une L -déformation φ de \mathfrak{J} dans $\mathfrak{J}^-(\ell) \cup \{g\}$ (on déforme le long des trajectoires orthogonales des surfaces $L = Cte$, en considérant \mathcal{P} comme une boule d'un espace euclidien, et en appliquant un raisonnement très proche de celui de (4.2)).

Soit U le voisinage de g du lemme (5.2). On choisit alors ε assez petit pour que la boule de centre g et de rayon 2ε soit contenue dans U et que son image par la déformation du lemme (5.2) soit contenue dans \mathfrak{J} (ce qui est possible, puisque g reste fixe dans cette déformation).

En composant la déformation du lemme (5.2) et la déformation φ , on obtient une L -déformation φ' de la boule de centre g de rayon 2ε dans $\Omega^-(\ell) \cup \{g\}$; on pose alors, pour $u \in \Omega(a)$, $\tau \in [0, 1]$

$$\Delta(\tau, u) = \begin{cases} u & \text{si } d(u, g) \geq 2\varepsilon \\ \varphi'(2\tau(1 - \frac{d(u, g)}{2\varepsilon}), u) & \text{si } \varepsilon \leq d(u, g) \leq 2\varepsilon \\ \varphi'(\tau, u) & \text{si } d(u, g) \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Δ est la déformation cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEHEUVELS (René). - Topologie d'une fonctionnelle, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 13-72 (Thèse Sc. math. Paris. 1953).
- [2] SEIFERT (H.) und THRELFALL (W.). - Variationsrechnung im Grossen (Theorie von Marston Morse). - Leipzig, B. G. Teubner, 1938 (Hamburger mathematische Einzelschriften, 24). Reprinted : New York, Chelsea publishing Company, 1951.

Voir en outre la Bibliographie de l'exposé précédent.

APPENDICE

ESPACES DE CHEMINS DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

par Adrien DOUADY

DÉFINITION. - Soit X un espace topologique séparé. Un chemin dans X est un couple (t, γ) , où t est un nombre réel ≥ 0 , appelé durée du chemin, et γ une application continue de \mathbb{R} dans X , constante sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[t, +\infty[$. On appelle $\gamma(0)$ l'origine, et $\gamma(t)$ l'extrémité du chemin. On munit l'ensemble D des chemins dans X de la topologie induite par la topologie produit de \mathbb{R} par l'espace des applications continues de \mathbb{R} dans X , avec la topologie compacte-ouverte.

Cette topologie est caractérisée par la propriété suivante :

Pour tout espace T , une application $\varphi : T \rightarrow D$ est continue si et seulement si :

- 1° la durée de $\varphi(\theta)$ dépend continûment de θ ;
- 2° l'application $T \times \mathbb{R} \rightarrow X$ définie par φ est continue.

Si X est un espace métrique, cette topologie est définie par une distance :

$$d((t, \gamma), (t', \gamma')) = \sup(|t - t'|, \sup_{u \in \mathbb{R}} d(\gamma(u), \gamma'(u)))$$

(on peut remplacer le premier \sup par une somme, ou par $\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$, etc.).

L'espace D des chemins dans X jouit des propriétés fondamentales suivantes :

1° C'est une catégorie topologique : la loi de composition, définie quand l'origine du deuxième chemin coïncide avec l'extrémité du premier, est associative ; le chemin composé a pour durée la somme des durées des chemins donnés. Cette loi est une application continue d'une partie fermée de $D \times D$ dans D .

2° D se rétracte par déformation sur le sous-espace des chemins de durée nulle,

qu'on identifie à X . La déformation $I \times D \rightarrow D$ est donnée pour $0 \leq \alpha \leq 1$, par

$$(\alpha, (t, \gamma)) \rightarrow (\alpha t, \gamma_\alpha)$$

où γ_α coïncide avec γ sur l'intervalle $]-\infty, \alpha t]$, et est constante sur l'intervalle $[\alpha t, +\infty[$. Cette déformation conserve l'origine de chaque chemin.

3° Il est fibré au sens de J.-P. SERRE sur $X \times X$ par l'application π qui, à chaque chemin, fait correspondre son origine et son extrémité.

