Séminaire Henri Cartan

Ichiro Satake

# L'opérateur Φ

*Séminaire Henri Cartan*, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 14, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A5_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# L'OPÉRATEUR $\Phi$,

par Ichiro SATAKE.

L'opérateur $\Phi$ a été plusieurs fois l'objet de notre considération (Exposé 4 , n° 5 ; Exposé 7 , n° 2 , n° 4 ; Exposé 8 , n° 1) ; mais il y a encore lieu de le compléter, parce que jusqu'ici nous nous sommes limité en principe à la considération des formes modulaires (i.e. formes automorphes relatives à $\Gamma = SL(n , Z)$ définies globalement, c'est-à-dire dans $\mathfrak{S}_n$ tout entier) ; dans cet exposé on se propose de la généraliser au cas des formes automorphes locales relatives à un groupe commensurable quelconque.

On utilisera dans ce qui suit les abréviations que voici :

$$\mathfrak{E}(X) = \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(X)) ,$$

$$Y[U] = {}^t U \, Y \, U ,$$

où $X$ , $Y$ sont des matrices carrées et $U$ une matrice quelconque telle que ${}^t U \, Y \, U$ ait un sens.

## 1. Le développement en série de Fourier des formes automorphes locales.

Soient $\Gamma'$ un groupe commensurable au groupe modulaire, $\rho$ une représentation holomorphe irréductible de $GL(n , \underset{\sim}{C})$ dans un espace vectoriel complexe $F_\rho$ de dimension finie et $\mu$ un multiplicateur de $\Gamma'$ (i.e. une représentation de $\Gamma'$ dans un espace $F_\mu$ de dimension finie, représentation dont le noyau est supposé d'indice fini dans $\Gamma'$ ) ; soit de plus $U_n$ un ouvert $\Gamma'$-saturé dans $\mathfrak{S}_n$ .

On appelle $f$ une forme automorphe locale d'espèce $(\mu , \rho)$ pour $\Gamma'$ dans $U_n$ , si $f$ est une fonction holomorphe définie dans $U_n$ , à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ , vérifiant la condition

$$f(M.Z) = \rho(CZ + D) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \tag{1.1}$$

pour toute $M \in \Gamma'$ ; on désigne par $\mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu , \rho)$ l'espace vectoriel formé de toutes ces fonctions.

Soit $U$ un ouvert $\Gamma'$-saturé dans $\mathfrak{S}_n^*$ et soient

$$U_r = U \cap \mathfrak{S}_r , \quad \Gamma'_r = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n) \quad (0 \leqslant r \leqslant n) ;$$

alors il est clair que $U_r$ est $\Gamma'_r$-saturé ( on notera que, pour $U_n$ donné, il y a un plus grand ouvert $U$ dans $\mathfrak{S}_n^*$ tel que $U \cap \mathfrak{S}_n = U_n$ , et que cet $U$ ost $\Gamma'$-saturé) ; on se propose de définir un opérateur $\Phi_r^n$ pour $r < n$ tel que $U_r \neq \emptyset$ , qui applique $\mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ dans $\mathfrak{H}_{\Gamma'_r, U_r}(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$ , où $\rho^{(r)}$ est une représentation de $GL(r, \mathbb{C})$ déjà définie (voir n° 2), et où $\mu^{(r)}$ est un multiplicateur de $\Gamma'_r$ que l'on définira plus tard.

Soit $Z_0 \in U_r$ ; il est clair que $Z_0$ possède un voisinage $U'$ , contenu dans $U$ , au sens de $\mathfrak{C}_0^{\Gamma}$ , tel que $U' \cap U_n$ soit stable par toutes les translations de la forme

$$Z \longrightarrow Z + T , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^t T_{12} & T_2 \end{pmatrix} , \quad T_2 = {}^t T_2 , \ T_{12} , \ T_2 \text{ : réelles.}$$

(prendre, par exemple, $U' = \bigcup_{r \leq s \leq n} \Gamma V^{(s)}(U'_r , K)$) . D'autre part, on a

$$\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \supset \Gamma'_{Z_0} \supset \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$$

et ce dernier, étant commensurable à $\Gamma \cap \mathfrak{N}_r^n$ , contient toutes les transformations de la forme suivante

(i) $$Z \longrightarrow Z[U] , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} , \quad U_2 \in \gamma'_{n-r} ,$$

($\gamma'_{n-r}$ : un sous-groupe d'indice fini de $\gamma_{n-r} = SL(n - r , \mathbb{Z})$)

(ii) $$Z \longrightarrow Z[U] , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} , \quad U_{12} \equiv 0 \pmod{q} ,$$

(q : un entier positif)

(iii) $$Z \longrightarrow Z + T , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^t T_{12} & T_2 \end{pmatrix} , \quad T_2 = {}^t T_2 , \ T_{12} , \ T_2 \equiv 0 \pmod{q} ;$$

on peut supposer de plus que la représentation $\mu$ est triviale pour toutes ces transformations.

Soit $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma, U_n}(\mu, \rho)$ . Alors d'après (1.1) on a , en particulier,

$$f(Z + T) = f(Z)$$

pour toutes les translations (iii) ; de sorte que $f(Z)$ possède des développements

en série de Fourier dans $U' \cap U_n$ comme suit :

$$(1.2) \qquad f(Z) = \sum_{S_2} a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \; \mathcal{E}(S_2 Z_2) \; ,$$

$$(1.2)' \qquad f(Z) = \sum_{S_2, S_{12}} b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \; \mathcal{E}({}^t S_{12} Z_{12} + S_2 Z_2) \; ,$$

où les sommations sont étendues à toutes les matrices $S_2$ ou $(S_2 , S_{12})$ dont les coefficients sont dans $\frac{1}{q}\mathfrak{Z}$, et où $a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})$ , $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ sont des fonctions holomorphes de $(Z_1 , Z_{12})$ ou de $Z_1$ telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^t Z_{12} & Z_2 \end{pmatrix} \in U' \cap U_n$ (Exposé 4 , n° 2) ; ces séries convergent normalement sur tout compact dans $U' \cap U_n$ .

