C. CHEVALLEY

Les schémas

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A5_0>

Séminaire E.N.S., 1955/1956
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

LES SCHÉMAS

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 12.12.1955)

Nous supposerons fixés une fois pour toutes un corps K et un sur-corps L de type fini sur K. Nous appellerons <u>algèbre affine</u> une sous-algèbre de L (L étant considéré comme algèbre sur K) qui est de type fini.

1.- Localités.

On appelle <u>localité</u> (de L) tout anneau qui est anneau local d'un idéal premier d'une algèbre affine A ; on dit alors que A est une <u>algèbre de définition</u> de la localité.

Les localités étant des anneaux locaux, on peut leur appliquer la notion de domination, définie en général pour les anneaux locaux (Exposé 1 , paragraphe 4). Dire qu'une localité M' domine une localité M , c'est donc dire que $M \subset M'$, et que l'idéal premier maximal de M (que nous désignerons par $\underline{r}(M)$) est contenu dans celui de M' . La relation de domination établit une relation d'ordre dans l'ensemble des localités. La remarque suivante sera souvent utile : pour qu'une localité M domine au moins une localité d'une algèbre affine A , il faut et il suffit que $M \supset A$.

On dit que des localités M et M' sont <u>apparentées</u> s'il y a un anneau local contenu dans L qui les domine toutes les deux. Si deux localités M et M' sont apparentées, il existe une <u>localité</u> qui les domine toutes les deux. Soient en effet A et A' des algèbres de définition de M et M' , et soit $\underline{o}$ un sous-anneau local de L qui domine M et M' . L'anneau $\underline{o}$ contient alors $K[A , A'] = A''$, qui est une algèbre affine ; $\underline{p} = \underline{r}(\underline{o}) \cap A''$ est un idéal premier de A'' dont les intersections avec A et A' sont $\underline{r}(\underline{o}) \cap M \cap A = \underline{r}(M) \cap A$ et $\underline{r}(M') \cap A'$ respectivement ; il en résulte immédiatement que $A''_{\underline{p}}$, qui est une localité, domine M et M' .

<u>Proposition 1.- Si des localités apparentées</u> M <u>et</u> M' <u>ont une algèbre de définition commune</u> A , <u>elles sont égales</u>.

On a $M = A_{\underline{m}}$, $M' = A_{\underline{m}'}$, $\underline{m}$ et $\underline{m}'$ étant des idéaux premiers de A et A' . Soit $\underline{o}$ un anneau local qui domine M et M' ; $\underline{r}(\underline{o})$ contient donc $\underline{m}A_{\underline{m}} = \underline{r}(M)$ et $\underline{m}'A_{\underline{m}'}$. S'il y avait dans $\underline{m}$ un élément x n'appartenant pas à $\underline{m}'$, x^{-1} serait dans M' , tandis que x appartiendrait à $\underline{r}(\underline{o})$, ce qui est impossible. On a donc $\underline{m} \subset \underline{m}'$, et on voit de même que $\underline{m}' \subset \underline{m}$.

On dit qu'une localité M est une *spécialisation* d'une localité N s'il existe un idéal premier $\underline{p}$ de M tel que $N = M_{\underline{p}}$.

Proposition 2.- Si une localité M *est spécialisation d'une localité* N , *toute algèbre de définition* A *de* M *en est aussi une de* N ; *pour que* $A_{\underline{m}}$ *soit spécialisation de* $A_{\underline{q}}$, il faut et il suffit que $\underline{m} \supset \underline{q}$.

Soit $M = A_{\underline{m}}$, où $\underline{m}$ est un idéal premier de A . Si $N = M_{\underline{p}}$, où $\underline{p}$ est un idéal premier de M , on peut écrire $\underline{p} = \underline{q}M$, où $\underline{q}$ est un idéal premier de A contenu dans $\underline{m}$, et on a $N = A_{\underline{q}}$ (cf. Exposé 1, proposition 2). Réciproquement, si $\underline{m} \supset \underline{q}$, soit $M = A_{\underline{m}}$, $\underline{p} = \underline{q}M$; alors $A_{\underline{q}} = M_{\underline{p}}$, et M est spécialisation de N .

La proposition 2 entraîne : si M est spécialisation de N et N spécialisation de P , alors M est spécialisation de P .

