

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

P. CARTIER

C. CHEVALLEY

Extension du corps de base dans les schémas

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A15_1>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

15-01

EXTENSION DU CORPS DE BASE DANS LES SCHEMAS
(Exposé de P. CARTIER et C. CHEVALLEY, 19.3.1956)

EXTENSION DU CORPS DE BASE DANS LES SCHEMAS

1.- Extension des scalaires dans un schéma.

Soient K un corps, L une extension de K , S un schéma du corps L , F le corps des fractions de S , et enfin K' un surcorps de K contenu dans L et algébriquement disjoint de F (cette dernière condition ne sert pas au paragraphe 1).

Proposition 1.- a) La réunion $S^{K'}$ des schémas affines d'algèbres $K'[A]$, où A est une algèbre affine dont le schéma est contenu dans S , est un K' -schéma ;

b) Toute localité de $S^{K'}$ domine une localité de S ; tout anneau local de L qui contient K' et domine une localité de S domine une localité de $S^{K'}$. Les localités de $S^{K'}$ qui dominent $M \in S$ sont les localités de la forme $K'[M]_{\underline{m}}$ (\underline{m} idéal premier de $K'[M]$ contenant $\underline{r}(M)$, donc contenant l'idéal \underline{n} de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$) ;

c) Si S est réunion de schémas affines S_i d'algèbres affines A_i , $S^{K'}$ est réunion des schémas affines $S_i^{K'}$ d'algèbres affines $K'[A_i]$.

Pour préciser le corps de base envisagé, on dira K -algèbre affine, K -schéma, K -localité, etc...

Soit A une K -algèbre affine, et $A' = K'[A]$; si $M = A_{\underline{p}}$ est une K -localité appartenant au K -schéma affine S_A d'algèbre A , on a $K'[M] = K'[A]_{A-\underline{p}} = A'_{A-\underline{p}}$. La correspondance $\underline{m} \rightarrow \underline{m} \cap A'$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $K'[M]$ sur l'ensemble des idéaux premiers de A' qui ne rencontrent pas $A - \underline{p}$, i.e. dont l'intersection avec A est contenue dans \underline{p} . Il en résulte que cette correspondance est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $K'[M]$ qui contiennent $\underline{r}(M) = \underline{p}_{\underline{p}}^A$ sur les idéaux premiers de A' qui coupent A suivant \underline{p} ; et l'on a $K'[M]_{\underline{m}} = A'_{A' \cap \underline{m}}$.

Rappelons aussi qu'un anneau local V domine $A_{\underline{p}}$ si et seulement si $V \supset A$ et $A \cap \underline{r}(V) = \underline{p}$.

De ce qui précède, on déduit, en faisant varier \underline{p} parmi les idéaux premiers de A , que le K' -schéma $S_{A'}$ d'algèbre affine A' se compose des K' -localités de la forme $M' = K'[M]_{\underline{m}}$, avec $M \in S_A$ et \underline{m} idéal premier de

$K'[M]$ contenant $\underline{r}(M)$. Comme on a $M = A_{\underline{p}}$ avec $\underline{p} = (\underline{m} \cap A') \cap A = \underline{m} \cap A = \underline{r}(M') \cap A$, les localités de S_A , qui dominent $M \in S_A$ sont les localités $M' = K'[M]_{\underline{m}}$ où \underline{m} varie.

Si S est alors un schéma quelconque, il résulte du cas affine qu'on vient d'étudier que $S^{K'}$ est constitué par les K' -localités $M' = K'[M]_{\underline{m}}$ où M varie dans S et \underline{m} parmi les idéaux premiers de $K'[M]$ qui contiennent $\underline{r}(M)$; M' domine M , et comme deux localités distinctes de S ne sont pas apparentées, M est la seule localité de S dominée par M' . De plus si V est un anneau local de L contenant K' et dominant $M \in S$, V domine $K'[M]_{K'[M] \cap \underline{r}(V)} \in S^{K'}$.

De la caractérisation donnée plus haut de $S^{K'}$ résulte que si S est réunion des schémas S_i , $S^{K'}$ est réunion des ensembles $S_i^{K'}$; comme S est réunion d'une famille finie de schémas affines S_i d'algèbres A_i , $S^{K'}$ est réunion des schémas affines $S_i^{K'}$ d'algèbres $K'[A_i]$ en nombre fini. De plus deux localités de $S^{K'}$ ne sont jamais apparentées: en effet soient $M'_i = K'[M_i]_{\underline{m}_i}$ ($i = 1, 2$) deux localités de $S^{K'}$ apparentées; comme M'_i domine M_i , M_1 et M_2 sont apparentées donc égales, mais comme deux anneaux locaux de la forme B_p et B_q distincts ne sont pas apparentés, on a bien $M'_1 = M'_2$. On a donc démontré que $S^{K'}$ est un K' -schéma.

