Roger Godement

Fonctions holomorphes de carré sommable dans le demi-plan de Siegel

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 6, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A6_0>

Séminaire H. CARTAN
E.N.S., 1957/58

6 janvier 1958

FONCTIONS HOLOMORPHES DE CARRÉ SOMMABLE DANS LE DEMI-PLAN DE SIEGEL

par Roger GODEMENT

Comme le précédent, cet exposé a pour but d'établir des résultats qui nous seront utiles pour établir la théorie des formes modulaires. Les n° 1 à 3 complètent l'exposé précédent, les numéros suivants donnent l'application de l'intégrale de Siegel à la théorie des fonctions holomorphes de carré sommable dans le demi-plan (théorie étudiée, d'un point de vue plus général et avec des méthodes un peu différentes, par HARISH-CHANDRA).

1. Un complément à l'exposé précédent.

Nous avons étudié dans l'exposé précédent des intégrales étendues à l'espace des matrices $y \gg 0$; or une telle intégrale se décompose en une intégrale étendue à la portion $\det(y) \geqslant c$ et en une intégrale étendue à la portion $\det(y) \leqslant c$ de cet espace ; comme nous aurons du reste besoin aussi de ces intégrales "partielles" nous allons les étudier. Voici le résultat :

THÉORÈME 1. – *Soit* ρ *une représentation irréductible de* $GL_+(n, \underline{R})$ (1) *dans un espace vectoriel* F *de dimension finie, et soient* $\underline{a}$ *un élément non nul de* F , σ *une constante* $\geqslant 1$, *et* c *une constante* > 0 .

a. *Pour que l'intégrale*

$$\int_{\det(g) \geqslant c} \| \rho(g)\underline{a} \|^{\sigma} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\, dg$$

converge il faut et il suffit que l'on ait $s \gg 0$.

b. *Soit*

$$\alpha(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

---

(1) Convention d'écriture. – Dans cet exposé, comme dans le précédent, exceptionnellement, les lettres soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les autres exposés de ce Séminaire : elles apparaîtraient en caractères gras en typographie.

le plus haut poids de ρ . *Pour que l'intégrale*

$$\int_{\det(g)\leq c} \|\rho(g)\underline{a}\|^{\sigma} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\, dg$$

converge il faut et il suffit que l'on ait

$$s \gg 0 \quad , \quad \alpha_n > \frac{n-1}{\sigma} .$$

Compte tenu de l'exposé précédent il suffit évidemment de démontrer l'assertion a. du théorème.

Notons d'abord le résultat suivant :

LEMME 1. - *Pour toute* $s \gg 0$, *la fonction*

$$\exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\det(g)^{-\alpha_n} . \|\rho(g)\|$$

est bornée sur $GL_+(n , \underline{R})$.

En effet, la représentation

$$g \longrightarrow \det(g)^{-\alpha_n}\rho(g)$$

est polynomiale, de sorte que le lemme est trivial.

Cela dit, il est clair que pour établir la convergence de l'intégrale considérée on peut se ramener, d'après le lemme 1 , au cas où ρ est de dimension 1 , i.e. il suffit de prouver que

$$\int_{\det(g)\geq c} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\det(g)^{\alpha}\, dg$$

converge pour $c > 0$, $s \gg 0$ et α réel quelconque. Le changement de variable $g \longrightarrow \lambda g$, avec $\lambda > 0$ convenablement choisi, ramène immédiatement au cas où $c = 1$, i.e. à l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_{\det(g)\geq 1} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\det(g)^{\alpha}\, dg .$$

Or, on sait que l'intégrale

$$\int_{\det(g)>0} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg'))\det(g)^{\alpha}\, dg$$

converge pour α assez grand ; on aura donc a fortiori

$$I(\alpha) < +\infty \qquad \text{pour} \qquad \alpha > \alpha_0 .$$

Mais dans l'ensemble $\det(g) \geq 1$, l'expression $\det(g)^{\alpha}$ est fonction *croissante* de α ; donc

$$I(\alpha) < I(\alpha + N)$$

quel que soit $N > 0$; comme

$$I(\alpha + N) < +\infty \qquad \text{pour } N > \alpha_0 - \alpha \quad ,$$

il s'ensuit que $I(\alpha) < +\infty$ pour tout α .

On a donc établi que l'intégrale figurant dans la partie a. de l'énoncé converge si $s \gg 0$; le fait qu'elle diverge dans le cas contraire a été établi dans l'exposé précédent (n° 6 , Remarque). Le théorème 1 est ainsi complètement démontré.

2. L'intégrale de Siegel dans l'espace des matrices positives.

Nous allons maintenant énoncer le théorème 1 en nous plaçant dans l'espace homogène Y des matrices $y = y' \gg 0$:

THÉORÈME 2. - Soient ρ une représentation irréductible de $GL_+(n , \underline{R})$ dans un espace vectoriel F de dimension finie, σ une constante ≥ 1 , c une constante > 0 , et $\underline{a}$ un élément non nul de F .

a. Pour que l'intégrale

$$\int_{\det(y) \geq c} \|\rho(y^{1/2})\underline{a}\|^{\sigma} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1}\, dy$$

converge il faut et il suffit que l'on ait $s \gg 0$.

b. Soit

$$\alpha(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

le plus haut poids de ρ ; pour que l'intégrale

$$\int_{\det(y) \leq c} \|\rho(y^{1/2})\underline{a}\|^{\sigma} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1}\, dy$$

converge il faut et il suffit que l'on ait

$$s \gg 0 \quad , \quad \alpha_n > 2n/\sigma \ .$$

Nous pouvons supposer le produit scalaire adapté à la représentation. Posons alors $y = g'g$ avec $g \in GL_+(n , \underline{R})$; il vient

$$\begin{aligned}\|\rho(y^{1/2})\underline{a}\|^2 &= \langle \rho(y^{1/2})\underline{a} , \rho(y^{1/2})\underline{a} \rangle = \langle \rho(y)\underline{a} , \underline{a} \rangle \\ &= \langle \rho(g'g)\underline{a} , \underline{a} \rangle = \langle \rho(g)\underline{a} , \rho(g)\underline{a} \rangle = \|\rho(g)\underline{a}\|^2 \quad ;\end{aligned}$$

d'autre part, on sait et il est facile de vérifier que la mesure invariante de l'espace des y est $\det(y)^{-(n+1)/2}\, dy$; il s'ensuit que les intégrales considérées s'écrivent encore sous la forme

$$\int \|\rho(g)\underline{a}\|^{\sigma} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg')) \det(g)^{-n-1}\, dg \quad ,$$

avec la limitation $\det(g) \geqslant c$ ou $\det(g) \leqslant c$ suivant le cas. On est donc ramené au théorème 1 en considérant la représentation

$$g \longrightarrow \det(g)^{-(n+1)/\sigma} \cdot \rho(g)$$

de $GL_+(n, \underline{R})$, d'où immédiatement le résultat cherché.