Soient M une localité, A une algèbre de définition de A et $\underline{m}$ l'idéal premier $\underline{r}(M) \cap A$ de A , d'où $M = A_{\underline{m}}$. Le corps $M/\underline{r}(M)$ s'identifie au corps des fractions de $A/\underline{m}$; c'est une algèbre sur K , dont le degré de transcendance sur K sera appelé la *dimension de* M ; nous désignerons ce nombre par d . Le degré de transcendance sur K du corps des fractions de M (qui est aussi celui de A , donc égal à la dimension de A) sera appelé le *niveau de* M ; désignons ce nombre par ν . Il résulte de ce que nous avons dit à propos des algèbres affines (exposé 4, théorème 2) que l'on a $d \leq \nu$ et que toute chaîne d'idéaux premiers de A tous contenus dans $\underline{m}$ peut être incluse dans une chaîne de longueur $\nu - d$ commençant par $\{0\}$ et se terminant par $\underline{m}$. Tenant compte de la correspondance biunivoque qui existe entre idéaux premiers de M et idéaux premiers de A contenus dans $\underline{m}$, on en conclut que toute chaîne d'idéaux premiers de M peut être incluse dans une chaîne de longueur $\nu - d$; le nombre $\nu - d$ s'appelle la *hauteur* de la localité M .

La hauteur d'une localité peut encore se caractériser d'une autre manière. Appelons *primaire* un idéal de M , distinct de M , qui contient une puissance de l'idéal premier maximal $\underline{r}(M)$ (i.e. qui n'est contenu dans aucun autre idéal premier de M que $\underline{r}(M)$; (cf. exposé 2 , proposition 6). On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.- La hauteur d'une localité M *est le plus petit nombre* r *tel qu'il existe un idéal primaire de* M *engendré par* r *éléments.*

Soient A une algèbre de définition de A et $\underline{m} = \underline{r}(M) \cap A$. Soient $x_1, \dots, x_s$ des éléments de M et $\underline{p}$ un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{a}$ engendré par ces éléments. Comme tout élément de M est le produit d'un élément de A par un élément inversible de M, $\underline{a}$ est engendré par s éléments $x'_1, \dots, x'_s$ de A. L'idéal premier $\underline{p}' = \underline{p} \cap A$ de A est manifestement un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{a}'$ engendré par $x'_1, \dots, x'_s$; on a donc $\dim A'/\underline{p}' \geq \nu - s$ (exposé 4, proposition 3), si $\nu = \dim A$ est le niveau de M. Si $\underline{p} = \underline{r}(M)$, on a $\underline{p}' = \underline{m}$, $\nu - s \leq d$, où d est la dimension de M, et s est au moins égal à la hauteur de M. Par ailleurs, il y a $\nu - d$ éléments $y_1, \dots, y_{\nu-d}$ de $\underline{m}$ tels que $\underline{m}$ soit un idéal premier minimal de l'idéal engendré par ces éléments dans A (esposé 4, proposition 4); l'idéal engendré par ces éléments dans M est alors primaire.

2.- Schémas affines. Topologie de Zariski.

On appelle schéma affine (dans L) un ensemble de localités qui est l'ensemble des anneaux locaux de tous les idéaux premiers d'une algèbre affine A. Cette dernière est alors uniquement déterminée par la donnée du schéma ; en effet :

Proposition 4.- Toute algèbre affine est l'intersection de ses localités.

Plus généralement :

Proposition 4 bis.- Soit A un anneau d'intégrité ; A est alors l'intersection des anneaux locaux de ses idéaux premiers maximaux.

Soit en effet z un élément de l'intersection des anneaux locaux des idéaux premiers maximaux de A ; soit $\underline{a}$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $az \in A$; c'est manifestement un idéal. Si $\underline{m}$ est un idéal premier maximal, il résulte de ce que $z \in A_{\underline{m}}$ que $\underline{a}$ n'est pas contenu dans $\underline{m}$. L'idéal $\underline{a}$, qui n'est contenu dans aucun idéal premier maximal, contient 1, ce qui démontre la proposition.

Revenant aux notations employées ci-dessus, on dit que l'algèbre affine A est l'algèbre du schéma affine considéré.

Soit S un schéma affine d'algèbre A. A tout idéal $\underline{a}$ de A on associe l'ensemble $E(\underline{a})$ des anneaux locaux des idéaux premiers contenant $\underline{a}$. Si les $\underline{a}_i$ sont des idéaux de A, $E(\sum_i \underline{a}_i) = \bigcap_i E(\underline{a}_i)$; si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des idéaux de A, $E(\underline{a} \cap \underline{b}) = E(\underline{ab}) = E(\underline{a}) \cup E(\underline{b})$; on a $E(A) = \emptyset$ et $E(\{0\}) = S$; les $E(\underline{a})$ sont donc les ensembles fermés d'une topologie sur S, qu'on appelle la topologie de Zariski. A tout ensemble fermé E de la topologie de Zariski, on associe l'idéal $\underline{a}(E)$, intersection des idéaux premiers dont les anneaux locaux appartiennent à E ; on a manifestement $E = E(\underline{a}(E))$. Si E et F sont des parties fermées de S, une condition nécessaire et suffisante pour que $E \subset F$ est que $\underline{a}(F) \subset \underline{a}(E)$. Tenant compte de ce que A est noethérien, on en conclut que tout ensemble non vide de parties fermées de S admet un élément minimal.