Cela posé, on va étudier les propriétés des coefficients $a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})$ , $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ de ces développements. D'abord on se donne une transformation de $\Gamma'' \cap \mathfrak{N}_r^n$ :

$$M : Z \longrightarrow Z[U] + T \; , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^t T_{12} & T_2 \end{pmatrix} \; ,$$

ou plus précisément

$$\begin{cases} Z_1 \longrightarrow Z_1 \\ Z_{12} \longrightarrow Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12} \\ Z_2 \longrightarrow Z_2 [U_2] + {}^t U_{12} Z_{12} U_2 + {}^t U_2 \, {}^t Z_{12} U_{12} + Z_1 [U_{12}] + T_2 \; ; \end{cases}$$

alors pour cette transformation la relation (1.1) s'écrit

$$(1.3) \qquad f(Z[U] + T) = \rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu\left( \begin{pmatrix} {}^t U & T U^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} \; ,$$

et par suite (pour $Z$ suffisamment voisin de $Z_o$)

$$\sum a_{S_2}(Z_1 , Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12}) \; \mathcal{E}(S_2(Z_2 [U_2] + 2\,{}^t U_{12} Z_{12} U_2 + Z_1 [U_{12}] + T_2))$$
$$= \sum \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \; \mathcal{E}(S_2 Z_2) \; ,$$

$$\sum b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon({}^tS_{12}(Z_{12}\,U_2 + Z_1\,U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_2\,[U_2] + 2\,{}^tU_{12}\,Z_{12}\,U_2 + Z_1\,[U_{12}] + T_2))$$

$$= \sum \rho(U)^{-1} \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}\,\varepsilon({}^tS_{12}\,Z_{12} + S_2\,Z_2)\ ,$$

d'où l'on déduit

$$(1.4)\qquad \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1\ ,\ Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1}$$

$$= a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}\,U_2 + Z_1\,U_{12} + T_{12})\,\varepsilon(S_2(Z_1\,[U_{12}] + 2\,{}^tU_{12}Z_{12}U_2 + T_2))$$

$$(1.4)'\qquad \rho(U)^{-1} \circ b_{S_2[{}^tU_2],\ S_{12}{}^tU_2 + 2U_{12}S_2{}^tU_2}(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}$$

$$= b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon({}^tS_{12}(Z_1\,U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_1\,[U_{12}] + T_2))$$

et, en particulier, pour les transformations (i), (ii), (iii) les relations suivantes

$$(1.5)\qquad a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1\ ,\ Z_{12}) = \rho(U) \circ a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}\,U_2)\ ,$$

$$(1.6)\qquad a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12} + Z_1\,U_{12}) = \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})\,\varepsilon(-\,S_2(Z_1\,[U_{12}] + 2\,{}^tU_{12}Z_{12}))\ ,$$

$$(1.7)\qquad a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12} + T_{12}) = a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})\ ,$$

ou

$$(1.5)'\qquad b_{S_2[{}^tU_2],\ S_{12}{}^tU_2}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\ ,$$

$$(1.6)'\qquad b_{S_2,S_{12}+2U_{12}S_2}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon(S_2\,Z_1\,[U_{12}] + {}^tS_{12}\,Z_1\,U_{12})\ .$$

On dit que $S_{12}$ est un <u>multiple rationnel</u> de $S_2$ s'il existe une matrice rationnelle $W$ de type $(r\ ,\ n - r)$ telle que $S_{12} = W\,S_2$. Alors une conséquence importante de ces relations et de la convergence des séries ci-dessus est la suivante :

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $n \geqslant 2$ , <u>les coefficients</u> $a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})$ <u>du développement</u> (1.2) <u>sont identiquement nuls lorsque</u> $S_2$ <u>n'est pas</u> $\neq 0$ ; <u>les coefficients</u> $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ <u>du développement</u> (1.2)' <u>sont identiquement nuls lorsque</u> $S_2$ <u>n'est</u>

pas $\geqslant 0$ ou $S_{12}$ n'est pas un multiple rationnel de $S_2$ .

Si $r = 0$ la deuxième assertion du théorème n'a pas de sens et, d'autre part, les relations (1.5)-(1.7) se réduisent à la seule relation

$$a_{S_2[{}^t U_2]} = \rho(U)\, a_{S_2} \quad ;$$

ce cas n'est autre que le théorème de Koecher (Exposé 4 , n° 3 , Théorème 1 ; il faut le généraliser d'une façon évidente).

Soit donc $r > 0$ et supposons que $b_{S_2,S_{12}}(Z)$ ne soit pas identiquement nul. Si $U_{12}\, S_2 = 0$ , (1.6)' s'écrit

$$b_{S_2,S_{12}}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\, \varepsilon({}^t S_{12}\, Z_1\, U_{12}) \ ,$$

ce qui exprime que $\varepsilon(-\,{}^t S_{12}\, Z_1\, U_{12})$ est une valeur propre de $\rho(U)$ ; mais comme les valeurs propres sont en nombre fini et que $Z_1$ peut parcourir un ouvert dans $\mathfrak{Z}_r$ , on a nécessairement $U_{12}\, {}^t S_{12} = 0$ , d'où résulte que $S_{12}$ est un multiple rationnel de $S_2$ .