Corollaire 1: Si S est un K' -schéma complet (resp. projectif), $S^{K'}$ est un K' -schéma complet (resp. projectif).

Supposons S complet et soit V un anneau de valuation de L contenant K' ; comme S est complet, V domine une localité de S , donc une localité de $S^{K'}$ d'après la proposition 1, b), et par suite $S^{K'}$ est complet. Si S est projectif, on peut par définition trouver n éléments u_i ($1 \leq i \leq n$) de L tel que S soit réunion des schémas affines d'algèbres $K[u_j/u_i]_{1 \leq j \leq n} = A_i$, donc $S^{K'}$ est réunion des schémas affines d'algèbres $K'[A_i] = K'[u_j/u_i]_{1 \leq j \leq n}$, donc est projectif.

Corollaire 2: les localités de $S^{K'}$ qui dominent une localité $M \in S$ sont spécialisation d'un nombre fini d'entre elles, à savoir les localités $K'[M]_{\underline{m}_i}$, où les \underline{m}_i sont les idéaux premiers minimaux de l'idéal \underline{n} engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$.

En effet, les idéaux premiers minimaux \underline{m}_i de \underline{n} sont en nombre fini puisque $K'[M] = K'[A]_{A-\underline{p}}$ ($M = A_{\underline{p}}$) est un anneau noethérien ; tout idéal premier \underline{m} de $K'[M]$ contenant \underline{n} contient l'un des \underline{m}_i , et par suite $K'[M]_{\underline{m}}$ est spécialisation de $K'[M]_{\underline{m}_i}$.

Les résultats précédents conduisent à introduire les notions suivantes : soit M une K -localité ; on notera $C_{K'}(M)$ l'ensemble des K' -localités de la forme $K'[M]_{\underline{m}}$ où \underline{m} est un idéal premier de $K'[M]$ contenant l'idéal \underline{n} de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$; les localités de $C_{K'}(M)$ correspondant aux idéaux premiers minimaux de \underline{n} sont dites les localités déduites de M par l'extension K'/K .

2.- Extensions successives du corps des scalaires.

Soit K'' un surcorps de K' contenu dans L . Si M' est une localité déduite de M par l'extension K'/K et M'' une localité déduite de M' par l'extension K''/K' , M'' est une localité déduite de M par l'extension K''/K . Soit en effet $M' = (K'[M])_{\underline{m}}$, $M'' = (K''[M'])_{\underline{m}'}$, où \underline{m} est un idéal premier minimal de l'idéal \underline{n} engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$, et \underline{m}' un idéal premier minimal de l'idéal \underline{n}' engendré par $\underline{r}(M')$ dans $K''[M']$. Si $S = K'[M] - \underline{m}$, on a $M' = (K'[M])_S$, d'où $K''[M'] = (K''[M])_S$. Soit $\underline{m}'' = \underline{m}' \cap K''[M]$; M'' est alors l'anneau local de l'idéal premier \underline{m}'' de $K''[M]$ (Exposé 1, proposition 2). Cet idéal contient $\underline{r}(M)$; c'est un idéal premier minimal de l'idéal \underline{n}'' engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$. Soit en effet \underline{m}''_1 un idéal premier contenu dans \underline{m}'' et contenant $\underline{r}(M)$; alors \underline{m}''_1 est de la forme $\underline{m}''_1 \cap K''[M]$, où \underline{m}''_1 est un idéal premier de $K''[M']$ contenu dans \underline{m}' et contenant $\underline{r}(M)$ (exposé 1, proposition 1). L'idéal $\underline{m}''_1 \cap M'$ est contenu dans $\underline{r}(M')$, donc $\underline{m}''_1 \cap K'[M]$ est contenu dans $\underline{m} = \underline{r}(M') \cap K'[M]$; comme $\underline{m}''_1 \cap K'[M]$ contient \underline{n} , cet idéal est identique à \underline{m} , et $\underline{m}''_1 \cap M' = \underline{r}(M')$; \underline{m}''_1 contient donc \underline{n}' ; comme $\underline{m}''_1 < \underline{m}'$, on a $\underline{m}''_1 = \underline{m}'$, d'où $\underline{m}''_1 = \underline{m}''$, ce qui montre que \underline{m}'' est un idéal premier minimal de \underline{n}'' . Il en résulte bien que M'' est une localité déduite de M par l'extension K''/K .

