

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Applications de la suite spectrale des espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 3, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A3_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE LA SUITE SPECTRALE DES ESPACES FIBRES

par Adrien DOUADY

NOTATIONS. - Dans tout exposé, A est un anneau principal. $P : X \rightarrow B$ est un espace fibré au sens de SERRE tel que le système local d'homologie de la fibre F à coefficients dans A soit constant, de sorte qu'on pourra appliquer la formule des coefficients universels :

$$E_{p,q}^2 \approx H_p(B, A) \otimes H_q(F, A) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(B, A), H_q(B, A)) .$$

E étant un espace, on écrira $H(E)$ ou $H_p(E)$ au lieu de $H(E, A)$ ou $H_p(E, A)$.

Le premier problème qu'on peut chercher à résoudre est de calculer $H(X)$ connaissant $H(B)$ et $H(F)$ par l'intermédiaire de son gradué associé E^∞ .

Il est malheureusement très difficile dans le cas général de déterminer les d^r . On peut cependant tirer de leur existence et de leurs propriétés certaines informations et, dans certains cas, les déterminer.

On pourra aussi chercher à calculer $H(F)$ connaissant $H(X)$ et $H(B)$, ou $H(B)$ connaissant $H(F)$ et $H(X)$. C'est notamment le cas lorsqu'on recherche l'homologie de l'espace des lacets d'un espace B simplement connexe, fibre de l'espace contractile X des chemins d'origine b , ou lorsqu'on recherche l'homologie de l'espace classifiant d'un groupe topologique connexe, base d'un fibré principal universel (donc acyclique).

1. Informations partielles dans le cas général.

Tout d'abord, les E^r vont, si l'on peut dire, en décroissant avec r ; plus précisément, pour $r' \geq r$, $E_{p,q}^{r'}$ est un quotient d'un sous-module de $E_{p,q}^r$. En particulier le nombre d'éléments de $E_{p,q}^r$, sa dimension si A est un corps, son nombre minimum de générateurs si A est un anneau principal quelconque, vont en décroissant avec r . Si $E_{p,q}^r = 0$, $E_{p,q}^{r'} = 0$.

Si A est un corps, on a $E_{p,q}^2 = H_p(B) \otimes H_q(F)$, d'où

$$\dim E_{p,q}^2 = \dim H_p(B) \cdot \dim H_q(F)$$

et $\dim H_n(X) = \sum_p E_{p,n-p}^\infty \leq \sum_p (\dim H_p(B) \cdot \dim H_{n-p}(F))$.

En particulier, si $H_n(B)$ et $H_n(F)$ sont de dimension finie pour tout n , $H_n(X)$ sera de dimension finie pour tout n . (Nous donnerons au n° 3 (C) un énoncé englobant celui-ci).

Si de plus $H_n(B)$ et $H_n(F)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de n , on peut définir les caractéristiques d'Euler-Poincaré

$$\chi(B) = \sum (-1)^n \dim H_n(B)$$

et $\chi(F)$, ainsi que $\chi(E^r) = \sum (-1)^{p+q} \dim E_{p,q}^r$, car cette somme est également finie. Alors $\chi(X)$ est aussi définie et on a :

$$\chi(X) = \chi(E^\infty) = \chi(E^r) \quad \text{pour } r \text{ suffisamment grand.}$$

D'autre part $\chi(E^{r+1}) = \chi(E^r)$, puisque E^{r+1} est l'homologie de E^r pour une différentielle de degré total impair.

On en déduit

$$\chi(X) = \chi(E^2) = \chi(B) \cdot \chi(F)$$

REMARQUE. - L'hypothèse que le système local $\mathcal{K}(\mathcal{F}, \Lambda)$ est constant est essentielle.

Cependant elle est superflue lorsque B est un polyèdre fini. Voici un contre-exemple quand B n'est pas un polyèdre fini.

CONTRE-EXEMPLE. - Soit X l'espace obtenu en identifiant, dans $S_\infty \times S_{2n}$, le point (x, y) à $(-x, -y)$; S_∞ désigne l'espace des vecteurs de norme 1 de l'espace de Hilbert; X est fibré sur $P_{2n}(\mathbb{R})$ de fibre S_∞ contractile: on a donc, pour $\Lambda = \mathbb{R}$,

$$\chi(X) = \chi(P_{2n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = 1.$$

D'autre part X est fibré sur $B' = P_\infty(\mathbb{R})$ de fibre $F' = S_{2n}$. Mais $H_i(B', \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ pour $i = 0$, 0 pour $i \neq 0$, d'où $\chi(B') = 1$, ce qui, avec $\chi(F') = 2$, $\chi(X) = 1$ donne le contre-exemple.