L'explication du facteur $\det(y)^{-n-1}$ introduit dans l'énoncé du théorème précédent sera donnée plus loin ; il n'est là que pour la commodité des références ultérieures.

D'autre part il va de soi que l'intégrale étendue à <u>toutes</u> les matrices $y \gg 0$ converge dans les mêmes conditions que l'intégrale étendue au domaine $\det(y) \leqslant c$.

3. <u>L'opérateur</u> $H(\rho)$.

Lorsque l'on applique le théorème 2 dans le cas où $\sigma = 2$, il vient

$$\|\rho(y^{1/2})\underline{a}\|^2 = \langle \rho(y)\underline{a} , \underline{a} \rangle$$

et par suite il s'impose de considérer l'intégrale

$$(4) \qquad \boxed{H_\rho(s) = \int_{y \gg 0} \rho(y) \exp(-\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1} \, dy} \ ;$$

celle-ci définit dans l'espace F , pourvu que l'on ait

$$s \gg 0 \quad , \quad \alpha_n > n \ ,$$

un opérateur $H_\rho(s)$ dont nous allons donner quelques propriétés simples :

THÉORÈME 3. – <u>L'opérateur</u> $H_\rho(s)$ <u>est hermitien</u> $\gg 0$; <u>l'opérateur</u>

$$(5) \qquad H(\rho) = H_\rho(1) = \int_{y \gg 0} \rho(y) \exp(-\pi \operatorname{Tr}(y)) \det(y)^{-n-1} \, dy$$

<u>commute aux opérateurs</u> $\rho(g)$ <u>pour</u> $g \in O_+(n)$; <u>on a</u>

$$(6) \qquad \boxed{H_\rho(s) = \det(s)^{+(n+1)/2} \, \rho(s^{-1/2}) \, H(\rho) \, \rho(s^{-1/2})}$$

<u>pour</u> $s \gg 0$.

La première assertion résulte du fait qu'on intègre, par rapport à une mesure positive, une fonction à valeurs dans l'espace des opérateurs hermitiens $\gg 0$ de F ; la seconde assertion résulte du fait que la fonction $\exp(-\pi \operatorname{Tr}(y)) \det(y)^{-n-1}$ ne change pas par $y \longrightarrow kyk^{-1}$ avec $k \in O_+(n)$; enfin la troisième propriété s'obtient en effectuant dans (4) le changement de variable $y \to s^{-1/2}\,ys^{-1/2}$, lequel conserve la mesure invariante sur l'espace des y , à savoir

$$\det(y)^{-(n+1)/2}dy \ .$$

Lorsque

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha} \qquad (\text{avec } \alpha > n)$$

on peut calculer complètement $H(\rho)$, qui est bien entendu un scalaire ; il suffit de procéder comme au n° 5 de l'exposé 5 ; le résultat obtenu (Siegel) est que

$$\boxed{\begin{array}{l} H(\rho) = \pi^{-n\alpha + \frac{n(n-1)}{4}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})\ \dots\ \Gamma(\alpha - \frac{n-1}{2}) \\ \qquad \text{pour} \quad \rho(g) = \det(g)^{\alpha} \ , \quad \alpha > n \ . \end{array}}$$

Bien entendu ce résultat ne peut s'obtenir qu'en utilisant une formule d'intégration exacte (i.e. qui ne soit pas seulement vraie à un facteur constant près !) ; la formule à utiliser est

$$\int_{y \gg 0} \varphi(y)\,\det(y)^{-(n+1)/2}\,dy = 2^n \int_{T_o^+} \varphi(t't)\,d_r\,t$$

avec

$$d_r\,t = t_{11}^{-1}\,t_{22}^{-2}\dots t_{nn}^{-n} \prod_{i \leq j} dt_{ij} \ .$$

Le coefficient 2^n s'obtient comme suit. En posant $y = t't$ et en différentiant cette relation il vient aussitôt

$$\delta y = t'(\delta_r\,t + (\delta_r\,t)')t \qquad \text{où} \qquad \delta_r\,t = \delta t . t^{-1} \ ;$$

posons alors

$$\delta_r\,t = (\theta_{ij})$$

où les θ_{ij} sont des formes différentielles invariantes à droite sur T_o^+ ; il vient donc

$$\delta y = t' . \begin{pmatrix} 2\theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{1n} & \dots & \dots & 2\theta_{nn} \end{pmatrix} .t \ ;$$

étant donné que

$$d_r\, t = \prod_{i\leq j} \theta_{ij}$$

et qu'il est <u>évident a priori</u> qu'on a une relation

$$\det(y)^{-(n+1)/2}\ dy = \det(y)^{-(n+1)/2} \prod_{i\leq j} \delta y_{ij} = c.d_r\, t$$

(avec une constante c qu'il s'agit justement de calculer !) on peut, pour déterminer c , se placer au point $t = 1$; il vient alors

$$\delta y_{ii} = 2\theta_{ii} \quad , \quad \delta y_{ij} = \theta_{ij} \quad \text{si} \quad i < j \ ,$$

d'où la valeur $c = 2^n$ cherchée.

Dans le cas général (ρ quelconque) il serait sûrement utile d'avoir des renseignements plus précis concernant $H(\rho)$; il est facile d'en faire le calcul complet pour $n = 2$, cas où les représentations de $GL_+(n , \underline{R})$ se construisent très simplement. Il n'est cependant pas certain que ce cas soit très représentatif en raison du fait, tout à fait particulier à $GL_+(2 , \underline{R})$, que les divers "poids" des représentations irréductibles sont ici tous de multiplicité 1 .

Remarquons encore que l'on peut définir $H(\rho)$ pour certaines représentations de dimension <u>infinie</u> de $GL_+(n , \underline{R})$; nous n'insisterons pas ici sur cette question.

4. <u>Fonctions holomorphes de carré sommable dans le demi-plan</u>.

Soit ρ une représentation irréductible de $GL_+(n , \underline{R})$ dans un espace vectoriel de dimension finie F ; nous supposerons que, dans le plus haut poids

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

de ρ , l'exposant α_n est <u>réel</u>, en sorte qu'il existe alors sur F un produit scalaire adapté à ρ (exposé 5 , n° 2) ; c'est celui-ci qu'on utilisera systématiquement dans ce qui va suivre.