Or, en posant $U_{12} = qU'_{12}$ , on a d'après (1.6)'

$$a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) = \sum_{\substack{S_{12} \\ \bmod\{2qU'_{12}S_2\}}} \sum_{U'_{12} \bmod Z^{r(n-r)}(S_2)} b_{S_2,S_{12}+2qU'_{12}S_2}(Z_1)\, \varepsilon({}^t S_{12} Z_{12} + 2q S_2\, {}^t U'_{12} Z_{12})$$

$$= \sum_{S_{12}} \sum_{U'_{12}} \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\, \varepsilon(q^2\, S_2\, Z_1[U'_{12}]$$

$$+ q\, {}^t S_{12}\, Z_1\, U'_{12} + 2q\, S_2\, {}^t U'_{12}\, Z_{12} + {}^t S_{12}\, Z_{12}) \ ;$$

$Z^{r(n-r)}(S_2)$ désignant l'ensemble des $U'_{12}$ telles que $U'_{12}\, S_2 = 0$ ; donc, si $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ n'est pas identiquement nul, le sous-espace de $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ formé des éléments $b$ tels que

$$\sum_{U'_{12}} \rho(U)\, \varepsilon(q^2\, S_2\, Z_1\, [U'_{12}] + q({}^t S_{12}\, Z_1 + 2 S_2\, {}^t Z_{12}) U'_{12})\, b$$

soit convergente pour une $Z_1 \in U_r$ donnée et pour toutes les $Z_{12}$ n'est pas $\neq \{0\}$ ; comme ce dernier est un sous-espace invariant par rapport à la

représentation $\rho\left(\begin{pmatrix} E & qU'_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}\right)$ du groupe abélien $\{U'_{12}\}$, on en conclut, en considérant un vecteur propre de cette représentation, la convergence de la série

$$\sum_{U'_{12}} | \varepsilon(q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] + q({}^t S_{12} Z_1 + 2 S_2 {}^t Z_{12}) U'_{12})| \quad ;$$

Or il existe une matrice rationnelle non-singulière $P$ telle que

$S_2 = P \begin{pmatrix} S_2^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P$, $S_{12} = (S_{12}^\circ \; 0) {}^t P$, où $S_2^\circ$ est une matrice non-singulière de degré $t \leq n - r$ et $S_{12}^\circ$ est une matrice de type $(r , t)$ ; alors la sommation ci-dessus s'étend à toutes les matrices entières $U'_{12}$ modulo le sous-groupe formé des $U'_{12}$ telles que $U'_{12} P = (\overbrace{0}^{t}, *)$ ; donc elle contient la sommation étendue à toutes les matrices $U'_{12}$ telles que $qU'_{12} P = (q'U''_{12} \; 0)$, où $U''_{12}$ est une matrice entière de type $(r , t)$, et $q'$ est un entier positif ; posons de plus $Z_{12} P = (Z_{12}^\circ , *)$ avec $Z_{12}^\circ$ de type $(r , t)$ ; alors la série ci-dessus s'écrit

$$\sum_{U''_{12}} | \varepsilon(q^{12} S_2^\circ Z_1 [U''_{12}] + q'({}^t S_{12}^\circ Z_1 + 2 S_2^\circ {}^t Z_{12}^\circ) U''_{12})| < \infty ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices entières $U''_{12}$ de type $(r , t)$, d'où résulte immédiatement que $S_2^\circ \gg 0$ .

Si $n = 1$, $r = 0$, la conclusion du théorème est évidemment fausse ; dans ce cas on <u>suppose</u> cette propriété, i.e. on suppose que $f$ possède un développement de Fourier de la forme

$$f(Z) = \sum_{s \geqslant 0} a_s \varepsilon(sz) \quad ;$$

cette hypothèse est, comme on sait, équivalente à dire que $f$ est bornée dans un voisinage (au sens de $\mathfrak{G}_0^{\Gamma}$) du point à l'infini ; on appelle une telle $f$ une forme automorphe locale <u>bornée</u>.

REMARQUE. - Soit $S_2$ une matrice $\geqslant 0$ de degré $n - r$ dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q} \underset{\sim}{\sim} Z$ ; désignons par $\{S_2\}_q$ l'ensemble des matrices $S_{12}$ qui sont des multiples rationnels de $S_2$ et dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q} \underset{\sim}{\sim} Z$, et par $\{\{S\}\}_q$ l'ensemble des matrices $S_{12}$ de la forme $2q\, U'_{12} S_2$ avec des matrices entières $U'_{12}$ ; alors il est clair que $\{\{S_2\}\}_q$ est un sous-groupe <u>d'indice fini</u> du groupe additif $\{S_2\}_q$ . Or il est facile de voir que

si $S_{12}$ est un multiple rationnel de $S_2$ la série

$$(1.8)\quad \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1 , Z_{12}) = \sum_{U'_{12}:Z^{r(n-r)}/Z^{r(n-r)}(S_2)} \rho\begin{pmatrix} E & qU'_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} (q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] + q({}^tS_{12} Z_1 + 2S_2\, {}^tZ_{12})U'_{12})$$

est convergente, et que $a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})$ est une combinaison linéaire de celles-là de la forme suivante

$$a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) = \sum_{S_{12}:\{S_2\}_q/\{\{S_2\}\}_1} \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1 , Z_{12}) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\, \varepsilon({}^tS_{12} Z_{12}) ;$$

d'autre part, vu (1.5), $f(Z)$ est une combinaison linéaire de

$$\sum_{{}^tU_2 : {}^t\gamma'(S_2)\backslash {}^t\gamma'} a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1 , Z_{12})\, \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2])$$

$$= \sum \rho\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} a_{S_2}(Z_1 , Z_{12} U_2)\, \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2]) ,$$

${}^t\gamma'(S_2)$ désignant le groupe des unités de $S_2$ dans ${}^t\gamma'$ , i.e.