2. Exemples où la suite spectrale est triviale.

Nous dirons que la suite spectrale est triviale si tous les d^r sont nuls, c'est-à-dire $E^\infty = E^2 = H(B \times F)$. Ce n'est pas une condition suffisante pour

que X s'identifie homéomorphiquement à $B \times F$.

A. Espace fibré par des sphères sur une sphère. - Supposons $F = S_q$, $B = S_p$, $p > 1$, de sorte que B est simplement connexe.

$E_{i,j}^2 = 0$ sauf pour $i = 0$ ou p , $j = 0$ ou q , donc $E_{i,j}^r$ de même. Pour que d^r ne soit pas nul, il faut simultanément $r = p$ et $r = q + 1$. D'où :

PROPOSITION. - Si $q \neq p - 1$, la suite spectrale est triviale.

B. Variétés de Stiefel complexes. - Soit $V(n, m, C)$ la variété des suites de m vecteurs orthonormaux de l'espace C^n ; $V(n, 2, C)$ est fibré de base S_{2n-1} et de fibre S_{2n-3} . La suite spectrale est donc triviale d'après (A), et l'homologie est la même que celle de $S_{2n-1} \times S_{2n-3}$.

Dans le cas m quelconque, regardons la cohomologie et utilisons la structure multiplicative. On a alors par récurrence sur m , pour tout n :

PROPOSITION. - L'algèbre de cohomologie $H^*(V(n, m, C))$ est isomorphe à celle de $S_{2n-1} \times S_{2n-3} \times \dots \times S_{2n-2m+1}$: c'est l'algèbre extérieure d'un A -module libre dont la base se compose d'un élément dans chacune des dimensions impaires de $2n - 1$ à $2n - 2m + 1$.

Supposons ceci vrai pour m et démontrons-le pour $m + 1$, dans le cas $A = Z$. L'espace $V(n, m + 1, C)$ est fibré de fibre $V(n - 1, m, C)$ sur S_{2n-1} . Seule d_{2n-1}^2 pourrait ne pas être nulle, puisque $E_2^{p,q} = 0$ sauf pour $p = 0$ ou $2n - 1$; mais elle est nulle sur les générateurs de l'algèbre $E_2^{0,*} = H^*(F)$ qu'elle envoie dans des modules de $q < 0$. Puisque c'est une antidérivation, elle est nulle identiquement. E_∞ est bien du type annoncé. $H^p(X)$ est libre puisque son gradué associé l'est.

On peut relever les générateurs de $H^*(F)$ en des éléments homogènes de $H^*(X)$: ces éléments seront de carré nul puisque de dimension impaire dans une algèbre anticommutative sans élément d'ordre 2, et ils définiront un relèvement multiplicatif de $H^*(F)$ dans $H^*(X)$. On en déduit la proposition quand $A = Z$. Le cas de A quelconque s'y ramène en considérant l'application canonique :

$$H^*(X, Z) \rightarrow H^*(X, A) .$$

La différentielle d^r , transposée de d_r , est aussi nulle, et la suite spectrale d'homologie est aussi triviale.

On obtiendrait des résultats semblables, par la même méthode, en remplaçant le corps complexe \mathbb{C} par le corps des quaternions.

C. Variété de Stiefel réelle $V(n, 2, R)$. - Cette variété est fibrée sur S_{n-1} de fibre S_{n-2} . C'est justement le cas où la suite spectrale peut ne pas être triviale. Elle l'est cependant pour n pair : on peut alors, en effet, munir R^n d'une structure complexe, et, en associant à tout vecteur unitaire u le vecteur iu , on obtient une section du fibré. Dans ce cas B s'identifie à un rétracte de X , et $P_* : H_p(X) \rightarrow H_p(B)$ est surjective. Or son image n'est autre que $E_{p,0}^\infty$. On en déduit que $d_{p,0}^r = 0$ pour tout $r \geq 2$ et tout p . Ici, cela entraîne que la suite spectrale est triviale.

3. Utilisation des coins.

Trois exemples suffiront.

