ADRIEN DOUADY

La suite spectrale d'Adams : structure multiplicative

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 2 (1958-1959), exp. nº 19, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A10_0>

LA SUITE SPECTRALE D'ADAMS : STRUCTURE MULTIPLICATIVE

par Adrien DOUADY

CONVENTIONS. - Afin d'alléger la rédaction, on se placera dans la catégorie des espaces topologoques qui sont homéomorphes à des réalisations géométriques d'ensembles simpliciaux.

Les notations sont celles de l'exposé précédent. Si (A , A') et (B , B') sont des paires d'espaces, on note $(A , A') \times (B , B')$ la paire $(A \times B , (A \times B') \cup (A' \times B))$. Tous les espaces considérés seront munis de point-base. On notera a_o le point-base de A, etc. On prendra (a_o , b_o) comme point-base de $A \times B$. Les applications considérées envoient le point-base au point-base.

On pose :

$$A \tilde{\times} B = (A , a_o) \times (B , b_o) = (A \times B , A \vee B)$$

et

$$A \mathbin{\times\!\!\!\!\times} B = A \times B / A \vee B \quad .$$

1. Produit de classes d'homotopie.

A. Produit d'applications.

Soient $f : (A , A') \to (X , X')$ et $g : (B , B') \to (Y , Y')$; on définit $f \times g : (A , A') \times (B , B') \to (X , X') \times (Y , Y')$ par $(f \times g)(a , b) = (f(a) , g(b))$. La compatibilité avec la relation d'équivalence d'homotopie est immédiate.

On a $(I^n , \dot{I}^n) = (I , S^o) \times (I , S^o) \dots \times (I , S^o)$ (n facteurs) si I désigne le segment $[0 , 1]$, $\dot{I}^n$ le bord du cube, et $S^o = \dot{I} = \{0 , 1\}$ la sphère de dimension 0.

Le groupe d'homotopie $\pi_n(X , X')$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications $(I^n , \dot{I}^n) \to (X , X')$. Si $f : (I^n , \dot{I}^n) \to (X , X')$ est de classe $u \in \pi_n(X , X')$ et $g : (I^q , \dot{I}^q) \to (Y , Y')$ est de classe $v \in \pi_q(Y , Y')$, alors $f \times g : (I^{n+q} , \dot{I}^{n+q}) = (I^n , \dot{I}^n) \times (I^q , \dot{I}^q) \to (X , X') \times (Y , Y')$ définit la classe $u \times v$ de $\pi_{n+q}((X , X') \times (Y , Y'))$.

Si $u \in \pi_n(A)$, $v \in \pi_q(B)$, on a $u \times v \in \pi_{n+q}(A \tilde{\times} B)$, et on notera $u \mathbin{\times\!\!\!\!\times} v$

l'image de $u \times v$ dans $\pi_{n+q}(A \widetilde{\times} B)$.

B . <u>Propriétés.</u>

Le produit défini plus haut vérifie les propriétés suivantes :

IB 1. Il est bilinéaire, donc définit une application linéaire

$$\pi_*(A , A') \otimes \pi_*(B , B') \longrightarrow \pi_*((A , A') \times (B , B'))$$
$$\pi_*(A) \otimes \pi_*(B) \longrightarrow \pi_*(A \widetilde{\times} B)$$

IB 2. Il est fonctoriel et associatif

IB 3. Il est anticommutatif au sens suivant :

Si $\sigma : (A , A') \times (B , B') \longrightarrow (B , B') \times (A , A')$ est l'homéomorphisme défini par $\sigma(a , b) = (b , a)$, et si $u \in \pi_i(A , A')$ et $v \in \pi_j(B , B')$, on a $v \times u = (-1)^{ij} \sigma_*(u \times v)$.

En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
I^i \times I^j \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\sigma_o"] & A \times B \arrow[d, "\sigma"] \\
I^j \times I^i \arrow[r, "g \times f"] & B \times A
\end{tikzcd}$$

où $\sigma_o : I^{i+j} \longrightarrow I^{i+j}$ est une application de degré $(-1)^{ij}$

IB 4. Soit $A \supset A' \supset A'' \ni a_o$ et $B \supset B' \supset B'' \ni b_o$.