${}^t\gamma'(S_2) = \{{}^tU_2 ; U_2 \in \gamma' = \gamma'_{n-r} , S_2[{}^tU_2] = S_2\}$ ; comme ce dernier s'écrit

$$\sum_{U_2} \sum_{S_{12}} \rho\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1 , Z_{12} U_2) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\, \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2] + {}^tS_{12} Z_{12} U_2),$$

$f(Z)$ est une combinaison linéaire avec coefficients $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ des séries "thêta"

$$\Theta^{(\rho)}_{\gamma';q;S_2,S_{12}}(Z) = \sum_{U_2} \rho\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \Theta_{q;S_2,S_{12}}(Z_1 , Z_{12} U_2)\, \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2] + {}^tS_{12} Z_{12} U_2)$$

$$= \sum_{U_2, U_{12}} \rho\begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \varepsilon(S_2 Z_1 [U_{12}] + ({}^tS_{12} Z_1 + 2S_2\, {}^tU_2\, {}^tZ_{12})U_{12} +$$

$$(1.9) \qquad + S_2 Z_2 [U_2] + {}^tS_{12} Z_{12} U_2)$$

$$= \sum_{U_2 : {}^t\gamma(S_2)\backslash {}^t\gamma'} \sum_{U_{12}:qZ^{r(n-r)}/qZ^{r(n-r)}(S_2)} \rho\begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \varepsilon(S_2 Z \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{bmatrix} + ({}^tS_{12}, 0)\, Z \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{pmatrix}),$$

où $S_2 \geq 0$ est pris modulo ${}^t\gamma'$ et $S_{12} \in \{S_2\}_q$ modulo $\{\{S_2\}\}_q$ ; la convergence de cette série est facile à voir.

2. Définition de l'opérateur $\Phi_r^n$ .

Les notations étant comme ci-dessus, le théorème 1 affirme en particulier que $a_o(Z_1 , Z_{12}) = b_{oo}(Z_1)$ ne dépend que de $Z_1$ ; c'est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de $Z_o$ ; en faisant varier $Z_o$ dans $U_r$ , on obtient une fonction holomorphe définie dans $U_r$ ; on la note $f_r = \Phi_r^n f$ :

$$(2.1) \qquad f_r(Z_1) = (\Phi_r^n f)(Z_1) = a_o(Z_1 , Z_{12}) = b_{oo}(Z_1) \ ;$$

considérons maintenant les propriétés de cette fonction.

On déduit d'abord de (1.5), (1.6)

$$(2.2) \quad \rho(U) \circ f_r(Z_1) = f_r(Z_1) \quad \text{pour} \quad U = \begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} , \ U_2 \in \gamma' , \ U_{12} \equiv 0 \ (q) ,$$

d'où résulte, par le raisonnement de l'Exposé 7 , p. 14-17 , que

$$(2.3) \qquad f_r(Z_1) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho^{(r)}) ,$$

où

$$(2.4) \qquad f_\rho^{(r)} = F_{\rho(r)} = \Big\{ \alpha \ ; \ \alpha \in F_\rho , \ \rho(g)\alpha = \alpha$$
$$\text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} E_r & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} , \ g_2 \in SL(n - r , \mathbb{C}) \Big\} \ ;$$

$$(2.5) \qquad \rho^{(r)}(g_1) = \text{restriction de} \ \rho\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}\right) \text{ à } F_\rho^{(r)} .$$

On sait que $F_\rho^{(r)} \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ , et qu'alors $\rho^{(r)}$ est une représentation holomorphe irréductible de $GL(r , \mathbb{C})$ dans $F_\rho^{(r)}$ , dont les exposants du plus haut poids sont $\alpha_1 , \ldots , \alpha_{r-1} , \alpha_r + \alpha_n$ ; en outre on a la relation

$$(2.6) \qquad \rho\left(\begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\right)\alpha = \rho^{(r)}(g_1) \det(g_2)^{\alpha_n} \alpha , \ \text{pour} \ \alpha \in F_\rho^{(r)} .$$

Cela dit, on va montrer que $f_r$ est une forme automorphe locale d'espèce $(\mu^{(r)} , \rho^{(r)})$ pour $\Gamma'_r = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{C}_r^n)$ dans $U_r$ ; ce fait se démontre par l'un

ou l'autre des raisonnements de l'Exposé 4 , n° 5 , théorème 3 , et de l'Exposé 8 , p. 4-6 ; mais on peut encore le démontrer de la manière suivante.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \ ;$$

on note que $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma'_r$ et que $A_2 = {}^t D_2^{-1}$ ; par un calcul de matrices on constate facilement que

$$MZ = \begin{pmatrix} M_1 Z_1 & (\text{fonction de } Z_1 , Z_{12}) \\ & Z_2 [D_2^{-1}] + (\text{fonction de } Z_1 , Z_{12}) \end{pmatrix} .$$

Or si $Z \in U_n$ est voisine de $Z_o \in U_r$ , $MZ$ est voisine de $M_1 Z_o \in U_r$ ; donc on a

$$\begin{aligned} f(MZ) &= \sum a_{S_2}(M_1 Z_1 , \dots ) \varepsilon(S_2(Z_2 [D_2^{-1}] + \dots )) \\ &= \rho\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \\ &= \sum \rho\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \circ a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \varepsilon(S_2 Z_2) , \end{aligned}$$

d'où

$$a_{S_2}(M_1 Z_1 , \dots ) \varepsilon(S_2(\dots)) = \rho\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \circ a_{S_2[A_2]}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1}$$

et en particulier

$$(2.7) \qquad f_r(M_1 Z_1) = \rho\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \circ f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1} \ ;$$

mais comme $f_r(Z_1) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho^{(r)})$ , on a d'après (2.6)

$$\rho\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \circ f_r(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ \det(D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1) ,$$

en sorte que $\det(D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}$ ne dépend que de $M_1 = \varpi_r(M)$ .