Donnons-nous alors un nombre réel p avec

$$1 \leq p \leq +\infty \ ;$$

nous définirons

$$\mathcal{H}^p(\rho)$$

comme étant <u>l'ensemble des fonctions</u> $f(z)$ <u>définies et holomorphes pour</u>

$\mathrm{Im}(z) \gg 0$, à valeurs dans F , et telles que l'intégrale

(7) $$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathrm{Im}(z)\gg 0} \|\rho(y^{1/2})\ f(z)\|^p\ dz \right\}^{1/p}$$

converge. Pour $p = +\infty$ il faut naturellement modifier cette définition en prenant

(8) $$\|f\|_\infty = \sup_z \|\rho(y^{1/2})\ f(z)\| ,$$

comme en théorie de la mesure.

Il est clair (MINKOWSKI) que $\mathcal{H}^p(\rho)$ est un espace vectoriel ; il est de plus complet relativement à la norme $\|f\|_p$, car puisqu'il s'agit de fonctions holomorphes on a, pour toute partie compacte A du demi-plan, une majoration de la forme

(9) $$\sup_{z\in A} \|f(z)\| \leqslant c(A).\ \|f\|_p$$

(utiliser localement un développement en série entière pour f), en sorte que toute suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^p(\rho)$ converge normalement sur tout compact, etc., c'est le raisonnement standard à la Bergmann. Autrement dit, $\mathcal{H}^p(\rho)$ est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{L}^p(\rho)$ de toutes les fonctions de puissance p-ième intégrale dans le demi-plan (ceci suppose qu'on identifie une $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$ à la fonction $\rho(y^{1/2})\ f(z)$ de $\mathcal{L}^p(\rho)$).

Si de plus l'on a des exposants conjugués p et q , avec

$$1/p + 1/q = 1 ,$$

alors la formule

(10) $$\langle f , g \rangle = \int_{\mathrm{Im}(z)\gg 0} \langle \rho(y^{1/2})\ f(z) , \rho(y^{1/2})\ g(z) \rangle\ dz$$

définit (HÖLDER) une dualité en général non séparée entre $\mathcal{H}^p(\rho)$ et $\mathcal{H}^q(\rho)$; en particulier, $\mathcal{H}^2(\rho)$ est un espace de Hilbert.

Comme ce Séminaire est en principe consacré à la théorie des fonctions automorphes, il peut être utile d'expliquer dès maintenant pourquoi l'on introduit les espaces ci-dessus ; la raison est essentiellement la suivante : soient ρ une représentation holomorphe de $GL(n , \underline{C})$, et $f(z)$ une forme modulaire d'espèce ρ relativement au groupe modulaire de Siegel (ou à un groupe paramodulaire, ou à un groupe à domaine fondamental compact) ; alors on a $f \in \mathcal{H}^\infty(\rho)$ dès que f est une Spitzenform. En effet l'expression $\|\rho(y^{1/2})\ f(z)\|$ est absolument invariante par le groupe discontinu considéré (voir plus loin) ; il suffit donc de montrer qu'elle est bornée dans le domaine fondamental, ce qui est clair lorsque f est une Spitzenform !

Or nous démontrerons plus loin que, si

$$\alpha_n > 2n \quad ,$$

on a pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^{\infty}(\rho)$ la relation

$$(11) \qquad f(z_1) = c(\rho) \int_{\mathrm{Im}(z_2) \gg 0} \rho((z_1 - \bar{z}_2)/2i)^{-1} \rho(y_2)\, f(z_2)\, dz_2 \quad ,$$

l'intégrale étant absolument convergente ; on obtiendra ainsi, en rendant le noyau qui figure dans la formule ci-dessus invariant par le groupe discontinu considéré, une caractérisation des Spitzenformen à l'aide d'une équation intégrale ; c'est de là que sortiront la majeure partie des séries d'Eisenstein (ce seront les coefficients de Fourier en z_2 du noyau invariant qui caractérise les Spitzenformen), les théorèmes de finitude de la théorie des formes modulaires, et enfin la formule des traces de Selberg, qui donne le nombre de Spitzenformen d'espèce donnée à l'aide d'une intégrale étendue au domaine fondamental. Enfin, on peut espérer que ces méthodes devraient permettre d'étudier des groupes discontinus généraux (avec l'hypothèse évidemment que le domaine fondamental soit de volume fini) ; empressons-nous de préciser qu'on en est encore loin !

Pour $n = 1$, cas classique, ces méthodes sont connues depuis les travaux de PETERSSON, bien que cet auteur n'ait jamais utilisé explicitement les espaces $\mathcal{H}^p(\rho)$; l'introduction de $\mathcal{H}^2(\rho)$ dans le cas $n = 1$ est dûe à V. BARGMAN à propos des représentations unitaires irréductibles du groupe hyperbolique $Sp(1, \underline{R})$; pour les espaces symétriques complexes généraux, les $\mathcal{H}^2(\rho)$ sont dûs à HARISH-CHANDRA, qui en a fait une étude complète (dans les trois mémoires figurant dans la Bibliographie de cet exposé) également du point de vue de la théorie des représentations des groupes semi-simples ; le raccord avec la théorie des fonctions automorphes n'a jamais été fait complètement, mais l'article de SELBERG sur les espaces symétriques contient, sans démonstrations, des indications importantes sur la formule des traces et les fonctions-noyaux.

L'étude des espaces $\mathcal{H}^2(\rho)$ occupera le restant du présent exposé ; les autres espaces $\mathcal{H}^p(\rho)$ seront étudiés ultérieurement; bien que notre but ultime soit $\mathcal{H}^1(\rho)$ et $\mathcal{H}^{\infty}(\rho)$, nous ne parviendrons pas à étudier sérieusement ces espaces sans passer par l'intermédiaire de $\mathcal{H}^2(\rho)$.

5. Condition d'existence de fonctions holomorphes de carré sommable.

THÉORÈME 4. - *Soit* ρ *une représentation irréductible de* $GL_+(n, \underline{R})$ *, de plus haut poids*

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i} .$$

Pour que $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, *il faut et il suffit que* $\alpha_n > n$.

Ce théorème a été démontré par HARISH-CHANDRA pour *tous* les espaces symétriques complexes ; la méthode suivie ici, nettement plus simple que celle de Harish-Chandra, consiste à opérer une transformation de Fourier par rapport au sous-groupe de $Sp(n, \underline{R})$ formé des translations réelles $z \longrightarrow z + s$. Mais "on" ignore si elle pourrait se généraliser à tous les espaces symétriques complexes ; la même objection s'applique d'ailleurs à l'utilisation des séries de Fourier dans la théorie des formes modulaires.