Soient :

$u \in \pi_n(A , A')$, $du \in \pi_{n-1}(A' , A'')$,

$v \in \pi_q(B , B')$, $dv \in \pi_{q-1}(B' , B'')$,

$u \times v \in \pi_{n+q}((A , A') \times (B , B'))$,

$d(u \times v) \in \pi_{n+q-1}((A \times B') \cup (A' \times B) , (A \times B'') \cup (A' \times B') \cup (A'' \times B))$.

Alors on a : $d(u \times v) = i_*(du \times v) + (-1)^n i'_*(u \times dv)$, où i et i' désignent les injections canoniques qui donnent un sens à la formule.

En effet on peut supposer que f envoie toutes les faces du cube I^n dans A'' , sauf une face I^{n-1} , et de même que g envoie toutes les faces de I^q dans B'' , sauf I^{q-1}. Alors $f \times g$ envoie toutes les faces de $I^n \times I^q$ dans $(A \times B'') \cup (A'' \times B)$, sauf $I^n \times I^{q-1}$ et $I^{n-1} \times I^q$, dont la face commune $I^{n-1} \times I^{q-1}$ est envoyée dans $(A' \times B')$, ce qui donne les deux termes de la formule.

C. Propriétés des foncteurs $\divideontimes$ et $\vee$.

Associativité :

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \divideontimes (B \divideontimes C) = (A \divideontimes B) \divideontimes C \quad .$$

Espaces neutres : si P est un espace réduit à un point,

$$A \vee P = A \quad , \quad A \divideontimes P = P$$

$$A \divideontimes S^o = A \quad .$$

Distributivité :

$$A \divideontimes (B \vee C) = (A \divideontimes B) \vee (A \divideontimes C) \quad .$$

Les vérifications sont immédiates.

D. Suspension.

On appelle suspension de A l'espace $SA = S^1 \divideontimes A$, où S^1 est la sphère à une dimension $S^1 = I/S^o$, et on pose $S^n A = S^n \divideontimes A$, où $S^n = S^1 \divideontimes \dots \divideontimes S^1$ (n facteurs) est la sphère de dimension n. On notera ε le générateur canonique de $\pi_1(S^1)$ et $\varepsilon^n = \varepsilon \divideontimes \dots \divideontimes \varepsilon$ le générateur canonique de $\pi_n(S^n)$. On pose, pour $u \in \pi_i A$, $Eu = \varepsilon \divideontimes u \in \pi_{i+1}(SA)$, et $E^n u = \varepsilon^n \divideontimes u \in \pi_{i+1}(S^n A)$.

On sait (cf. exposé 5, où la méthode utilisée pour la suspension de S^m s'appliquerait à tout espace $(m-1)$-connexe) que si A est $(m-1)$-connexe, E est un isomorphisme : $\pi_i(A) \longrightarrow \pi_{i+1}(SA)$ pour $i < 2m-1$.

L'identification $S(A \divideontimes B) = SA \divideontimes B \underset{\sigma}{\approx} A \divideontimes SB$ donne

$$E(u \divideontimes v) = Eu \divideontimes v = (-1)^i \, \sigma_*(u \divideontimes Ev) \quad \text{si} \quad u \in \pi_i A \, .$$

DÉFINITION.- Un élément u de $\pi_i(S^n)$ est dit additif si, pour tout A, et pour tous w_1, $w_2 \in \pi_n(A)$, on a

$$(w_1 + w_2) \circ u = w_1 \circ u + w_2 \circ u \quad .$$

THÉORÈME III.- Tout élément u de $\pi_i(S^n)$ de la forme $u = Eu'$ est additif.

DÉMONSTRATION. - Soient $f : S^{i-1} \longrightarrow S^{n-1}$ de classe u', et g_1, $g_2 : S^n \longrightarrow A$ de classes w_1 et w_2 ; soit $D : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ telle que $p_1 \circ D$ et $p_2 \circ D$ soient homotopes à l'identité de S^1, où p_1 et p_2 sont les deux projections $S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1$. (D définit sur S^1 la structure de co-H-espace).