Or si l'on désigne par $N_\mu^{(r)}$ le sous-espace de $F_\mu$ engendré par

$$\det(D_2)^{-\alpha_n}\mu(M)\,x - x \ ; \ x \in F_\mu \ , \ M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n \ ,$$

l'endomorphisme $\det(D_2)^{-\alpha_n}\mu(M)$ $(M \in \Gamma' \cap \mathfrak{C}_r^n)$ laisse $N_\mu^{(r)}$ invariant et l'endomorphisme induit par celui-ci dans $F_{\mu(r)} = F_\mu / N_\mu^{(r)}$ ne dépend que de $M_1 = \varpi_r(M)$ ; on obtient ainsi une représentation de $\Gamma_r'$ dans $F_{\mu(r)}$ qui est évidemment un multiplicateur de $\Gamma_r'$ ; on le désigne par $\mu^{(r)}$ :

(2.8) $\mu^{(r)}(M_1)$ = l'endomorphisme induit par $\det(D_2)^{-\alpha_n}\mu(M)$ dans $F_{\mu(r)} = F_\mu / N_\mu^{(r)}$ .

Alors $f_r(Z_1)$ peut être considéré comme un élément de $\mathrm{Hom}(F_{\mu(r)}, F_{\rho(r)})$ et (2.7) s'écrit

$$f_r(M_1 Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ f_r(Z_1) \circ \mu^{(r)}(M_1)^{-1} \ , \tag{2.9}$$

ce qui prouve notre assertion.

On notera que

$$\det(D_2) = \pm 1 \quad \text{pour} \quad M \in \Gamma' \cap \mathfrak{C}_r^n \ . \tag{2.10}$$

En effet, pour $M \in \Gamma \cap \mathfrak{C}_r^n$ , $D_2$ est unimodulaire et donc $\det(D_2) = \pm 1$ ; par suite la représentation $\Gamma' \cap \mathfrak{C}_r^n \ni M \longrightarrow \det(D_2)$ est essentiellement une représentation du groupe fini dans le groupe multiplicatif de $\underset{\sim}{R}$ ; donc l'image de cette représentation est dans $\{\pm 1\}$ .

Considérons le cas particulier où le multiplicateur $\mu$ est trivial ; alors $F_\mu = \underset{\sim}{C}$ ; si $\det(D_2)^{\alpha_n} = 1$ pour toute $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$ on a $N_\mu^{(r)} = \{0\}$, $F_{\mu(r)} = \underset{\sim}{C}$ et le multiplicateur $\mu^{(r)}$ est encore trivial ; mais s'il existe une $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$ telle que $\det(D_2)^{\alpha_n} = -1$ , alors on a $N_\mu^{(r)} = \underset{\sim}{C}$ , $F_{\mu(r)} = \{0\}$ , de sorte que $\Phi_r^n f = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ . Par exemple, si $\Gamma' = \Gamma$ et si $\alpha_n$ est impaire, on a toujours $\Phi_r^n f = 0$ pour tout $r < n$ .

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - *Soit* $U$ *un ouvert* $\Gamma'$*-saturé dans* $\mathfrak{S}_n^*$ *et soit* $U_r = U \cap \mathfrak{S}_r$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ . *Si* $U_r \neq \emptyset$ *et* $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ *(supposé bornée au cas où* $n = 1$ , $r = 0$*) , on a* $f_r = \Phi_r^n f \in \mathfrak{H}_{\Gamma_r', U_r}(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$ , *où* $\rho^{(r)}$ *est une représentation holomorphe irréductible de* $GL(r, \underset{\sim}{C})$ *définie par (2.5), et* $\mu^{(r)}$ *est un multiplicateur de* $\Gamma_r' = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{C}_r^n)$ *défini par* (2.8).

3. Propriétés de l'opérateur $\Phi_r^n$ .

Continuité de $\Phi_r^n$ : Soit $W$ un compact dans l'espace de $(Z_1 , Z_{12})$ (i.e. dans $\mathcal{S}_r \times \mathcal{C}^{r(n-r)}$) et soit $c > 0$ ; on désigne par $V(W , c)$ l'ensemble des $Z \in \mathcal{Z}_n$ telles que

$$(Z_1 , Z_{12}) \in W , \quad Y_2 \geqslant cE \quad ; \tag{3.1}$$

alors on a le lemme suivant (cf. Exposé 4 , n° 4 , Proposition 1) :

LEMME 1. - Si $V(W , c) \subset U_n$ et si $f \in \mathcal{H}_{r,U_n}(\mu, \rho)$ (bornée dans le cas $n = 1$ , $r = 0$), le développement de Fourier (1.2) de $f$ converge normalement dans $V(W , c)$ .