Supposons $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$ et considérons une fonction $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$. Puisque l'on a

$$\iint \|\rho(y^{1/2})\ f(z)\ \|^2 \det(y)^{-n-1}\, dx\, dy < + \infty , \tag{12}$$

le théorème de Lebesgue-Fubini montre que *la fonction*

$$x \longrightarrow \rho(y^{1/2})\ f(x + iy) \tag{13}$$

est de carré sommable en x *pour presque tout* y : on peut donc, pour presque tout y , lui faire subir une transformation de Fourier sur le groupe additif des x , et comme les "caractères" du groupe des x sont les fonctions

$$x \longrightarrow \exp(2 \pi i\ \mathrm{Tr}(sx))$$

avec $s = s'$ réelle, on voit que la transformée de Fourier de (13) est la fonction

$$\hat{f}_y(s) = \int \rho(y^{1/2})\ f(x + iy) \exp(- 2 \pi i\ \mathrm{Tr}(sx))\, dx \quad ; \tag{14}$$

en général cette intégrale *n'est pas* absolument convergente et doit être interprétée conformément aux traditions relatives à la transformation de Fourier dans un espace L^2 : on sait seulement que $\hat{f}_y(s)$ est *de carré sommable en* s et qu'on a la *formule de Plancherel*

$$\int \|\rho(y^{1/2})\ f(x + iy)\ \|^2\, dx = \int \|\hat{f}_y(s)\ \|^2\, ds \tag{15}$$

pour presque tout y .

LEMME 2. - Il existe une fonction $\hat{f}(s)$ à valeurs dans F, telle que l'on ait

(16) $$\hat{f}_y(s) = \rho(y^{1/2})\, \hat{f}(s) \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy))$$

presque partout en s pour presque tout y.

Donnons d'abord une non-démonstration du lemme ; on écrit

$$\begin{aligned}\hat{f}_y(s) &= \int \rho(y^{1/2})\, f(x+iy) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx))\, dx \\ &= \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy))\, \rho(y^{1/2}) \int f(x+iy) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(s(x+iy)))\, dx \\ &= \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy))\, \rho(y^{1/2}) \int f(z) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sz))\, dx ,\end{aligned}$$

et comme la fonction sous le signe $\int$ est holomorphe, l'intégrale est indépendante de y en vertu des théorèmes "biens connus" sur les fonctions holomorphes ... L'inconvénient de cette démonstration est naturellement que les intégrales qu'on vient d'écrire ne convergent pas !

Pour obtenir une démonstration rigoureuse, considérons dans l'espace des x une suite croissante de compacts A_n, ayant pour réunion l'espace entier, et posons

$$\hat{f}_n(s) = \int_{A_n} f(z) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sz))\, dx \quad ;$$

comme A_n est compact et la fonction sous le signe $\int$ holomorphe, il est clair que $\hat{f}_n(s)$ ne dépend pas de y ; de plus, l'intégrale est évidemment convergente pour toute $y \gg 0$, et représente une fonction continue de s, qui est de carré sommable par rapport à s puisque c'est la transformée de Fourier en x de la fonction égale à $f(x+iy) \exp(2\pi \operatorname{Tr}(sy))$ pour $x \in A_n$, et à 0 ailleurs.

Désignons maintenant par $N(f)$ l'ensemble des y telles que

$$\int \|\rho(y^{1/2})\, f(z)\|^2\, dx = +\infty \quad ;$$

$N(f)$ est donc de mesure nulle. Pour $y \notin N(f)$, on a évidemment (c'est plus ou moins la définition de la transformation de Fourier dans L^2)

$$\hat{f}_y(s) = \underset{n\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{A_n} \rho(y^{1/2})\, f(x+iy) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx))\, dx ,$$

le symbole l.i.m. ("limite en moyenne") désignant une limite dans l'espace $L^2(ds)$. Il vient donc

(17) $$\hat{f}_y(s) = \text{l.i.m.}\, \rho(y^{1/2})\, \hat{f}_n(s) \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy)) \quad \text{pour } y \notin N(f) .$$

Or de toute suite de Cauchy dans L^2 on peut extraire une suite qui converge presque partout (et qui converge vers la même limite). Donc, on peut supposer que pour <u>une</u> matrice $y_0 \notin N(f)$ la suite figurant au second membre de (17) converge <u>presque partout</u> par rapport à s ; ceci, compte tenu du fait que $\rho(y^{1/2})$ est inversible, démontre déjà que la limite

$$\hat{f}(s) = \lim_{n\infty} \hat{f}_n(s)$$

existe presque partout ; mais s'il en est ainsi, on a

$$\lim_{n\infty} \rho(y^{1/2})\ \hat{f}_n(s)\ \exp(-2\pi\,\mathrm{Tr}(sy)) = \rho(y^{1/2})\ \hat{f}(s)\ \exp(-2\pi\,\mathrm{Tr}(sy))$$

presque partout en s pour <u>toute</u> y ; la comparaison avec (17) démontre alors le lemme 2 .

LEMME 3. - <u>Pour toute</u> $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$, <u>on a</u> $\hat{f}(s) = 0$ <u>presque partout en dehors de l'ouvert</u> $s \gg 0$.

D'après Lebesgue-Fubini, Plancherel et le lemme 2 , on a en effet

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int \det(y)^{-n-1}\,dy \int \|\rho(y^{1/2})\ f(x+iy)\|^2\,dx \\ &= \int \det(y)^{-n-1}\,dy \int \|\rho(y^{1/2})\ \hat{f}(s)\|^2 \exp(-4\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\,ds \\ &= \int ds \int \|\rho(y^{1/2})\ \hat{f}(s)\|^2 \exp(-4\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\,dy \quad ; \end{aligned}$$

donc il vient

$$(18) \qquad \int \|\rho(y^{1/2})\ \hat{f}(s)\|^2 \exp(-4\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\,dy < +\infty$$

pour presque tout s . Or on a vu (exposé 5 , théorème 2) que pour un vecteur $\underline{a} \in F$ <u>non nul</u> la relation

$$\int \|\rho(y^{1/2})\underline{a}\|^2 \exp(-4\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\,dy < +\infty$$

exige $s \gg 0$; d'où le lemme 3 .

LEMME 4. - <u>Supposons</u> $\mathcal{H}^2(\rho)$ <u>non nul</u> ; <u>alors pour toute</u> $s \gg 0$ <u>l'intégrale</u>

$$H_\rho(s) = \int_{y \gg 0} \rho(y)\ \exp(-\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\,dy$$

<u>converge, et pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$ <u>on a</u>

$$(19) \qquad \|f\|_2^2 = \int_{s \gg 0} \|H_\rho(4s)^{1/2}\ \hat{f}(s)\|^2\,ds < +\infty \ .$$

On a vu en effet ci-dessus que, pour toute $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$ et presque toute s, on a la relation (18) ; si $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, la fonction $\hat{f}(s)$ n'est pas nulle presque partout, et vu le lemme 3 il y a une $s \gg 0$ où (18) converge et où $\hat{f}(s) \neq 0$; la convergence de $H_\rho(s)$ résulte alors du théorème 2 de l'exposé 5, ou du théorème 1 du présent exposé. Comme de plus on a

$$\|\rho(y^{1/2})\,\hat{f}(s)\|^2 = \langle \rho(y)\,\hat{f}(s)\,,\,\hat{f}(s)\rangle$$

les relations utilisées pour établir le lemme 3 montrent immédiatement que l'on a

(20) $$\|f\|^2 = \int_{s\gg 0} \langle H_\rho(4s)\,\hat{f}(s)\,,\,\hat{f}(s)\rangle\,ds = \int_{s\gg 0} \|H_\rho(4s)^{1/2}\,\hat{f}(s)\|^2\,ds$$

et le lemme 4 est établi.