Soit réciproquement M'' une localité déduite de M par l'extension K''/K . Alors M'' est anneau local d'un idéal premier minimal \underline{m}'' de l'idéal \underline{n}'' engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$. Posons $\underline{m} = K'[M] \cap \underline{m}''$, et soit M'

l'anneau local de \underline{m} . Montrons que M'' est une localité déduite de M' par l'extension K''/K' . On a $K''[M] \subset K''[M'] \subset M''$; comme M'' est anneau local de \underline{m}'' , c'est aussi l'anneau local de l'idéal premier $\underline{m}' = \underline{r}(M'') \cap K''[M']$ de $K''[M']$. Soit \underline{n}' l'idéal engendré par $\underline{r}(M')$ dans $K''[M']$; $\underline{r}(M')$ est engendré par \underline{m} , qui est contenu dans \underline{m}'' , donc dans \underline{m}' , d'où $\underline{n}' \subset \underline{m}'$. Montrons que \underline{m}' est un idéal premier minimal de \underline{n}' . Si $S = K'[M] - \underline{m}$, M' est l'anneau de fractions de la partie S de $K'[M]$, d'où il résulte que $K''[M']$ est l'anneau des fractions de la partie S de $K''[M]$; il suffira donc de montrer que $\underline{m}' \cap K''[M] = \underline{r}(M'') \cap K''[M] = \underline{m}''$ est un idéal premier minimal de $\underline{n}' \cap K''[M]$. Or, \underline{n}' contient $\underline{r}(M')$, donc aussi $\underline{m} = K'[M] \cap \underline{m}''$ qui contient $\underline{r}(M)$ puisque $\underline{r}(M) \subset \underline{m}''$; donc $\underline{n}' \cap K''[M]$ contient l'idéal \underline{n}'' engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$; on a

$$\underline{n}'' \subset \underline{n}' \cap K''[M] \subset \underline{m}' \cap K''[M] = \underline{m}'' \quad ;$$

comme \underline{m}'' est un idéal premier minimal de \underline{n}'' , c'est aussi un idéal premier minimal de $\underline{n}' \cap K''[M]$. On voit donc que M'' est une localité déduite de M' par l'extension K''/K' . Par ailleurs, il est clair que M' est une spécialisation d'une localité déduite de M par l'extension K'/K ; de plus, $\underline{r}(M') \cap M = \underline{m} \cap M = \underline{m}'' \cap M = \underline{r}(M)$, ce qui montre que M' domine M ; nous verrons plus loin que si K'' est algébriquement disjoint dans L du corps des fractions de M , M' est elle-même une localité déduite de M par l'extension K'/K .

Avant d'étudier plus en détail les localités déduites d'une localité M par l'extension K'/K , nous démontrerons certains résultats auxiliaires sur les idéaux premiers et les extensions entières des anneaux noethériens.

3.- Lemmes sur les idéaux premiers.

Les résultats qui suivent sur les idéaux premiers sont des résultats appartenant typiquement à Krull (cf. Idealtheorie, page 910). A désigne un anneau commutatif avec unité.

Proposition 2.- 1) toute partie S de A appartenant à la famille \mathcal{C} des parties multiplicativement stables (m.s.) de A ne contenant pas 0 est contenue dans un élément maximal de \mathcal{C} ;

2) pour que la partie S de A soit un élément maximal de \mathcal{C} , il faut et suffit que $\underline{p} = \bigcap S$ soit un idéal premier minimal de A (nul ou non) ;

3) si \underline{p} est un idéal premier minimal de type fini de A , il existe $s \notin \underline{p}$ et $n > 0$ tel que $s \underline{p}^n = 0$, et il existe $x \neq 0$ tel que $x \underline{p} = 0$.

Le 1) résulte du théorème de Zorn, une fois démontré que \mathfrak{G} ordonné par inclusion, est inductif, ce qui est immédiat.

Si S est m.s. et $x \in A$, la plus petite partie m.s. contenant S et x se compose des éléments sx^n ($s \in S$, n entier ≥ 0); par suite si S est un élément maximal de \mathfrak{G} , pour que $x \notin S$, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de partie m.s. contenant S et x , autrement dit qu'il existe $s \in S$ et $n > 0$ tels que $sx^n = 0$. Soient alors x_i ($1 \leq i \leq k$) k éléments de $\underline{p} = \bigcup S$ qui vérifient par suite les conditions $s_i x_i^{n_i} = 0$ ($s_i \in S$, $n_i > 0$); si l'on pose $s = \prod_i s_i$ $n = \sum_i n_i$, on a pour tous les systèmes de k éléments a_i de A la condition $s(\sum_i a_i x_i)^n = 0$ donc $\sum_i a_i x_i \in \underline{p}$ et \underline{p} est bien un idéal; cet idéal est premier puisque S est multiplicativement stable. Si \underline{p} contient un idéal premier \underline{p}' , $S' = \bigcup \underline{p}'$ appartient à \mathfrak{G} et contient S donc $S = S'$ et $\underline{p} = \underline{p}'$, ce qui prouve que \underline{p} est un idéal premier minimal. Réciproquement, si \underline{p} est un idéal premier de A , $S = \bigcup \underline{p}$ appartient à \mathfrak{G} et donc d'après ce qu'on a vu, est contenu dans un élément maximal S' de \mathfrak{G} , mais alors $\underline{p}' = \bigcup S'$ est un idéal premier minimal de A contenu dans \underline{p} , et par suite si \underline{p} est premier minimal, on a $\underline{p} = \underline{p}'$ et $S = S'$ est maximal dans \mathfrak{G} . Ceci montre aussi que tout idéal premier contient un idéal premier minimal.