C'est une conséquence immédiate du fait que pour $Z \in V(W , c)$ on a

$$\| a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})\, \varepsilon(S_2\, Z_2) \| \leqslant \| a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})\, \varepsilon(S_2\, icE) \|$$

et que la série (1.2) converge normalement dans l'ensemble compact formé des $Z \in \mathcal{Z}_n$ telles que

$$(Z_1 , Z_{12}) \in W , \quad Z = icE .$$

Il résulte de là que la limite de la série (1.2) peut se calculer terme à terme. Par conséquent, si $\{ Z_\nu \} \subset V(W , c)$ est une suite telle que

$$Z_{\nu,1} \longrightarrow Z_o \in U_r , \quad Y_{\nu,2} \longrightarrow \infty , \tag{3.2}$$

alors on a

$$\lim_{\nu \to \infty} f(Z_\nu) = f_r(Z_o) \tag{3.3}$$

(où l'on considère $f_r(Z_o)$ comme un élément de $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$) , puisqu'on a visiblement

$$a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})\, \varepsilon(S_2\, Z_2) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } S_2 \neq 0 , \\ f_r(Z_o) & \text{si } S_2 = 0 , \end{cases}$$

(cf. Exposé 4 , n° 5 , Théorème 2).

Soit maintenant $\{ Z_\nu \} \subset U_n$ une suite contenue dans la réunion $\bigcup_i M_i\, \bar{\Omega}_n$ d'un nombre fini des transformés de $\bar{\Omega}_n$ (par $\Gamma$) , et convergente vers $Z_o \in U_r$

au sens de n'importe quelle topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° ; alors il est clair que la condition (3.2) est remplie et par suite, on a (3.3) ; on a ainsi établi la continuité de $\Phi_r^n$ dans $\bigcup_i M_i \Omega_n^*$ .

Si de plus la représentation $\rho$ est de dimension 1 , on peut démontrer la continuité de $\Phi_r^n$ au sens de $\mathfrak{C}_o^\Gamma$ ; cela veut dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\tilde{U}'$ de $Z_o$ au sens de $\mathfrak{C}_o^\Gamma$ tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_o)\| < \varepsilon$ pour toute $Z \in \tilde{U}' \cap U_n$ . En effet, soit $Z_o \in \Omega_r$ et soit $\tilde{U}' = \Gamma_{Z_o} U'$ , où $U'$ est un voisinage de $Z_o$ dans $\Omega_n^*$ ; il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_{Z_o}$ tels que $\Gamma_{Z_o} = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n) M_i$ ; d'après ce qui précède on peut prendre, pour $\varepsilon$ donné, $U'$ tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_o)\| < \varepsilon$ pour $Z \in \bigcup_i M_i U' \cap U_n$ ; or chaque $Z \in \tilde{U}' = \Gamma_{Z_o} U'$ s'écrit $Z' = MZ$ , $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$ , $Z \in \bigcup_i M_i U'$ ; donc d'après (1.3), (1.4) on a

$$\begin{aligned} \|f(Z') - f_r(Z_o)\| &= \|\rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} - f_r(Z_o)\| \\ &= \|f(Z) - \rho(U) \circ f_r(Z_o) \circ \mu(M)\| \\ &= \|f(Z) - f_r(Z_o)\| \end{aligned}$$

puisque $\mu(M)$ est unitaire et que $\rho(U) = \det(U)^{\alpha_n} = \pm 1$ .

Transitivité de $\Phi_r^n$ : Soit $s < r < n$ et $U_s \neq \emptyset$ ; alors il est facile de voir, soit par la comparaison des coefficients des séries de Fourier, soit par la continuité ci-dessus, la relation

$$\Phi_s^r(\Phi_r^n f) = \Phi_s^n f \tag{3.4}$$

pour $f \in \mathcal{F}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ , où l'on considère $\Phi_r^n f$ , ... , comme des fonctions à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ . (Si $r = 1$ , $s = 0$ , $\Phi_1^n f$ est nécessairement bornée.)

On a d'ailleurs les relations suivantes :

$$(\Gamma_r')_s \subset \Gamma_s' \tag{3.5}$$

(3.6) $(F_\rho^{(r)})^{(s)} \supset F_\rho^{(s)}$ , $\rho^{(s)}$ = restriction de $(\rho^{(r)})^{(s)}$ à $F_\rho^{(s)}$
($(\rho^{(r)})^{(s)}$ étant irréductible, on a $(F_\rho^{(r)})^{(s)} = F_\rho^{(s)}$ , sauf dans le cas où $(F_\rho^{(r)})^{(s)} \neq \{0\}$ , $F_\rho^{(s)} = \{0\}$ , i.e. le cas où $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_{r-1} = 0$ , $\alpha_r \neq 0$ , $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$)

(3.7) $\quad N^{(s)}_{\mu^{(r)}} \subset N^{(s)}_{\mu}/N^{(r)}_{\mu}$ , de sorte qu'il existe une projection canonique

$$p : F_{(\mu^{(r)})^{(s)}} = F_{\mu^{(r)}}/N^{(s)}_{\mu^{(r)}} \longrightarrow F_{\mu^{(s)}} = F_{\mu}/N^{(s)}_{\mu} .$$

En tenant compte de ces situations, la transitivité (3.4) signifie, plus précisément, la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F_{(\mu^{(r)})^{(s)}} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "(\Phi^r_s(\Phi^n_r f))(Z^{(s)})"'] & F_{\mu^{(s)}} \arrow[d, "(\Phi^n_s f)(Z^{(s)})"] \\
F_{(\rho^{(r)})^{(s)}} \arrow[r, phantom, "\supset"] & F_{\rho^{(s)}}
\end{tikzcd}$$

Si l'on écrit $\Phi$ au lieu de $\Phi^n_{n-1}$ (ce qui est la définition originale de $\Phi$), on peut écrire $\Phi^{n-r}$ au lieu de $\Phi^n_r$ .