A. Fibré sur une variété.

PROPOSITION. - Considérons le cas où B est une variété compacte connexe de dimension p . Supposons de plus que B soit orientable ou que Λ soit de caractéristique 2. Si $H_j(F) = 0$ pour $j > q$, alors

- $H_n(X) = 0$ pour $n > p + q$
- $H_{p+q}(X) = H_q(F)$
- $H_{p+q-1}(X)$ contient $H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$ comme sous-module.

DEMONSTRATION. On a évidemment $E_{i,j}^2 = H_i(B, H_j(F)) = 0$ pour $j > q$; il en est de même pour $i > p + 1$ et aussi pour $i = p + 1$, puisque $\text{Tor}(H_p(B), H_j(F)) = 0$, $H_p(B)$ étant libre. On a donc $E_{i,j}^2 = 0$ pour $i + j > p + q$, d'où (a). D'autre part $H_{p-1}(B) = H^1(B) = \text{Hom } H_1(B), \Lambda$ est sans torsion, et $\text{Tor}(H_{p-1}(B), H_j(F)) = 0$, donc $E_{p,q}^2 = H_q(F)$. Les d^r qui arrivent en $E_{p,q}^r$ et $E_{p-1,q}^r$ ou qui en partent sont nulles, car elles viennent d'un module nul ou y vont. On a donc $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$; mais $E_{p,q}^\infty$ est le seul non nul de degré total $p + q$, donc $E_{p,q}^\infty = H_{p+q}(X)$, d'où (b). De même $E_{p-1,q}^\infty = E_{p-1,q}^2$; mais $E_{p-1,q}^\infty$ est le premier terme non nul du gradué associé à $H_{p+q-1}(X)$; c'en est donc un sous-module. Or $H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$ s'injecte dans $E_{p-1,q}^2$ d'où (c).

COROLLAIRE. - L'espace Ω des lacets d'une variété B connexe, compacte et simplement connexe de dimension $p > 0$ a une infinité de modules d'homologie non nuls.

Sinon il y aurait un plus grand q avec $H_q(\Omega) \neq 0$ et on aurait, X étant l'espace contractile des chemins d'origine b , $H_{p+q}(X) = H_q(\Omega) \neq 0$.

EXERCICE. - Si A est un corps, $H_i(B) = 0$ pour $i > p$, $H_j(F) = 0$ pour $j > q$, alors : $H_n(X) = 0$ pour $n > p + q$, $H_{p+q}(X) = H_p(B) \otimes H_q(F)$, $H_{p+q-1}(X) \supset H_{p-1}(B) \otimes H_q(F)$.

B. Homologie relative. - Soient $B' \subset B$, $X' = \bar{P}^1(B')$, et supposons F connexe.

PROPOSITION. - Si $H_i(B \text{ mod } B') = 0$ pour $i < p$ (ce qui implique B' non vide si $p > 0$), on a :

- $H_i(X \text{ mod } X') = 0$ pour $i < p$;
- $H_p(X \text{ mod } X') \rightarrow H_p(B \text{ mod } B')$ est un isomorphisme ;
- $P_* : H_{p+1}(X \text{ mod } X') \rightarrow H_{p+1}(B \text{ mod } B')$ est surjective (rappelons que le système local des groupes d'homotopie de la fibre est supposé constant).

DÉMONSTRATION. - On a encore $E_{i,j}^2 = 0$ pour $i < p$, d'où (a). Les d^r qui partent de $E_{p,0}^r$ et $E_{p+1,0}^r$ sont nulles ; on a donc $E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^2 = H_p(B \text{ mod } B')$, d'où (b) puisque $E_{p,0}^\infty$ est le seul terme non nul de son degré total. De même $E_{p+1,0}^\infty = E_{p+1,0}^2 = H_{p+1}(B \text{ mod } B')$, d'où (c) puisque $E_{p+1,0}^\infty$ est le dernier terme du gradué associé à $H_{p+1}(X)$.

C. Soit \mathcal{C} une classe de A -modules vérifiant les conditions suivantes :

c. 1° Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de A -modules,

$$M \in \mathcal{C} \iff (M' \in \mathcal{C} \text{ et } M'' \in \mathcal{C}) ;$$

c. 2° \mathcal{C} est stable pour \otimes et Tor .

EXEMPLES. - $A = \mathbb{Z}$, \mathcal{C} étant la classe des groupes abéliens finis ; A anneau principal, \mathcal{C} étant la classe des modules de type fini ; \mathcal{C} est la classe des modules admettant une famille de générateurs dont le cardinal est inférieur ou égal à un cardinal (infini) donné.