Le lemme 4 implique évidemment que si $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$ on a nécessairement

$$\alpha_n > n$$

(appliquer le théorème 2 avec $\sigma = 2$) ; il nous faut maintenant établir que la condition $\alpha_n > n$ est aussi suffisante ; cela va évidemment résulter du

LEMME 5. – *Supposons* $\alpha_n > n$, *et soit* $\varphi(s)$ *une fonction définie pour* $s \gg 0$, *à valeurs dans* F, *mesurable, et telle que l'intégrale*

(21) $$\int_{s\gg 0} \|H_\rho(4s)^{1/2}\,\varphi(s)\|^2\,ds$$

converge ; alors l'intégrale

(22) $$\hat{\varphi}(z) = \int_{s\gg 0} \varphi(s)\,\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(sz))\,ds$$

converge absolument pour $\mathrm{Im}(z) \gg 0$, *et représente une fonction*

$$\hat{\varphi} \in \mathcal{H}^2(\rho)\ .$$

Le produit de deux fonctions de carré sommable étant sommable il suffit pour établir la convergence absolue de (21) de prouver que la fonction

$$H_\rho(4s)^{-1/2}\,\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(sz))$$

est sommable par rapport à ds dans l'ouvert $s \gg 0$. Or (théorème 3) on a

$$H_\rho(4s)^{-1/2} = \det(s)^{-(n+1)/2}\,\rho(s^{1/2})\,H(\rho)^{-1}\,\rho(s^{1/2})$$

à un facteur constant près ; on est donc ramené à établir la convergence de l'intégrale

$$\int_{s\gg 0} \rho(s^{1/2})\ H(\rho)^{-1}\ \rho(s^{1/2})\ \exp(-\ 2\ \pi\ \mathrm{Tr}(sy))\ \det(s)^{-(n+1)/2}\ ds$$

pour $y = \mathrm{Im}(z) \gg 0$; comme $H(\rho)^{-1} \gg 0$, on a des inégalités de la forme

$$c_1 \cdot \rho(s) \ll \rho(s^{1/2})\ H(\rho)^{-1}\ \rho(s^{1/2}) \ll c_2 \cdot \rho(s)$$

l'intégrale considérée est de même nature que

$$\int_{s\gg 0} \rho(s)\ \exp(-\ 2\ \pi\ \mathrm{Tr}(sy))\ \det(s)^{-(n+1)/2}\ ds \quad ;$$

or d'après le théorème 2 cette intégrale converge dès que $\alpha_n > \frac{n-1}{2}$; cela établit notre assertion.

Reste à prouver que $\hat{\varphi}$ est dans l'espace $\mathcal{H}^2(\rho)$. Le fait que $\hat{\varphi}$ soit fonction holomorphe de z est immédiat : si la fonction $\varphi(s)$ est continue et à support compact dans l'ouvert $s \gg 0$, c'est évident, et le cas général se déduit de là par passage à la limite. Il reste donc à évaluer

$$\iint \| \rho(y^{1/2})\ \hat{\varphi}(z)\ \|^2 \det(y)^{-n-1}\ dx\ dy = \int \det(y)^{-n-1}\ dy \int \| \rho(y^{1/2})\ \hat{\varphi}(x+iy)\ \|^2\ dx$$

$$= (\text{PLANCHEREL}) \int \det(y)^{-n-1}\ dy \int_{s\gg 0} \|\rho(y^{1/2})\ \varphi(s)\ \|^2 \exp(-\ 4\pi\ \mathrm{Tr}(sy))\ ds$$

$$= (\text{FUBINI}) \int_{s\gg 0} ds \int_{y\gg 0} \| \rho(y^{1/2}) \varphi(s)\ \|^2 \exp(-\ 4\ \pi\ \mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\ dy$$

$$= \int_{s\gg 0} \|\ H_\rho(4s)^{1/2}\ \varphi(s)\ \|^2\ ds < +\ \infty$$

et tout est démontré.

LEMME 6. - <u>Soit</u> $\hat{\mathcal{H}}^2(\rho)$ <u>l'espace de Hilbert des fonctions</u> $\varphi(s)$, $s \gg 0$, <u>telles que</u>

$$\|\varphi\|^2 = \int_{s\gg 0} \|H_\rho(4s)^{1/2}\ \varphi(s)\ \|^2\ ds < +\ \infty \quad ;$$

<u>alors la transformation de Fourier</u>

(23) $\qquad f(z) \longrightarrow \hat{f}(s) = \int f(z)\ \exp(-\ 2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ dx \qquad (s \gg 0)$

<u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{H}^2(\rho)$ <u>sur</u> $\hat{\mathcal{H}}^2(\rho)$; <u>l'isomorphisme réciproque est donné par la formule</u>

(24) $\qquad \hat{f}(s) \longrightarrow f(z) = \int_{s\gg 0} \hat{f}(s)\ \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ ds \quad ,$

<u>l'intégrale étant absolument convergente pour</u> $\mathrm{Im}(z) \gg 0$.

Tout cela a déjà été implicitement démontré, sauf le fait que la formule d'inversion (24) vaut pour tout z (sans exception même de mesure nulle !) ; cela tient au fait que si la transformée de Fourier d'une fonction continue de carré sommable est sommable, alors la formule d'inversion de Fourier est valable partout (cf. H. CARTAN et R. GODEMENT, [1] , cet article, célèbre à juste titre, contient tous les résultats que nous avons utilisés ici concernant la transformation de Fourier).

6. Opérations du groupe symplectique dans $\mathcal{H}^2(\rho)$.

Considérons une représentation ρ de $GL_+(n , \underline{R})$ pour laquelle le paramètre α_n est entier ; cela signifie que ρ se prolonge en une représentation holomorphe (notée encore ρ) de $GL(n , \underline{C})$.