On a :

$$g_1 + g_2 = (g_1 \vee g_2) \circ (D \divideontimes \varepsilon^{n-1})$$

d'où

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2) \circ (\varepsilon \divideontimes f) &= (g_1 \vee g_2) \circ (D \divideontimes \varepsilon^{n-1}) \circ (\varepsilon \divideontimes f) \\ &= (g_1 \vee g_2) \circ (D \divideontimes f) \\ &= (g_1 \vee g_2) \circ ((\varepsilon \vee \varepsilon) \divideontimes f) \circ (D \divideontimes \varepsilon^{i-1}) \\ &= (g_1 \circ \varepsilon \divideontimes f) \vee (g_2 \circ \varepsilon \divideontimes f) \circ (D \divideontimes \varepsilon^{i-1}) \\ &= g_1 \circ (\varepsilon \divideontimes f) + g_2 \circ (\varepsilon \divideontimes f) \quad .\end{aligned}$$

REMARQUE. - Ce théorème est à rapprocher du théorème I C de l'exposé 9 : "Toute opération cohomologique Ω de la forme $\sigma \Omega'$ est additive".

En effet les éléments de $\pi_i(S^n)$ définissent par composition à droite des opérations homotopiques (cf. SERRE [3]).

E. Cas des sphères.

La composition des applications $S^i \xrightarrow{v} S^n \xrightarrow{u} S^q$, compatible avec la relation d'équivalence d'homotopie, définit une application

$$(u , v) \longrightarrow u \circ v$$

de $\pi_n(S^q) \times \pi_i(S^n)$ dans $\pi_i(S^q)$, linéaire en v. Elle est de plus linéaire en u si v est additif, en particulier si $v = Ev'$ (théorème I D).

La proposition ci-dessous précise ses relations avec le produit $\divideontimes$:

PROPOSITION I E. - Soient $u \in \pi_{n+k} S^n$, $v \in \pi_{n'+k'} S^{n'}$, $u \divideontimes v \in \pi_{n+n'+k+k'} S^{n+n'}$. Alors

$$u \divideontimes v = (-1)^{n'k} E^{n'} u \circ E^{n+k} v \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de contempler le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S^{n+k} \mathbin{\#} S^{n'+k'} \arrow[r, "\varepsilon^{n+k} \# v"] \arrow[rr, bend left, "u \# v"] & S^{n+k} \mathbin{\#} S^{n'} \arrow[r, "u \# \varepsilon^{n'}"] \arrow[d, leftrightarrow, "(-1)^{n'(n+k)}"] & S^{n} \mathbin{\#} S^{n'} \arrow[d, leftrightarrow, "(-1)^{n'n}"] \\
 & S^{n'} \mathbin{\#} S^{n+k} \arrow[r, "\varepsilon^{n'} \# u"] & S^{n'} \mathbin{\#} S^{n}
\end{tikzcd} .$$

On a : $E(u \circ v) = E(u) \circ E(v)$, ce qui nous permet de munir le groupe $S\pi'_* = \bigoplus S\pi_k$, où $S\pi_k = \varinjlim_E \pi_{n+k} S^n$, d'un produit $(\alpha , \beta) \longrightarrow \alpha \circ \beta$ bilinéaire : si $u \in \pi_{n+k}(S^n)$ et $v \in \pi_{n'+k'}(S^{n'})$ ont pour images $\alpha \in S\pi_k$ et $\beta \in S\pi_{k'}$, $\alpha \circ \beta$ sera l'image de $E^{\ell} u \circ E^{\ell'} v$, ℓ et ℓ' étant choisis de façon que cette expression ait un sens, soit : $n' + \ell' = n + k + \ell$.
La proposition I E a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - $S\pi'_*$ est un anneau gradué anticommutatif au sens suivant : si $\alpha \in S\pi_k$ et $\beta \in S\pi_{k'}$, on a

$$\beta \circ \alpha = (-1)^{kk'} \alpha \circ \beta .$$

En particulier, si $\alpha \in S\pi_k$, où k est impair, on a $2\alpha^2 = 0$.