Dans le cas où X est une variété riemannienne, on va étudier des sous-espaces de D qui possèdent les mêmes propriétés.

Soient :

- D_1 l'espace des chemins lipschitziens dont la constante de Lipschitz est 1,
- D_2 l'espace des chemins différentiables par morceaux, de vitesse constante 1,
- D_3 l'espace des chemins géodésiques par morceaux, de vitesse constante 1.

Rappelons qu'un chemin (t, γ) est dit différentiable par morceaux s'il existe une suite finie $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = t\}$ croissante, telle que γ induise une application différentiable de chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ dans X . L'application induite sur les espaces tangents définit un vecteur vitesse, dont la longueur est la vitesse. La condition exigée dans D_2 et D_3 est que cette vitesse soit constante et égale à 1 sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n$). Les espaces D_1, D_2, D_3 sont munis de la topologie induite par celle de D .

Ces espaces vérifient de façon évidente les conditions 1° et 2°. Montrons qu'ils vérifient aussi la condition 3°. Cette condition est locale relativement à la base, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que, pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe des voisinages U de x et V de y tels que, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{\varphi} & \pi^{-1}(U \times V) \\ i \downarrow & & \downarrow \pi \\ I^{n+1} & \xrightarrow{(f, g)} & U \times V \end{array}$$

où i est l'injection $i(\beta) = (0, \beta)$ de I^n dans $I \times I^n = I^{n+1}$, il existe une application $\psi : I^{n+1} \rightarrow \pi^{-1}(U \times V)$ qui respecte la commutativité du diagramme.

Prenons pour U un ouvert contenant x , mais tel que deux points quelconques (x', x'') de U puissent être joints par un arc de géodésique et un seul $\gamma(x', x'')$ contenu dans U , et pour V un ouvert semblable contenant y .

L'arc $\gamma(x', x'')$ sera considéré comme un chemin d'origine x' , d'extrémité x'' , de durée égale à sa longueur, et de vitesse constante 1. C'est un chemin de D_3 qui dépend continuellement de x' et x'' . On définit alors $\psi(\alpha, \beta)$, où $0 < \alpha < 1$, $\beta \in I^n$, par la composition de trois chemins :

$$\psi(\alpha, \beta) = \gamma(f(\alpha, \beta), f(0, \beta)) \cdot \varphi(\beta) \cdot \gamma(g(0, \beta), g(\alpha, \beta)) \quad .$$

Cette application possède les propriétés voulues, ce qui démontre la propriété 3°.

Choisissons dans X un point de base x_0 . L'espace E des chemins dans X d'origine x_0 est contractile, et fibré sur X par l'application π qui à chaque chemin fait correspondre son extrémité. Il en est de même de ses sous-espaces E_1, E_2, E_3 , où $E_i = E \cap D_i$. Si $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont les fibres de ces divers fibrés, on a $\pi_k(\Omega_i) = \pi_{k+1}(X)$, l'isomorphisme étant la différentielle de la suite d'homotopie, et les injections $\Omega_i \rightarrow \Omega$ sont des équivalences d'homotopie faible.

Plus généralement, soit Y un sous-espace de X , $E(Y)$ le fibré induit par E sur Y , et $E_i(Y)$ les fibrés induits par les E_i ⁽¹⁾. Le lemme des 5 appliqué aux suites exactes d'homotopie

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \pi_k(\Omega_i) & \rightarrow & \pi_k(E(Y)) & \rightarrow & \pi_k(Y) & \rightarrow \pi_{k-1} \dots \\ & \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow = & \\ \rightarrow & \pi_k(\Omega) & \rightarrow & \pi_k(E(Y)) & \rightarrow & \pi_k(Y) & \rightarrow \pi_{k-1} \dots \end{array}$$

montre que les espaces $E_i(Y)$ et $E(Y)$ ont encore même type d'homotopie faible.

⁽¹⁾ L'espace $E_2(Y)$ est homéomorphe à l'espace $\Omega(X, Y, x_0)$ de l'exposé 15 de M. ZISMÁN, paragraphe (1.1).