Soit $\mathcal{H}(\rho)$ l'espace des fonctions $f(z)$ holomorphes à valeurs dans F ; on peut alors faire opérer $Sp(n , \underline{R})$ dans $\mathcal{H}(\rho)$ en associant à une matrice symplectique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

l'endomorphisme

(25) $$L_\rho(M) : f(z) \longrightarrow \rho(cz + d)^{-1} f(Mz)$$

de $\mathcal{H}(\rho)$; avec cette convention, $Sp(n , \underline{R})$ opère à droite sur $\mathcal{H}(\rho)$. Associons alors à tout couple de fonctions $f , g \in \mathcal{H}(\rho)$ la fonction numérique

(26) $$f.g(z) = \langle \rho(y^{1/2}) f(z) , \rho(y^{1/2}) g(z) \rangle ;$$

en tenant compte de la formule

$$Im(Mz) = (cz + d)^{*-1} Im(z)(cz + d)^{-1}$$

on vérifie aussitôt la relation

(27) $$L_\rho(M)f.L_\rho(M)g(z) = f.g(Mz) ,$$

d'où suit évidemment que, pour $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$, l'expression $\|f\|_p$ est invariante par les opérateurs $L_\rho(M)$; autrement dit, chaque $M \in Sp(n , \underline{R})$ définit dans chaque espace $\mathcal{H}^p(\rho)$ un opérateur isométrique $L_\rho(M)$, et on peut considérer $M \longrightarrow L_\rho(M)$ comme une représentation (de dimension 0 ou infinie !) de $Sp(n , \underline{R})$ dans $\mathcal{H}^p(\rho)$; si en particulier $p = 2$, on trouve ainsi une représentation

<u>unitaire</u> de $Sp(n, \underline{R})$ dans $\mathcal{H}^2(\rho)$; on verra plus tard qu'elle est irréductible.

Lorsque le paramètre α_n de ρ n'est pas entier, la situation est plus compliquée, attendu que l'expression $\rho(cz + d)$ n'a plus de sens. Pour obtenir une vue claire de la situation dans ce cas (qui se rencontre dans la théorie des formes modulaires "de poids non entier", étudiée par PETERSSON pour $n = 1$) il faudrait remplacer $Sp(n, \underline{R})$ par le groupe <u>simplement connexe</u> correspondant ; ce point de vue est exposé dans les articles cités de HARISH-CHANDRA. Mais on peut aussi, comme PETERSSON, adopter le point de vue des "systèmes de facteurs" ; c'est ce que nous allons faire ici pour ne pas nous écarter des sentiers battus.

La question est pour tout point z du demi-plan et toute matrice $M \in Sp(n, \underline{R})$ de définir l'opérateur

$$J_\rho(M, z) = \rho(cz + d)$$

d'une façon raisonnable, cette dernière condition signifiant que l'identité usuelle

$$J_\rho(M_1 M_2, z) = J_\rho(M_1, M_2 z)\, J_\rho(M_2, z)$$

doit encore être vraie <u>à un facteur près indépendant de</u> z (il n'est naturellement pas possible d'exiger plus !). Or on a

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha_n} . \pi(g)$$

où la représentation π de $GL_+(n, \underline{R})$ est polynomiale, donc s'étend automatiquement à $GL(n, \underline{C})$; il est donc naturel de poser

$$J_\rho(M, z) = \det(cz + d)^{\alpha_n} . \pi(cz + d) \quad ,$$

et l'on est ramené simplement à définir $\det(cz + d)^r$ pour tout nombre réel (non entier !) r .

Or comme le demi-plan de Siegel est <u>simplement connexe</u>, on peut pour tout M définir une fonction $A(M, z)$ de z , holomorphe et <u>uniforme</u>, de telle sorte que l'on ait

$$\det(cz + d) = \exp(2\pi i A(M, z)) \quad ;$$

cette fonction est unique à l'addition près d'un entier rationnel. Ceci dit, nous choisirons pour chaque $M \in Sp(n, \underline{R})$ une "détermination" de la fonction $A(M, z)$, et nous poserons, <u>par définition</u>,

$$\det(cz + d)^r = \exp(2\pi i r A(M , z)) .$$

Il est clair que quels que soient M_1 , M_2 on a une relation

$$A(M_1 M_2 , z) = A(M_1 , M_2 z) + A(M_2 , z) + \nu(M_1 , M_2)$$

où $\nu(M_1 , M_2)$ est un entier indépendant de z ; en définissant J_ρ comme on vient de l'expliquer on trouvera donc une formule

(28) $$J_\rho(M_1 M_2 , z) = \sigma_\rho(M_1 , M_2) J_\rho(M_1 , M_2 z) J_\rho(M_2 , z)$$

avec un facteur

$$\sigma_\rho(M_1 , M_2) = \exp(2\pi i \alpha_n . \nu(M_1 , M_2))$$

de module 1 , qui bien entendu disparaît si α_n est entier, et vérifie une identité de nature cohomologique qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire ... On ne peut pas, même dans la théorie la plus classique, éviter ces considérations : voir la célèbre fonction

$$\eta(z) = \sqrt[24]{\Delta(z)}$$

de Dedekind.

Cela dit, et les facteurs d'automorphie $J_\rho(M , z)$ étant ainsi choisis, nous ferons opérer le groupe $Sp(n , \underline{R})$ sur $\mathcal{H}(\rho)$ par la formule habituelle :

$$L_\rho(M) f(z) = J_\rho(M , z)^{-1} f(Mz) .$$

On n'a plus cette fois de représentation de $Sp(n , \underline{R})$, mais on a cependant l'identité

(29) $$L_\rho(M_1 M_2) = \sigma_\rho(M_1 , M_2)^{-1} L_\rho(M_1) L_\rho(M_2) ,$$

suffisamment simple pour qu'il ne se présente pas de difficulté sérieuse par rapport au cas usuel, et un calcul facile montre que ces opérateurs sont encore <u>isométriques</u> dans les divers $\mathcal{H}^p(\rho)$.

Notons encore que la définition de $\rho(cz + d)$ ne présente pas de problème pour les matrices M telles que $c = 0$; on peut donc supposer, cela permet de simplifier quelque peu les calculs, que $J_\rho(M , z)$, dans ce cas, a la valeur évidente $\rho(d)$.

7. La fonction noyau de $\mathcal{H}^2(\rho)$.

Dans ce numéro, on considère une représentation ρ de $GL_+(n , \underline{R})$ telle que $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, i.e. on suppose $\alpha_n > n$.