DÉMONSTRATION. - $v \mathbin{\#} u = (-1)^{nk'} E^* v \circ E^* u$

$$v \mathbin{\#} u = (-1)^{(n+k)(n'+k')+nn'} u \mathbin{\#} v$$

$$u \mathbin{\#} v = (-1)^{n'k} E^* u \circ E^* v .$$

II. Produits dans les suites spectrales.

Dans l'exposé précédent, on a vu une suite spectrale $\mathcal{E}$ dont on peut calculer le terme ${}^2\mathcal{E} = \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p , Z_p)$, puisqu'on connaît en détail la structure de l'algèbre de Steenrod A^* , et dont le terme ${}^\infty\mathcal{E}$ est un gradué associé au groupe $S\pi'_*$. On pourrait donc, si on savait calculer les différentielles de la suite spectrale, (ce qui n'est malheureusement possible que dans des cas particuliers) dire l'ordre de $S\pi_k$ pour les différentes valeurs de k , en faisant le calcul séparément pour les composantes p-primaires. On va dans ce chapitre établir une méthode qui donne des indications sur la structure multiplicative de l'anneau $S\pi_*$ en même temps que sur le détail de sa structure additive.

A. Produits spectraux.

DÉFINITION. - Soient Π' , Π'' et Π trois systèmes spectraux (voir exposé précédent, II C). Un produit spectral défini sur Π' et Π'' à valeurs dans Π est la donnée, pour tous n , q , $r \geq 0$, d'une application bilinéaire

$$\varphi_r : \Pi'(n , n + r) \otimes \Pi''(q , q + r) \longrightarrow \Pi(n + q , n + q + r)$$

satisfaisant aux axiomes :

SPP I. Si $n \geq n'$, $q \geq q'$, $n + r \geq n' + r'$, $q + r \geq q' + r'$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Pi'(n,n+r) \otimes \Pi''(q , q + r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "\eta' \otimes \eta''"] & \Pi(n + q , n + q + r) \arrow[d, "\eta"] \\
\Pi'(n',n' + r') \otimes \Pi''(q',q' + r') \arrow[r, "\varphi_{r'}"] & \Pi(n'+q' , n'+q'+r')
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

SPP 2. Pour tous n , $q \geq 0$, $r \geq 1$, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Pi'(n , n + r) \otimes \Pi''(q , q + r) \arrow[rr, "\varphi_r"] \arrow[dr, "\eta' \otimes \partial''"] \arrow[dd, "\partial' \otimes \eta''"'] & & \Pi(n + q , n + q + r) \arrow[dd, "\partial"] \\
& \Pi'(n,n+1) \otimes \Pi''(q+r,q+r+1) \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
\Pi'(n+r , n+r+1) \otimes \Pi''(q , q + 1) \arrow[rr, "\varphi_1"] & & \Pi(n+q+r,n+q+r+1)
\end{tikzcd}$$

On a : $\partial \circ \varphi_r = \varphi_1 \circ (\eta' \otimes \partial'') + \varphi_1 \circ (\partial' \otimes \eta'')$ avec, bien entendu, si Π' est gradué, la règle de Koszul $(\eta \otimes \partial)(a \otimes b) = (-1)^{\alpha}\, \eta a \otimes \partial b$ où α est le degré de a .

THÉORÈME II A. - Un produit spectral définit des applications

$${}^r\varphi : {}^rE' \otimes {}^rE'' \longrightarrow {}^rE$$

telles que

a. ${}^1\varphi = \varphi_1 : \Pi'(n , n + 1) \otimes \Pi''(q , q + 1) \longrightarrow \Pi(n + q , n + q + 1)$

b. ${}^r d(\varphi(a \otimes b)) = \varphi({}^r da \otimes b) + (-1)^{\alpha} \varphi(a \otimes {}^r db)$

si a est de degré total α .

c. ${}^{r+1}\varphi$ est induit par ${}^{r}\varphi$, et ${}^{\infty}\varphi$ par les ${}^{r}\varphi$.

d. ${}^{\infty}\varphi$ est aussi induit par passage aux gradués associés par $\varphi_{\infty} : \pi'(0) \otimes \pi''(0) \longrightarrow \pi(0)$.

La démonstration consiste en une longue suite de vérifications que le lecteur (s'il existe) fera lui-même s'il en a envie.

B. Produits dans les suites spectrales d'Adams.

Soient Y' et Y'' deux ensembles simpliciaux, (Y'^{n}) et (Y''^{n}) deux complexes géométriques au-dessus de Y' et Y'' respectivement. On suppose que Y'^{n+1} est un sous-ensemble simplicial de Y'^{n} pour tout n , et de même pour (Y''^{n}) . On peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant les complexes par des complexes homotopiquement équivalents grâce à des "mapping cylinders" à une infinité d'étages.