Soit P un élément quelconque de S ; cherchons à déterminer l'adhérence E de l'ensemble $\{P\}$. Soit $P = A_{\underline{p}}$, où $\underline{p}$ est un idéal premier de A. Si E est un ensemble fermé, une condition nécessaire et suffisante pour que $P \in E$ est que $\underline{p}$ contienne l'idéal $\underline{a}(E)$ défini ci-dessus ; E contient alors aussi les anneaux locaux de tous les idéaux premiers qui contiennent $\underline{p}$; ces derniers appartiennent donc à l'adhérence de $\{P\}$. L'ensemble des anneaux locaux des idéaux premiers contenant $\underline{p}$ est $E(\underline{p})$; comme il est fermé et contient P, c'est l'adhérence de $\{P\}$. D'où, compte tenu de la proposition 2 :

<u>Proposition 5.- Si</u> P <u>est un élément d'un schéma affine</u> S, <u>l'adhérence de</u> P <u>dans</u> S <u>est l'ensemble des éléments de</u> S <u>qui sont des spécialisations de</u> P.

Soit maintenant $E = E(\underline{a})$ une partie fermée quelconque de S, $\underline{a}$ étant un idéal de A. Soient $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_h$ les idéaux premiers minimaux de $\underline{a}$, $P_1, \ldots, P_h$ leurs anneaux locaux. Pour qu'un idéal premier contienne $\underline{a}$, il faut et suffit qu'il contienne l'un des $\underline{p}_i$; on en conclut que E se compose de toutes les localités de S qui sont spécialisation de l'une au moins des localités $P_1, \ldots, P_h$.

3.- <u>Schémas. Schémas projectifs.</u>

<u>Définition</u> : <u>On appelle schéma du corps</u> L <u>un ensemble</u> S <u>de localités de</u> L <u>qui possède les propriétés suivantes</u> : a) S <u>peut se représenter comme réunion d'un nombre fini de schémas affines</u> ; b) <u>deux localités distinctes appartenant à</u> S <u>ne sont jamais apparentées</u>.

Soit H un espace vectoriel de dimension finie > 0 sur K, contenu dans L. A tout élément $u \neq 0$ de H, associons l'algèbre affine A_u engendrée sur K par les éléments de $u^{-1}H$; soit S_u le schéma affine d'algèbre A_u. On se propose de montrer que la réunion S des S_u (pour tous les $u \neq 0$ de H) est un schéma. Soient u et u' des éléments $\neq 0$ de H, $\underline{p}$ un idéal premier de A_u et $\underline{p}'$ un idéal premier de $A_{u'}$ tels que $(A_u)_{\underline{p}}$ et $(A_{u'})_{\underline{p}'}$ soient apparentés ; nous voulons montrer que ces localités sont identiques. L'inverse de $u^{-1}u'$ étant dans $A_{u'}$, $u^{-1}u'$ n'est pas dans $\underline{p}$, et, si $v \in H$, $u'^{-1}v = (u^{-1}u')^{-1}u^{-1}v$ est dans $(A_u)_{\underline{p}}$, d'où $A_{u'} \subset (A_u)_{\underline{p}}$. De plus, on a $A_{u'} - \underline{p}' \subset (A_u)_{\underline{p}} - \underline{p}(A_u)_{\underline{p}}$; en effet, il existerait dans le cas contraire un élément de $\underline{p}(A_u)_{\underline{p}}$ dont l'inverse serait dans $(A_{u'})_{\underline{p}'}$, ce qui est impossible, $(A_{u'})_{\underline{p}'}$ et $(A_u)_{\underline{p}}$ étant apparentées. On a donc $(A_{u'})_{\underline{p}'} \subset (A_u)_{\underline{p}}$; on établirait de même l'inclusion $(A_u)_p \subset (A_{u'})_{p'}$, d'où $(A_u)_p = (A_{u'})_{p'}$.

Soit maintenant $(u_1 , \ldots , u_n)$ une base de H , et soient u un élément quelconque $\neq 0$ de H et $\underline{p}$ un idéal premier de A_u . Il est clair qu'il y a au moins un i tel que $u^{-1}u_i \notin \underline{p}$; on a alors $A_{u_i} \subset (A_u)_{\underline{p}}$; si $\underline{q}$ est l'idéal premier $A_{u_i} \cap \underline{p}(A_u)_{\underline{p}}$, $(A_u)_{\underline{p}}$ domine $(A_{u_i})_{\underline{q}}$ et lui est par suite égal ; il en résulte que S est la réunion des S_{u_i} , ce qui montre que S est un schéma. On dit que S est le <u>schéma projectif</u> défini par H ; un schéma qui peut être défini comme schéma projectif défini par un espace vectoriel convenable H est appelé un schéma projectif. Il est clair que, si x est un élément $\neq 0$ quelconque de L , les schémas projectifs définis par H et par xH sont identiques.