Puisque la convergence dans $\mathcal{H}^2(\rho)$ implique la convergence en chaque point, il est clair que pour tout vecteur $\underline{a} \in F$ (espace de ρ) et tout z , la formule

$$f \longrightarrow \langle f(z) , \underline{a} \rangle$$

définit sur $\mathcal{H}^2(\rho)$ une forme linéaire continue ; il y a donc une fonction et une seule $k_{z;\underline{a}}$ dans $\mathcal{H}^2(\rho)$ telle que l'on ait

$$\langle f(z) , \underline{a} \rangle = \langle f , k_{z;\underline{a}} \rangle = \int_{Im(\zeta)\gg 0} \langle \rho(\eta) f(\zeta) , k_{z;\underline{a}}(\zeta) \rangle d\zeta$$

pour toute $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$. Comme évidemment $k_{z;\underline{a}}$ est fonction linéaire de $\underline{a}$, on peut écrire

$$k_{z;\underline{a}}(\zeta) = K_\rho(z , \zeta)^* \underline{a}$$

où $K_\rho(z , \zeta)$ est un endomorphisme de F , qui est fonction holomorphe de z et de $\bar{\zeta}$, et vérifie

$$K_\rho(z_1 , z_2)^* = K_\rho(z_2 , z_1)$$

comme on le voit facilement. C'est la fonction-noyau à la Bergmann de $\mathcal{H}^2(\rho)$; il est clair que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$ on a la relation

(30) $$\boxed{f(z) = \int_{Im(\zeta)\gg 0} K_\rho(z , \zeta)\, \rho(\eta)\, f(\zeta)\, d\zeta} ,$$

l'intégrale étant absolument convergente (produit de deux fonctions de carré sommable). On pourrait, comme dans le cas classique, exprimer K_ρ à l'aide d'une base orthonormale de $\mathcal{H}^2(\rho)$, mais ce point importe peu.

THÉORÈME 5. - On a la relation

(31) $$K_\rho(z_1 , z_2) = c(\rho).\rho\left(\frac{z_1 - \bar{z}_2}{2i}\right)^{-1}$$

où $c(\rho)$ est une constante ne dépendant que de ρ .

Ecrivons en effet la relation

$$\langle L_\rho(M)f , k_{z;\underline{a}} \rangle = \langle f , L_\rho(M)^{-1} k_{z;\underline{a}} \rangle$$

qui exprime que $L_\rho(M)$ est unitaire. En explicitant il vient facilement la relation

$$f(Mz) = \int J_\rho(M\,,\,z)\; K_\rho(z\,,\,M^{-1}\zeta)\; J_\rho(M\,;\,M^{-1}\zeta)^*\; \rho(\eta)\; f(\zeta)\; d\zeta \quad ;$$

vu l'unicité de la fonction noyau, on tire de là

$$K_\rho(Mz\,,\,\zeta) = J_\rho(M\,,\,z)\; K_\rho(z\,,\,M^{-1}\zeta)\; J_\rho(M\,,\,M^{-1}\zeta)^*$$

ou enfin

(32) $$\boxed{K_\rho(Mz_1\,,\,Mz_2) = J_\rho(M\,,\,z_1)\; K_\rho(z_1\,,\,z_2)\; J_\rho(M\,,\,z_2)^*}$$

(NB. - Comme $J_\rho(M\,,\,z)$ est déterminé à un facteur de module 1 près, <u>qui ne dépend pas de</u> z, le second membre est bien indépendant du choix de ce facteur).

Prenons tout d'abord $M\,:\; z \longrightarrow z + s$; il vient

$$K_\rho(z_1 + s\,,\,z_2 + s) = K_\rho(z_1\,,\,z_2) \quad ;$$

donc

$$K_\rho(z_1\,,\,z_2) = A(z_1 - \overline{z}_2)$$

où $A(z)$ est holomorphe pour $\mathrm{Im}(z) \gg 0$. Prenant maintenant $M\,:\; z \longrightarrow gzg'$ avec $g \in GL_+(n\,,\,\underline{R})$ il vient

$$A(gzg') = \rho(g')^{-1}\, A(z)\, \rho(g)^{-1} \quad ,$$

et donc nécessairement

$$A(iy) = \rho(y^{-1/2})\, A(i)\, \rho(y^{-1/2}) \;.$$

Il ne nous reste évidemment plus qu'à prouver que <u>l'opérateur</u> $A(i)$ <u>est un scalaire</u> (ce serait même superflu si ρ était de dimension 1 ...)

Prenons pour cela

$$M = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad w = iv + u \in U(n) \quad ;$$

on a donc $M(i) = i$; la relation (32) pour $z_1 = z_2 = i$ donne alors

(33) $$A(2i) = \rho(w)\; A(2i)\; \rho(w)^* \quad ;$$

bien entendu, on pose ici $\rho(w) = \rho(vi + u) = J_\rho(M , i)$, de sorte que $\rho(w)$ est déterminé modulo un facteur complexe de module 1 ; plus précisément, si

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha_n}.\pi(g) \quad , \quad g \in GL_+(n , \underline{R}) \quad ,$$

on a

$$\rho(w) = \det(w)^{\alpha_n}.\pi(w)$$

où figure l'une quelconque des puissances α_n-ièmes du déterminant de w , et où $\pi(w)$ est défini sans ambiguïté puisque π est polynômiale. Or comme α_n est réel, il est clair que $\det(w)^{\alpha_n}$ est de module 1 ; donc la relation (33) s'écrit en fait sous la forme

$$\Lambda(2i) = \pi(w)\ \Lambda(2i)\ \pi(w)^* = \pi(w)\ \Lambda(2i)\ \pi(w)^{-1} \quad ,$$

et comme π , restreinte à $U(n)$, est irréductible, tout est démontré.

REMARQUE. - Si l'on prend dans la formule (31) la "détermination principale" de $\rho(z/i)$, à savoir celle qui est "positive" pour $z = iy$, la constante $c(\rho)$ est nécessairement > 0 . Il est possible de la calculer explicitement en utilisant les méthodes de HARISH-CHANDRA. Pour ρ de dimension 1 on donnera le résultat complet à la fin du numéro suivant.

Indiquons deux corollaires du théorème 5 :

COROLLAIRE 1. - <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$ <u>on a la relation</u>

$$f(z_1) = c(\rho) \int_{\mathrm{Im}(z_2)\gg 0} \rho\left(\frac{z_1 - \overline{z}_2}{2i}\right)^{-1} \rho(y_2)\ f(z_2)\ dz_2 \quad . \tag{34}$$

C'est trivial.

COROLLAIRE 2. - <u>L'espace</u> $\mathcal{H}^2(\rho)$ <u>est toujours contenu dans l'espace</u> $\mathcal{H}^\infty(\rho)$.