On pose $Y = Y' \not\!\!\times Y''$, et $Y^{n} = \bigcup_{n'+n''=n} Y'^{n'} \not\!\!\times Y''^{n''}$, $Y^{n+1} \to Y^{n}$ étant l'injection.

PROPOSITION II.B. Si (Y'^{n}) est $(m'-1)$-connexe et (p , t')-acyclique, et si (Y''^{n}) est $(m''-1)$-connexe et (p , t'')-acyclique, alors (Y^{n}) est $(m-1)$-connexe et (p , t)-acyclique, avec

$$m = m' + m'' \qquad \text{et} \qquad t = m'' + t' \ .$$

DÉMONSTRATION. - Nous utiliserons plusieurs lemmes. Posons :

$$Y(n , k) = \bigcup_{0 \leq i \leq k} Y'^{i} \not\!\!\times Y''^{n-i} = Y'^{0} \not\!\!\times Y''^{n} \cup Y'^{1} \not\!\!\times Y''^{n-1} \cup \ldots \cup Y'^{k} \not\!\!\times Y''^{n-k}$$

On va montrer par récurrence sur k

a. que $Y(n , k)$ est $(m-1)$-connexe

b. que $H_i(Y(n+1 , k+1)) \longrightarrow H_i(Y(n , k))$ est nulle pour $i \leq t$.

a. LEMME 1. - Si A et B sont des espaces topologiques connexes et localement contractiles, $A \not\!\!\times B$ est simplement connexe.

DÉMONSTRATION. - Considérons l'application $(A \times B , A \vee B) \longrightarrow A \not\!\!\times B$. Tout lacet dans $A \not\!\!\times B$ est homotope à un lacet qui se décompose et un nombre fini de chemins qui se relèvent dans $A \times B$, leurs extrémités se relevant dans $A \vee B$. Comme $A \vee B$ est connexe par arcs, on peut ramener ces chemins à avoir leurs extrémités en (a_o , b_o) . On en déduit que $\pi_1(A \times B , A \vee B) \longrightarrow \pi_1(A \divideontimes B)$ est surjective. Mais la suite exacte

$$\pi_1(A \vee B) \longrightarrow \pi_1(A \times B) \longrightarrow \pi_1(A \times B , A \vee B) \longrightarrow \pi_0(A \vee B)$$

montre que $\pi_1(A \times B , A \vee B) = 0$. Ce qui démontre le lemme 1 .

On en déduit, si m' et $m'' > 0$, ce que nous supposerons tout au long de la démonstration, que $Y'^{n'} \divideontimes Y''^{n''}$ est simplement connexe pour tous n' , n'' .

LEMME 2. - Soit un espace topologique localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Supposons que X soit réunion de deux fermés A et B d'intersection non vide satisfaisant aux mêmes hypothèses. Alors si A et B sont simplement connexes et si $A \cap B$ est connexe, $X = A \cup B$ est simplement connexe.

DÉMONSTRATION. - Soit R un revêtement quelconque de X , x_o un point de $A \cap B$; $r_o \in R$ au-dessus de x_o . Il existe une section s_1 de R au-dessus de A et une section s_2 au-dessus de B qui passent par r_o . Ces sections coïncident sur $A \cap B$, et définissent une section s de R sur X . Tout revêtement de X admettant une section, X est simplement connexe. On en déduit par récurrence sur k que $Y(n , k)$ est simplement connexe en appliquant le lemme 2 à

$$\begin{cases} X = Y(n , k+1) \\ A = Y(n , k) \\ B = Y'^{k+1} \divideontimes Y''^{n-k-1} \\ A \cap B = Y'^{k+1} \divideontimes Y''^{n-k} \end{cases}$$

On peut donc appliquer aux $Y(n , k)$ le théorème de Hurewicz pour l'homologie à coefficients dans Z . On a :

$$\tilde{H}_*(Y'^{n'} \divideontimes Y''^{n''} ; Z) \approx \tilde{H}_*(Y'^{n'} ; Z) \otimes \tilde{H}_*(Y''^{n''} ; Z) \oplus \mathrm{Tor}(H_*(Y'^{n'}) , H_*(Y''^{n''}))$$

D'où $H_i(Y'^{n'} \divideontimes Y''^{n''} ; Z) = 0$ pour $i < m = m' + m''$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris (voir EILENBERG-STEENROD, [2])

$$H_i(A) \oplus H_i(B) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_{i-1}(A \cap B)$$

appliquée aux mêmes espaces X , A , B démontre de la même façon par récurrence sur k que $H_i(Y(n , k)) = 0$ pour $i < m$.