Disons qu'un espace E est de type \mathcal{C} si E est connexe, non vide, avec $H_n(E) \in \mathcal{C}$ pour tout $n > 0$.

PROPOSITION. - Si deux des espaces F , X , B sont de type \mathcal{C} , le troisième l'est aussi.

Tout d'abord il résulte de (c. 1°) que $H_n(X) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $E_{p,q}^\infty \in \mathcal{C}$ chaque fois que $p + q = n$.

Si les deux espaces de type \mathcal{C} sont B et F , chaque module $E_{p,q}^2$ est dans \mathcal{C} pour $p + q > 0$: cela résulte de la formule des coefficients universels pour $p > 0$, $q > 0$; si $q = 0$, $E_{p,0}^2 = H_p(B)$; si $p = 0$, $E_{0,q}^2 = H_q(F)$.

Alors $E_{p,q}^\infty$, quotient d'un sous-module de $E_{p,q}^2$, sera aussi dans \mathcal{C} pour $p + q > 0$. Si les deux espaces de type \mathcal{C} sont X et B , F est connexe, car le système local $\mathcal{K}_0(\mathcal{F})$ est constant et X connexe (On peut aussi regarder le coin $E_{0,0}$). Raisonnons par l'absurde : soit q le plus petit entier > 0 tel que $E_{0,q}^2 = H_q(F) \notin \mathcal{C}$; $E_{i,j}^2$ est dans \mathcal{C} pour $0 < j < q$ ou $i > 0$, $j = 0$, donc aussi $E_{i,j}^r$ pour tout r et les mêmes i, j ; $E_{0,q}^{r+1}$, quotient de $E_{0,q}^r$ par l'image d'un module de \mathcal{C} , refusera par récurrence sur r d'être dans \mathcal{C} , ainsi que $E_{0,q}^\infty = E_{0,q}^{q+2}$. Donc $H_q(X) \notin \mathcal{C}$, d'où contradiction.

En particulier, si B simplement connexe est de type \mathcal{C} , l'espace des lacets $\Omega(B)$ est de type \mathcal{C} .

Le cas où les espaces de type \mathcal{C} sont X et F est laissé au lecteur comme exercice. Quand X est simplement connexe, on peut aussi le ramener au cas précédent en utilisant la fibration de F' sur B de fibre $\Omega(B)$, F' se rétractant par déformation sur F .

EXERCICE. - Disons que E est de type \mathcal{C} jusqu'à n si E est connexe, non vide, avec $H_i(E) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i \leq n$. Si B et F (resp. X et F) sont de type \mathcal{C} jusqu'à n , alors X (resp. B) l'est aussi. Si B et X sont de type \mathcal{C} jusqu'à n , F l'est jusqu'à $n - 1$.

4. Transgression.

On appelle transgression la différentielle :

$$\theta = d_{r,0}^r : E_{r,0}^r \rightarrow E_{0,r-1}^r .$$

On a :

$$E_{r,0}^\infty = E_{r,0}^{r+1} = \text{Ker } \theta , \text{ et } E_{0,r-1}^\infty = E_{0,r-1}^{r+1} = \text{Coker } \theta ,$$

d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow E_{r,0}^{\infty} \rightarrow E_{r,0}^r \xrightarrow{\theta} E_{0,r-1}^r \rightarrow E_{0,r-1}^{\infty} .$$

PROPOSITION. - Si B et F sont connexes, et si $E_{p,q}^2 = 0$ pour $p > 0$, $q > 0$, $p + q = r$ ou $r - 1$, on a une suite exacte :

$$H_r(X) \rightarrow H_r(B) \xrightarrow{\theta} H_{r-1}(F) \rightarrow H_{r-1}(X) .$$

En effet les différentielles $d^{r'}$ qui partent de $E_{r,0}^{r'}$ ou arrivent en $E_{0,r-1}^{r'}$ sont nulles pour $r' < r$. On a donc

$$E_{r,0}^r = E_{r,0}^2 = H_r(B) ; \quad E_{0,r-1}^r = E_{0,r-1}^2 = H_{r-1}(F) ,$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_r(X) & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & E_{r,0}^{\infty} & \rightarrow & H_r(B) & \rightarrow & H_{r-1}(F) \rightarrow E_{0,r-1}^{\infty} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 0 & & & & H_{r-1}(X) \end{array}$$

C. Q. F. D.

Enonçons sans la démontrer, et en anticipant sur l'exposé 4, une propriété qui permet parfois de déterminer la transgression :

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Pi_r(B) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{r-1}(F) \\ \downarrow h_r & \searrow h'_r & \downarrow h_{r-1} \\ H_r(B) = E_{r,0}^2 & \xrightarrow{\theta} & E_{0,p-1}^2 = H_{r-1}(F) \\ & \searrow \theta & \downarrow \\ & & E_{0,p-1}^{\infty} \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

où ∂ est l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie du fibré, et h_r et h_{r-1} sont les homomorphismes de Hurewicz.