En effet, pour tout $\underline{a} \in F$, on a (CAUCHY-SCHWARZ)

$$|\langle f(z) , \underline{a} \rangle|^2 = |\langle f , k_{z;\underline{a}} \rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2 . \langle k_{z;\underline{a}} , k_{z;\underline{a}} \rangle$$

$$= \|f\|_2^2 . \langle k_{z;\underline{a}}(z) , \underline{a} \rangle = \|f\|_2^2 . \langle K_\rho(z , z)^* \underline{a} , \underline{a} \rangle$$

$$= c(\rho) . \|f\|_2^2 . \|\rho(y)^{-1/2}\ \underline{a}\|^2$$

d'où immédiatement (en remplaçant $\underline{a}$ par $\rho(y^{1/2})\underline{a}$) la relation

$$\| \rho(y^{1/2})\ f(z) \| \leqslant c(\rho) . \|f\|_2 \ ,$$

ce qui établit notre assertion.

8. Transformée de Fourier de la fonction-noyau.

Nous allons dans ce numéro calculer la transformée de Fourier

$$\hat{K}_\rho(s\ ,\zeta) = \int K_\rho(z\ ,\zeta)\ \exp(-\ 2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ dx$$

de la fonction noyau. Pour cela considérons un vecteur $\underline{a} \in F$ et la fonction

$$k_{z;\underline{a}}(\zeta) = K_\rho(z\ ,\zeta)^* \underline{a} = K_\rho(\zeta\ ,\ z)\underline{a}\ \ ;$$

il est clair qu'on a

$$\hat{k}_{z;a}(s) = \int K_\rho(\zeta\ ,\ z)\underline{a}.\exp(-\ 2\pi i\ \mathrm{Tr}(s\zeta))\ d\zeta = \hat{K}_\rho(s\ ,\ z)\underline{a}\ \ ;$$

or pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$ on a

$$\langle f(z)\ ,\ \underline{a}\rangle = \langle f\ ,\ k_{z;\underline{a}}\rangle\ \ ,$$

et par suite (la transformation de Fourier est un isomorphisme entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^2(\rho)$ et $\widehat{\mathcal{H}}^2(\rho)$ définis au n° 5) il vient

$$\int_{s \gg 0} \langle H_\rho(4s)\ \hat{f}(s)\ ,\ \hat{K}_\rho(s\ ,\ z)\underline{a}\rangle\, ds = \langle f(z)\ ,\ \underline{a}\rangle$$

$$= \int_{s \gg 0} \langle \hat{f}(s)\ ,\ \underline{a}\rangle\ \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ ds$$

d'après la formule d'inversion du lemme 6 . Comme $\hat{f}$ est l'élément le plus général de $\widehat{\mathcal{H}}^2(\rho)$, on trouve donc la relation

$$\hat{K}_\rho(s\ ,\ z)^*\ H_\rho(4s) = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))$$

ou encore

$$\boxed{\hat{K}_\rho(s\ ,\ z) = H_\rho(4s)^{-1}\ \exp(-\ 2\pi i\ \mathrm{Tr}(s\bar{z}))}\ . \tag{35}$$

Appliquant à cette fonction le lemme 6 , on trouve donc le résultat suivant :

THÉORÈME 6. - Soit ρ une représentation irréductible de $GL_+(n\ ,\ \underline{R})$ de plus haut poids

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i} \quad \underline{\text{avec}} \quad \alpha_n > n .$$

on a alors pour $\mathrm{Im}(z) \gg 0$ la relation

(36) $$c(\rho).\rho(z/2i)^{-1} = \int_{s \gg 0} H_\rho(4s)^{-1} \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \, ds \quad ,$$

l'intégrale figurant au second membre étant absolument convergente.

On déduit évidemment de là qu'on a

$$H_\rho(4s)^{-1} = c(\rho) \int \rho(z/2i)^{-1} \exp(-2\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \, dx \quad ;$$

nous démontrerons dans un prochain exposé que cette formule, qui pour le moment n'a de sens qu'au point de vue L^2, est en fait valable pour toute matrice $s \gg 0$ sans exception, l'intégrale figurant au second membre étant de plus absolument convergente et nulle si s n'est pas $\gg 0$.

On notera que la formule (36) s'écrit encore sous la forme

$$2^{n(n+1)} c(\rho) \; \rho(z/i)^{-1} = \int H_\rho(s)^{-1} \exp(\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \, ds \quad ;$$

tenant compte de la relation

$$H_\rho(s) = \det(s)^{1/2(n+1)} \; \rho(s^{-1/2}) \; H(\rho) \; \rho(s^{-1/2})$$

(théorème 3) il vient donc

$$2^{n(n+1)} c(\rho) \; \rho(z/i)^{-1} = \int_{s \gg 0} \rho(s^{+1/2}) H(\rho)^{-1} \rho(s^{+1/2}) \exp(\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \det(s)^{-(n+1)/2} \, ds .$$

Dans le cas où

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha} \quad ,$$

il vient donc, pour $z = i$, la relation

$$2^{n(n+1)} c(\rho) = H(\rho)^{-1} \int \exp(-\pi \, \mathrm{Tr}(s)) \det(s)^{\alpha-(n+1)/2} \, ds \quad ;$$

tenant compte de la valeur trouvée au n° 3 pour $H(\rho)$ il résulte de là que

$$2^{n(n+1)} c(\rho) = \pi^{-n(n+1)/2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\frac{3}{2}) \ldots \Gamma(\alpha+\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\frac{1}{2}) \ldots \Gamma(\alpha-\frac{n-1}{2})} \quad ,$$

ce qui permet le calcul complet de $c(\rho)$ dans ce cas ; on trouve

$$c(\rho) = (4\pi)^{-n(n+1)/2} \prod_{p=0}^{n-1} (\alpha-\tfrac{p}{2})(\alpha-\tfrac{p}{2}+1) \ldots (\alpha+\tfrac{p}{2}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et GODEMENT (R.). - Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 64, 1947, p. 79-99.

La référence fondamentale est :

HARISH-CHANDRA. - Representations of semi-simple Lie groups, IV, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 743-777 ; V, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 1-41 ; VI, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 564-628.

La théorie a fait l'objet d'un excellent résumé par :

BRUHAT (François). - Travaux de Harish-Chandra [sur la représentation des groupes de Lie], Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.

Pour le cas classique $n = 1$, voir :

BARGMANN (V.). - Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 568-640.

(les espaces $\mathcal{H}^2(\rho)$ interviennent pour définir la "série discrète" de représentations de Bargmann).

L'utilisation d'un produit scalaire dans la théorie des formes modulaires remonte à :

PETERSSON (Hans). - Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Ann., t. 117, 1940, p. 453-537.

La fonction-noyau du demi-plan de Siegel (pour ρ de dimension 1) apparait dans :

SELBERG (A.). - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Ind. math. Soc., t. 20, 1956, p. 47-87 ; voir la formule pour ω_k page 86.

Enfin, l'intégrale de Siegel se trouve dans :

SIEGEL (Carl Ludwig). - Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Math., Series 2, t. 36, 1935, p. 527-606 ; Hilfssatz 37.