On en déduit que $\pi_i(Y(n , k)) = 0$ pour $i < m$ et en particulier, pour $k = n$, que $\pi_i(Y^n) = 0$ pour $i < m$.

b. LEMME 3. - <u>Soient</u> A et B <u>deux sous-espaces d'un espace</u> X . <u>Si les applications</u> $H_i(A , A \cap B) \longrightarrow H_i(X , B)$ <u>et</u> $H_i(B) \longrightarrow H_i(X)$ <u>sont nulles, alors</u> $H_i(A \cup B) \longrightarrow H_i(X)$ <u>est nulle</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit $\gamma \in Z_i(A \cup B)$. On peut écrire $\gamma = \alpha + \beta$, avec $\alpha \in C_i(A)$ et $\beta \in C_i(B)$.

On a $d\alpha + d\beta = 0$, d'où $d\alpha \in C_{i-1}(A \cap B)$ et $\alpha \in Z_i(A , A \cap B)$.

En utilisant la première hypothèse, $\alpha = d\eta + \beta'$, avec $\eta \in C_{i+1}(X)$ et $\beta' \in C_i(B)$; $\beta + \beta' = \gamma - d\eta$ donc $d(\beta + \beta') = 0$, d'où $\beta + \beta' \in Z_i(B)$.

En utilisant la deuxième hypothèse, $\beta + \beta' = d\eta'$ avec $\eta' \in C_{i+1}(X)$ d'où $\gamma = d(\eta + \eta')$ ce qui démontre le lemme 3.

On va maintenant appliquer ce lemme à

$$\left[\begin{array}{l} X = Y(n , k) \\ A = Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k} \\ B = Y(n + 1 , k) \\ A \cup B = Y(n + 1 , k + 1) \\ A \cap B = Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k+1} \\ \text{Homologie à coefficients dans } Z_p . \end{array}\right.$$

En effet, par l'hypothèse de récurrence, l'application composée $H_i(Y(n + 1 , k)) \longrightarrow H_i(Y(n , k - 1)) \longrightarrow H_i(Y(n , k))$ est nulle pour $i \leq t$, la première application étant nulle .

D'autre part,

$$\tilde{H}_*(Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k} , Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k+1}) = \tilde{H}_*(Y'^{k+1}) \otimes H_*(Y''^{n-k} , Y''^{n-k+1})$$

Donc l'application composée :

$$H_i(Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k} , Y'^{k+1} \ast Y''^{n-k+1}) \longrightarrow H_i(Y'^{k} \ast Y''^{n-k} , Y'^{k} \ast Y''^{n-k+1})$$
$$\longrightarrow H_i(Y(n , k) , Y(n + 1 , k))$$

est nulle pour $i \leq t$, la première application étant nulle. On peut donc appliquer le lemme 3. Ce qui démontre b et achève la démonstration de la proposition II B.

THÉORÈME II B. - Soient Y' et Y'' des espaces $(m-1)$ connexes ; posons $X = Y' \wedge Y''$. Soient (Y'^n) et (Y''^n) des $(p\ ,\ 2m-2)$-résolutions de Y' et Y'', (X^n) une $(p\ ,\ 3m-2)$-résolution de X. Soient ${}^rE'$, ${}^rE''$ et ${}^rE$ les suites spectrales de ces résolutions. Alors on a, pour tous r, i', i'', n', n'' une application $\varphi_r : {}^rE'^{n'}_{i'} \otimes {}^rE''^{n''}_{i''} \longrightarrow {}^rE^{n'+n''}_{i'+i''}$ telle que