4. Définition de l'opération $\Phi^n_r(f|M)$ .

Pour compléter la définition de $\Phi$ dans le cas d'un groupe commensurable au groupe modulaire, il faut encore définir l'opérateur $\Phi^n_r(f|M)$ pour $M \in \widetilde{\Gamma}$, qui applique $\mathcal{F}_{\Gamma',U_n}(\mu, \rho)$ dans $\mathcal{F}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{S}^n_r), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu^{(r)}_M , \rho^{(r)})$ , où $\mu^{(r)}_M$ est un multiplicateur de $\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{S}^n_r)$ défini ci-dessous.

Pour cela, attachons à chaque $M \in \widetilde{\Gamma}$ un espace vectoriel $F_{\mu_M}$ et un isomorphisme

(4.1) $$\sigma_M : F_{\mu_M} \longrightarrow F_{\mu} ;$$

on peut définir alors un multiplicateur $\mu_M$ de $M^{-1}\Gamma' M$ dans $F_{\mu_M}$ par

(4.2) $$\mu_M(M^{-1} M'M) = \sigma_M^{-1} \circ \mu(M') \circ \sigma_M \quad (M' \in \Gamma') ;$$

on suppose qu'on a

(4.3) $$\sigma_{M'M} = \mu(M') \circ \sigma_M \qquad \text{pour } M' \in \Gamma' ,$$

ce qui implique que l'espace vectoriel $F_{\mu_M}$ et le multiplicateur $\mu_M$ ci-dessus ne dépendent que de la classe de $M$ modulo à gauche $\Gamma'$ .

On pose

(4.4) $$(f|M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \circ \sigma_M$$

pour $f \in \mathcal{F}_{\Gamma',U_n}(\mu , \rho)$ ; alors il est immédiat que

(4.5) $$f|M \in \mathcal{F}_{M^{-1}\Gamma' M, M^{-1}U_n}(\mu_M , \rho)$$

de sorte qu'on a

(4.6) $$\Phi^n_r(f|M) \in \mathcal{F}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{S}^n_r), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu^{(r)}_M , \rho^{(r)}) .$$

D'après l'hypothèse (4.3) , $f|M$ et donc $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépendent que de la classe de $M$ modulo à gauche $\Gamma'$.

Soit maintenant $L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$ , $L_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \varpi_r(L)$ ;

alors il est clair que

$$\varpi_r(L^{-1} M^{-1} \Gamma' ML \cap \mathfrak{G}_r^n) = L_1^{-1}(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n) L_1 , \quad L^{-1} M^{-1} U \cap \mathfrak{H}_r = L_1^{-1}(M^{-1} U \cap \mathfrak{H}_r).$$

D'autre part, considérons l'isomorphisme

$$\det(D_2)^{-\alpha_n} \sigma_M^{-1} \circ \sigma_{ML} : F_{\mu_{ML}} \longrightarrow F_{\mu_M} ;$$

comme $L^{-1} M^{-1}\Gamma' ML \cap \mathfrak{J}_r^n = L^{-1}(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{J}_r^n) L$, on voit facilement que cet isomorphisme applique $N^{(r)}_{\mu_{ML}}$ sur $N^{(r)}_{\mu_M}$ , ce qui donne l'isomorphisme induit

$$(4.7) \qquad F_{\mu^{(r)}_{ML}} = F_{\mu_{ML}}/N^{(r)}_{\mu_{ML}} \longrightarrow F_{\mu^{(r)}_M} = F_{\mu_M}/N^{(r)}_{\mu_M} ;$$

il est clair d'après la définition que, si l'on attache à $L_1 = \varpi_r(L)$ cet isomorphisme induit, le multiplicateur de $L_1^{-1} \varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n) L_1$ défini d'une manière analogue à (4.2) est précisément $\mu^{(r)}_{ML}$ . De façon précise, soit $L_o \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{J}_r^n$ ; comme on a pour les isomorphismes (4.7) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_{\mu^{(r)}_{ML}} & \longrightarrow & F_{\mu^{(r)}_M} \\ \uparrow & \nearrow & \\ F_{\mu^{(r)}_{ML} L_o} & & \end{array} ,$$

on peut identifier tous les espaces $F_{\mu^{(r)}_{ML}}$ tels que $\varpi_r(L) = L_1$ avec un seul espace noté $F_{(\mu^{(r)}_M)_{L_1}}$ , et désigner par $\sigma^{(M)}_{L_1}$ l'isomorphisme

$$F_{(\mu^{(r)}_M)_{L_1}} \longrightarrow F_{\mu^{(r)}_M}$$

défini par (4.7) ; alors on a

$$(\mu_{ML})^{(r)} = (\mu_M^{(r)})_{L_1} \quad ; \tag{4.8}$$

on constate facilement que le système $F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}}, \sigma_{L_1}^{(M)}$ $(L_1 \in \tilde{\Gamma}_r)$ vérifie la même condition que (4.3) pour $\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n)$ et $\mu_M^{(r)}$ .

Cela dit, on pose

$$(g|L_1)(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1)^{-1} \circ g(L_1 Z_1 \circ \sigma_{L_1}^{(M)} \tag{4.9}$$

pour $g \in \mathcal{H}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu_M^{(r)}, \rho^{(r)})$ , $L_1 \in \tilde{\Gamma}_r$ ; alors par le raisonnement du n° 2 on constate facilement la relation

$$\Phi_r^n(f|ML) = \Phi_r^n(f|M)|L_1 \tag{4.10}$$

pour $f \in \mathcal{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ , $L \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$ ; cette relation montre que l'opérateur $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépend essentiellement que de la classe de $M$ modulo à droite $\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$ .