4.- <u>Schémas complets</u>.

Un schéma S est dit <u>complet</u> si toute localité du corps des fractions de S est apparentée à au moins une localité de S .

<u>Proposition 6.- Soient</u> S <u>un schéma du corps</u> L <u>et</u> F <u>son corps des fractions. Les conditions suivantes sont alors équivalentes</u> : a) S <u>est complet</u>;
b) <u>tout anneau de valuation de</u> F <u>contenant</u> K <u>domine une localité de</u> S ;
c) <u>tout anneau de valuation de</u> L <u>contenant</u> K <u>domine une localité de</u> S ;
d) <u>toute localité de</u> L <u>est apparentée à au moins une localité de</u> S .

Supposons qu'il existe un anneau de valuation V de F contenant K qui ne domine aucune localité de S . Représentons S comme réunion de schémas affines $S_1 , \ldots , S_r$ d'algèbres $A_1 , \ldots , A_r$. S'il y avait un i tel que $V \supset A_i$, V dominerait l'anneau local de l'idéal premier $A_i \cap \underline{r}(V)$ de A_i , ce qui est impossible. Il y a donc pour tout i un $x_i \in A_i$ n'appartenant pas à V ; soit $B = K[x_1^{-1} , \ldots , x_r^{-1}]$, $\underline{p} = B \cap \underline{r}(V)$; les x_i^{-1} sont dans $\underline{r}(V)$, et $\underline{p}$ est un idéal premier de B . Il est clair que, pour tout i , l'idéal engendré par $\underline{p}$ dans $B[A_i]$ contient 1 , donc que $B_{\underline{p}}$ n'est apparenté à aucune localité de S_i ; S n'est donc pas complet, et a) entraîne b) . Si V est un anneau de valuation de L , $V \cap F$ est un anneau de valuation de F ; b) entraîne donc c) . Supposons c) satisfaite; une localité M de L est dominée par un anneau de valuation V de L , qui contient alors K ; si M' est la localité de S dominée par V , M et M' sont apparentées ; c) entraîne donc d) , qui entraîne trivialement a) .

Si S est un schéma complet, il résulte immédiatement de la proposition 6 que l'intersection des localités de S est contenue dans tout anneau de valuation de L qui contient K , donc est un anneau entier sur K , i.e. un corps algébrique sur K . On en conclut (cf. proposition 4) qu'<u>un schéma affine qui contient plus d'un élément n'est jamais complet.</u>

<u>Proposition 7.- Tout schéma projectif</u> S <u>est complet.</u>

Supposons S défini au moyen d'un espace vectoriel H , et soit $(u_1 , \ldots , u_n)$ une base de H . Si V est un anneau de valuation de L contenant K , alors, quels que soient i et j , l'un des élément $u_i^{-1}u_j$, $u_j^{-1}u_i$ est dans V ; on peut donc supposer les u_i rangés dans un ordre tel que $u_i^{-1}u_j \in V$ si $i \leq j$ (car, si $u_i^{-1}u_j$ et $u_j^{-1}u_k$ sont dans V , il en est de même de $u_i^{-1}u_k$). On a alors $K[u_1^{-1}H] \subset V$, et V domine l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(V) \cap K[u_1^{-1}H]$ de $K[u_1^{-1}H]$, anneau local qui appartient à S .

<u>Proposition 8.- Si un schéma</u> S <u>contient un schéma complet</u> S' , <u>on a</u> $S = S'$.

Soit $M \in S$; il y a un anneau de valuation V du corps des fractions de S (qui est aussi celui de S') qui domine M ; or V domine par hypothèse une localité $M' \in S'$; comme M et M' sont apparentées, on a $M = M' \in S'$.

<u>Corollaire</u> : <u>Soit</u> S <u>un schéma projectif défini par un espace vectoriel</u> H ; <u>soit</u> $n > 0$, <u>et soit</u> H_n <u>l'espace vectoriel engendré par les produits de</u> n <u>éléments de</u> H ; <u>le schéma projectif</u> S' <u>défini par</u> H_n <u>est alors identique</u> à S .

Soit y un élément $\neq 0$ de H ; il est clair que $K[y^{-1}H] = K[y^{-n}H_n]$; S est donc contenu dans S' , d'où le résultat, S étant complet.