a. ${}^rd\,\varphi(a \otimes b) = \varphi({}^rda \otimes b + (-1)^{\alpha}\ a \otimes {}^rdb)$ si a est de degré α ;

b. φ_{r+1} est induit par φ_r, et φ_∞ par les φ_r ;

c. φ_∞ est aussi induit par passage aux gradués associés par

$$\varphi : \pi_{i'}(Y') \otimes \pi_{i''}(Y'') \longrightarrow \pi_{i'+i''}(Y' \wedge Y'')$$

d. φ_2 s'identifie au produit :

$$\mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ \tilde{H}_*(Y')) \otimes \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ \tilde{H}_*(Y'')) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ \tilde{H}_*(Y') \otimes \tilde{H}_*(Y''))$$

défini par la structure de coalgèbre de A^*.

DÉMONSTRATION. - Remplaçons (Y'^n) et (Y''^n) par des complexes équivalents tels que $Y'^{n+1} \subset Y'^n$ et $Y''^{n+1} \subset Y''^n$ pour tout n. Le complexe (Y^n) au-dessus de X défini par $Y^n = \bigcup_{n'+n''=n} Y'^{n'} \wedge Y''^{n''}$ est $(3m-2)$-acyclique d'après la proposition II B. Soit $f = (f^n) : (Y^n) \longrightarrow (X^n)$ (exposé 18, proposition I B). L'application :

$$(Y'^n\ ,\ Y'^{n+r}) \times (Y''^q\ ,\ Y''^{q+r}) \longrightarrow (Y^{n+q}\ ,\ Y^{n+q+r}) \xrightarrow{\ f\ } (X^{n+q}\ ,\ X^{n+q+r})$$

définit un produit

$$\varphi : \pi_*(Y'^n\ ,\ Y'^{n+r}) \otimes \pi_*(Y''^q\ ,\ Y''^{q+r}) \longrightarrow \pi_*(X^{n+q}\ ,\ X^{n+q+r})$$

dont on vérifie immédiatement (en appliquant les propriétés I B) que c'est un produit spectral.

a, b, c sont des applications directes du théorème II A.

Pour démontrer d, il suffit de rappeler la définition du produit

$$\mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ M') \otimes \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ M' \otimes M'')\ .$$

Soient (L'^n) ; (L''^n) des résolutions A^*-injectives de M' et M''. Alors $L' \otimes L''$ est un complexe acyclique sur $M' \otimes M''$. Si L est une résolution

A^*-injective de $M = M' \otimes M''$, considéré comme A^*-module grâce à l'application diagonale $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ (avec bien entendu la règle des signes de Koszul), on peut trouver une application $f : L' \otimes L'' \to L$ ([2], chapitre 5, proposition 11a, p. 78). Alors la composée :

$$VL' \otimes VL'' \to V(L' \otimes L'') \xrightarrow{Vf} VL$$

définit par passage à la cohomologie

$$H^* VL \otimes H^* VL'' \to H^*(VL' \otimes VL'') \to H^*(VL)$$

soit

$$\mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p , M') \otimes \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p , M'') \to \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p , M) \quad .$$

Il est clair, grâce à la proposition II D 3 de l'exposé précédent, que l'on peut définir le produit

$$\mathrm{Ext}^{n'}_{i'} \otimes \mathrm{Ext}^{n''}_{i''} \to \mathrm{Ext}^{n'+n''}_{i'+i''}$$

en utilisant des résolutions t', t'' et t-partielles (avec $t = t' + t''$) pour $i' - n' \leq t'$ et $i'' - n'' \leq t''$.

Or les complexes L' et L'' définis à partir de Y' et Y'' (exposé précédent, démonstration du théorème II D) sont des résolutions partielles de $\widetilde{H}^{'}_*(Y')$ et $\widetilde{H}^{'}_*(Y'')$, et la construction qui définit le produit des termes ${}^2E$ coïncide avec la construction ci-dessus.