Soit donc

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_\lambda \Gamma' M_{r,\lambda} (\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n) ,$$

et soient

$$U_{r,\lambda} = M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r ,$$

$$\Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \cap \mathfrak{G}_r^n) \quad ;$$

alors $U_{r,\lambda}$ est $\Gamma'_{r,\lambda}$-saturé et on a la décomposition en somme directe

$$U = \bigcup_{r,\lambda} \Gamma' M_{r,\lambda} U_{r,\lambda} \quad ; \tag{4.11}$$

en faisant usage de cette représentation, on pose

$$f_{r,\lambda} = \Phi_{r,\lambda}^n f = \Phi_r^n(f|M_{r,\lambda}) \tag{4.12}$$

pour $f \in \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ ; alors on a

(4.13) $$f_{r,\lambda} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r,\lambda}}(\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)}),$$

où l'on pose $\mu_{r,\lambda} = \mu^{(r)}_{M_{r,\lambda}}$ .

Or si l'on remplace $F_{\mu_M}$ , $\sigma_M$ par un autre système $F_{\mu'_M}$ , $\sigma'_M$ , on aura l'isomorphisme

$$\tau_M = \sigma'^{-1}_M \circ \sigma_M : F_{\mu_M} \longrightarrow F_{\mu'_M}$$

qui applique $N^{(r)}_{\mu_M}$ sur $N^{(r)}_{\mu'_M}$ pour tout $r$ et donc induit un isomorphisme

$$\tau^{(r)}_M : F_{\mu^{(r)}_M} \longrightarrow F_{\mu'^{(r)}_M} .$$

En désignant par $f|'M$ l'opérateur défini comme (4.4) par $\sigma'_M$ , on obtiendra les relations

$$f|M = (f|'M) \circ \tau_M , \quad \tilde{\Phi}^n_r(f|M) = (\tilde{\Phi}^n_r(f|'M)) \circ \tau^{(r)}_M ;$$

ce qui montre que toutes les définitions ci-dessus ne dépendent pas essentiellement du choix du système $F_{\mu_M}$ , $\sigma_M$ .

Dans le cas particulier où le multiplicateur $\mu$ est trivial, on peut poser $F_{\mu_M} = F_\mu = C$ et $\sigma_M$ = identité ; alors $(f|M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \in F_\rho$ et $\tilde{\Phi}^n_r(f|M)(Z_1) \in F_{\rho^{(r)}}$ . Or on a $F_{\mu^{(r)}_M} = C$ ou $\{0\}$ , et c'est nul si et seulement s'il existe une $M'' \in M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{S}^n_r$ telle que $\det(D''_2)^{\alpha_n} = -1$ ; s'il en est ainsi, $\tilde{\Phi}^n_r(f|M)$ est identiquement nulle. D'après ce que nous avons dit cette alternative ne dépend que de la classe de $M$ à gauche modulo $\Gamma'$ et à droite modulo $\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{S}^n_r$ ; en posant $\sigma^{(M)}_{L_1}$ = identité dans (4.9) on obtient toujours la relation (4.10).

<u>Transitivité de</u> $\tilde{\Phi}^n_{r,\lambda}$ : Soit $s < r < n$ et soient

$$\tilde{\Gamma}_r = \bigcup_\nu \Gamma'_{r,\lambda} M^{(r,\lambda)}_{s,\nu} (\tilde{\Gamma}_r \cap \mathfrak{S}^r_s) ,$$

$$U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = M_{s,\nu}^{(r,\lambda)^{-1}} (M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r^*) \cap \mathfrak{S}_s$$

$$= \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{S}_s ,$$

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} = \varpi_s(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)-1} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathfrak{C}_s^r)$$

$$= \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathfrak{C}_r^n \cap \mathfrak{C}_s^n) ,$$

alors $U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}$ est $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}$-saturé et on a

$$M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r^* = \bigcup_{s,\nu} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} ;$$

on pose pour $g \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r,\lambda}}(\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)})$

$$(4.14)\quad \Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} g = \Phi_s^r (g|M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \in \mathfrak{H}_{(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}, U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}}((\mu_{r,\lambda})_{s,\nu}, (\rho^{(r)})^{(s)}) .$$

Or, si $(\lambda, \nu) \longrightarrow \mu$, i.e. s'il y a $M' \in \Gamma'$, $L \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{C}_s^n$ telles que

$$M_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = M' M_{s,\mu} L ,$$

on a

$$(4.15)\quad U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = \varpi_s(L)^{-1} U_{s,\mu} ,$$

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} \subset \varpi_s(L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s(L) ;$$

on va montrer la relation suivante

$$(4.16)\quad \Phi_{s,\nu}^{r,\lambda}(\Phi_{r,\lambda}^n f) = (\Phi_{s,\mu}^n f)|\varpi_s(L) ;$$

en effet, d'après la définition et (3.4), (4.10) on a

$$\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda}(\Phi_{r,\lambda}^n f) = \Phi_s^r(\Phi_r^n(f|M_{r,\lambda})|M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})$$

$$= \Phi_s^r(\Phi_r^n(f|M_{r,\lambda} \cdot \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})))$$

$$= \Phi_s^n(f|M_{s,\mu} L)$$

$$= \Phi_s^n(f|M_{s,\mu})|\varpi_s(L)$$

$$= (\Phi_{s,\mu}^n f)|\varpi_s(L) .$$

BIBLIOGRAPHIE

La généralisation de l'opérateur $\Phi$ donnée dans cet exposé se trouve partiellement dans :

[1] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, I., Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.

[2] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., new Series, t. 20, 1956, p. 259-281.

[3] SATAKE (Ichiro). - On Siegel's modular functions, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko 1955. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 107-129.