5. Trois suites exactes.

Si pour un certain n et un certain r , $E_{p,n-p}^r$ est nul sauf pour deux valeurs p' et p'' ($p' < p''$) de p , il en est de même de $E_{p,n-p}^\infty$, et le gradue associé à $H_n(X)$ n'a que deux termes non nuls : on a une suite exacte

$$0 \rightarrow E_{p',n-p'}^\infty \rightarrow H_n(X) \rightarrow E_{p'',n-p''}^\infty \rightarrow 0 .$$

En supposant B et F connexes, nous allons conclure dans les trois cas suivants.

A. PROPOSITION. - Supposons que

$$\begin{cases} H_i(B) = 0 & \text{pour } 0 < i < p , \\ H_j(F) = 0 & \text{pour } 0 < j < q . \end{cases}$$

Alors on a une suite exacte

$$\begin{aligned} H_{p+q-1}(F) \rightarrow H_{p+q-1}(X) \rightarrow H_{p+q-1}(B) \xrightarrow{\theta} H_{p+q-2}(F) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_2(B) \xrightarrow{\theta} H_1(F) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(B) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

De plus, dans le cas où $p = 1$ (donc sans aucune hypothèse sur les $H_i(B)$ pour $i > 0$), on a une suite exacte

$$H_{q+1}(X) \rightarrow H_{q+1}(B) \xrightarrow{\theta} H_q(F) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(B) \rightarrow 0$$

et des isomorphismes

$$H_n(X) \simeq H_n(B) \quad \text{pour } 0 < n < q .$$

DEMONSTRATION. - On a évidemment $E_{i,j}^2 = 0$ pour $i > 0$, $j > 0$, $i + j < p + q$. Pour $2 \leq n < p + q$, on a un diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(F) & & 0 & & & & \\
 " & & \downarrow & & & & \\
 E_{0,n}^2 & \longrightarrow & E_{0,n}^\infty & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_n(X) & & H_n(B) & \xrightarrow{\theta} & H_{n-1}(F) \\
 & & \downarrow & & " & & " \\
 0 & \longrightarrow & E_{n,0}^\infty & \longrightarrow & E_{n,0}^n & \xrightarrow{d^n} & E_{0,n-1}^n \longrightarrow E_{0,n-1}^\infty \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Le cas $n = 1$ se traite d'une manière évidente.

De plus, si $p = 1$, on a le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{q+1}(X) & & H_{q+1}(B) & \xrightarrow{\theta} & H_q(F) & & 0 \\
 \downarrow & & " & & " & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_{q+1,0}^\infty & \longrightarrow & E_{q+1,0}^{q+1} & \xrightarrow{d^{q+1}} & E_{0,q}^{q+1} \longrightarrow E_{0,q}^\infty \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 0 & & & & & & H_q(X)
 \end{array}$$

D'où les assertions de l'énoncé.

REMARQUE. - Pour $q = 1$, on obtient (sans hypothèse sur $H_1(B)$ ni sur $H_j(F)$ pour $i > 0$, $j > 0$) une suite exacte

$$H_2(X) \longrightarrow H_2(B) \xrightarrow{\theta} H_1(F) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(B) \longrightarrow 0$$

B. Suite exacte de Wang.

PROPOSITION. - Si la base B est une sphère S_k (quant à l'homologie à coefficients dans A), avec $k \geq 2$, on a une suite exacte illimitée

$$\dots \longrightarrow H_n(F) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-k}(F) \xrightarrow{\theta} H_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

Si de plus la fibre F_0 est un H -espace qui opère sur chaque fibre de X (et opère sur elle-même par translation à gauche), alors θ est, à un facteur ± 1 près, la multiplication (à droite) par un élément $g \in H_{k-1}(F)$.