C. Groupes d'homotopie stables de sphères.

THÉORÈME II C.- La suite spectrale $\mathcal{E}$ de l'exposé précédent, II E, est munie d'un produit

$$\varphi_r : {}^r\mathcal{E}^{s'}_{k'} \otimes {}^r\mathcal{E}^{s''}_{k''} \to {}^r\mathcal{E}^{s'+s''}_{k'+k''}$$

tel que

a. ${}^rd(a.b) = ({}^rda).b + (-1)^{\alpha}\, a.{}^rdb$ si a est de degré total α ;

b. φ_{r+1} est induit par φ_r et φ_∞ par les φ_r ;

c. φ_∞ est aussi induit par le produit o (I E) :

$$S\pi_* \otimes S\pi^{'}_* \to S\pi^{'}_*$$

d. φ_2 s'identifie au produit dans

$$H^*(A^*\ ,\ Z_p) = \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ Z_p) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Ce théorème n'est que l'application du théorème II B au cas où Y' et Y'', et par conséquent $X = Y' ⋇ Y''$ sont des sphères, en tenant compte de la proposition I E, et en effectuant le décalage de l'exposé précédent, II E. Ce décalage introduit un signe qui détruit celui de la proposition I E. Soit en effet $\varepsilon^m : \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ Z_p) \to \mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p\ ,\ Z_p(m))$ l'isomorphisme canonique de degré m. Le produit

$$\mathrm{Ext}(Z_p\ ,\ Z_p(m')) \otimes \mathrm{Ext}(Z_p\ ,\ Z_p(m'')) \to \mathrm{Ext}(Z_p\ ,\ Z_p(m' + m''))$$

est relié au produit dans $\mathrm{Ext}(Z_p\ ,\ Z_p)$ par la formule

$$\varepsilon^{m'}(a).\,\varepsilon^{m''}(b) = (-1)^{m''k}\,\varepsilon^{m'+m''}(a.b)$$

si a est de degré k. En prenant pour φ le produit du théorème IIB appliqué à $Y' = S^{m'}$, $Y'' = S^{m''}$, $X = S^{m'+m''}$, modifié par le signe $(-1)^{m''k}$, on supprime donc simultanément le signe dans les parties c et d.

D. Structure additive de $S\pi_*$.

$S\pi_0 = Z$ a pour générateur l'unité ε de l'anneau $S\pi_*$. ε est de filtration canonique 0 et définit un élément de ${}^{\infty}\mathcal{E}_0^0$ qui est l'unité de l'algèbre ${}^{\infty}\mathcal{E}$; $p\varepsilon$ est de filtration canonique 1 et définit un élément $b \in {}^{\infty}\mathcal{E}_1^1$. Soit $\omega \in S\pi_k$ de filtration n ; ω définit un élément $u \in {}^{\infty}\mathcal{E}_{n+k}^n$; $p\,\omega = p\varepsilon \circ \omega$ est de filtration $\geq n + 1$, et a pour image dans ${}^{\infty}\mathcal{E}_{n+k+1}^{n+1}$ l'élément bu . En particulier $bu \neq 0$ entraîne $p\omega \neq 0$.

EXEMPLE. - En caractéristique 2 , une résolution 3-partielle de Z_2 donne pour le terme ${}^2\mathcal{E}$ les éléments de base suivants (la place dans le tableau indique le bidegré) :

degré supérieur

7					
6	.	.	$b^2h_2 = h_1^3$		.
5	.	.	bh_2		.
4	.	h_2	h_1^2		b^4
3	.	.	.	b^3	.
2	.	h_1	b^2	.	.
1	.	b	.	.	.
0	1	:	.	.	.
	0	1	2	3	4

degré inférieur

Ce tableau donne tous les éléments de degré total k tel que $0 < k \leq 3$. Les différentielles de la suite spectrale sont nulles pour des raisons de degré, d'où ${}^{\infty}\mathcal{E} = {}^{2}\mathcal{E}$ dans la région considérée. On en déduit pour la composante 2-primaire des groupes d'homotopie stable :

composante 2-primaire de $S\pi_1 = Z_2$

" " $S\pi_2 = Z_2$

" " $S\pi_3 = Z_8$

Le générateur de $S\pi_2$ est le carré du générateur de $S\pi_1$, et le cube du générateur de $S\pi_1$ est le quadruple du générateur de $S\pi_3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes d'homotopie des bouquets de sphères, Séminaire Cartan, t. 7 : Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, 1954/55, n° 20.

ADDITIF

[4] ADAMS (J. F.). - On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helvet., t.32, 1958, p. 180-214. (Voir paragraphe 4).