DÉMONSTRATION. - On a $E_{i,j}^k = 0$ pour $i \neq 0, k$. D'où le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(F) & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & E_{0,n}^2 & \longrightarrow & E_{0,n}^\infty & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_n(X) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_{k,n-k}^\infty & \longrightarrow & E_{k,n-k}^k & \xrightarrow{d^k} & E_{0,n-1}^k & \longrightarrow & E_{0,n-1}^\infty & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & E_{k,n-k}^2 & & E_{0,n-1}^2 & & H_{n-1}(X) & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & H_k(B, H_{n-k}(F)) & & H_{n-1}(F) & & & &
 \end{array}$$

Il suffit de remarquer que $H_{n-k}(F) \approx H_k(B, H_{n-k}(F))$, ce qui est d'ailleurs nul pour $n < k$. Si en outre F_0 est un H-espace comme dans l'énoncé, et si ξ désigne le générateur de $H_k(B)$, l'isomorphisme précédent est celui qui associe à $h \in H_{n-k}(F)$ le produit $h \cdot \xi \in H_k(B, H_{n-k}(F))$; donc

$$\Theta(h) = d^k(h \cdot \xi) = (-1)^{n-k} h \cdot (d^k \xi),$$

et par suite Θ est, au facteur $(-1)^{n-k}$ près, la multiplication à droite par $g = d^k \xi \in H_{k-1}(F)$.

(N. B. - La notation $h \cdot \xi$ est celle explicitée dans l'Exposé 2, page 2-09, c.; page 2-09, a., il est entendu que les d^r sont L-linéaires au sens gradué, c'est-à-dire

$$d^r(\ell \cdot a) = (-1)^\lambda \ell \cdot (d^r a),$$

λ désignant le degré de ℓ .)

APPLICATION. - Soit $B = S_k$, $k > 1$, X l'espace des chemins d'origine b , $F = \Omega(S_k)$ l'espace des lacets. Comme $H_n(X) = 0$ sauf pour $n = 0$, la multiplication par g définit un isomorphisme $H_{n-k+1}(F) \longrightarrow H_n(F)$, sauf pour $n = 0$. Comme $H_n = 0$ pour $n < 0$, on en déduit que l'algèbre $H_*(F)$ est

l'algèbre des polynômes $A[g]$, où g est de degré $k-1$.

REMARQUE. - On a une suite exacte analogue en cohomologie ; θ est une dérivation ou une antidérivation suivant la parité de k , sans qu'il soit besoin de supposer que la fibre soit un H-espace. Lorsque $F = \Omega(S_k)$, on se gardera bien de croire que $H^*(F)$ soit une algèbre de polynômes à un générateur de degré $k-1$.

C. Suite exacte de Gysin.

PROPOSITION. - Si F est une sphère S_k (quant à l'homologie à coefficients dans A) et si $k \geq 1$, on a la suite exacte :

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(B) \xrightarrow{\theta} H_{n-k}(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(B) \longrightarrow \dots$$

En cohomologie, on a la suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^{n-k}(B) \xrightarrow{\theta'} H^{n+1}(B) \longrightarrow \dots$$

θ' est alors la multiplication par un élément g de $H^{k+1}(B)$, d'ordre 2 si k est pair, appelé classe caractéristique du fibré.

La démonstration de la suite exacte est analogue à celle de la suite exacte de Wang. Si ε est un générateur de $H^k(F)$, il définit un isomorphisme

$$H^i(B) \longrightarrow E_2^{i,k} \quad \text{par } h \longrightarrow \varepsilon.h$$

On a

$$\theta(h) = d(\varepsilon.h) = (d\varepsilon).h + (-1)^k \varepsilon.(dh)$$

Le deuxième terme est nul, d'où $\theta(h) = gh$.

Si k est pair, on a dans l'algèbre E_2 ,

$$0 = d(\varepsilon^2) = \varepsilon g + g\varepsilon = 2\varepsilon g, \quad \text{d'où } 2g = 0$$

EXEMPLE. - Soit B une variété compacte orientable de dimension $k \geq 2$, X l'espace des vecteurs non nuls tangents à B , et $A = \mathbb{Z}$; F se rétracte par déformation sur S_{k-1} . La seule différentielle d^r qui puisse être non nulle est $d^k : H_k(B) \rightarrow H_{k-1}(F)$. Si k est impair, la transposée d_k de d^k est nulle car $H^k(B) = \mathbb{Z}$ ne contient pas d'élément d'ordre 2, donc d_k est nulle et la suite spectrale est triviale. On peut d'ailleurs voir dans ce cas, en triangulant B et en utilisant la théorie des obstructions, que X admet une section.