Enfin, soit \underline{p} un idéal premier minimal de générateurs x_1, \dots, x_k , et supposons $s_i x_i^{n_i} = 0$ ($1 \leq i \leq k$); nous poserons $S = S_1 \dots S_k$, $n = n_1 + \dots + n_k$; le produit de s par un monôme de degré n en les x_i est nul, car si $m_1 + \dots + m_k = n$ on a $m_i \geq n_i$ pour un certain i et $s_i x_i^{m_i} = 0$. Autrement dit $s \underline{p}^n = (0)$. Choisissons m tel que $s \underline{p}^{m-1} \neq (0)$, $s \underline{p}^m = (0)$, et x non nul dans $s \underline{p}^{m-1}$, on a donc $x \underline{p} = (0)$.

Proposition 3.- Soit A un anneau entier sur un sous-anneau B .

1) si A est noethérien, et si, considéré comme B -module, il est sans torsion, pour qu'un idéal premier \underline{q} de A soit premier minimal, il faut et il suffit que l'on ait $\underline{q} \cap B = (0)$;

2) si \underline{q} est un idéal premier de A tel que $\underline{q} \cap B = (0)$, et si \underline{p} est un idéal premier de B , on a $(\underline{q} + A\underline{p}) \cap B = \underline{p}$, donc $\underline{q} + A\underline{p} \neq A$.

Soit A noethérien et B -module sans torsion ; si \underline{q} est un idéal premier minimal de 0 dans A , il est de type fini (A noethérien), et d'après la proposition 2, 3), il existe $a \neq 0$ dans A tel que $a\underline{q} = (0)$, donc $a(B \cap \underline{q}) = (0)$, ce qui prouve que $B \cap \underline{q} = (0)$ puisque A est un B -module sans torsion. Réciproquement, si \underline{q} est un idéal premier de A tel que $B \cap \underline{q} = (0)$, et si \underline{q}' est un idéal premier de A contenu dans \underline{q} , on a $\underline{q} \cap B = \underline{q}' \cap B = (0)$ et donc (corollaire 1 du théorème 3 de l'exposé 1), on a $\underline{q} = \underline{q}'$ (le corollaire en question est vrai même si A n'est pas intègre, comme le montre sa démonstration).

Soit \underline{q} un idéal premier de A tel que $\underline{q} \cap B = (0)$, et soit φ l'application canonique de A sur $A' = A/\underline{q}$; φ applique biunivoquement B sur un sous-anneau B' de A' et l'idéal premier \underline{p} de B sur un idéal premier \underline{p}' de B' . De plus A' est entier sur B' , donc (théorème 3 de l'exposé 1), il existe un idéal premier \underline{q}' de A' tel que $\underline{q}' \cap B' = \underline{p}'$, d'où a fortiori $(A'\underline{p}') \cap B = \underline{p}$, i.e. $(A\underline{p} + \underline{q}) \cap B = \underline{p}$.

Corollaire : Soient L et K' deux extensions d'un corps K , L étant de type fini ; les types d'extensions composées de L et K' correspondent biunivoquement aux idéaux premiers minimaux de 0 dans $L \otimes K'$.

On a déjà vu (Exposé 14) que toute extension composée de L et K' est équivalente à une extension (F, u, u') , où \underline{p} est un idéal premier de $L \otimes K'$, F le corps des fractions de $(L \otimes K')/\underline{p}$, u et u' étant les homomorphismes naturels de L et K' dans F . Comme les images de u et u' doivent être algébriquement disjointes, ceci signifie que si K' est algébrique sur l'extension transcendante pure X , on a $\underline{p} \cap (L \otimes X) = (0)$. Or $L \otimes K'$ est entier sur $L \otimes X$, et comme K' est un module libre sur X , $L \otimes K'$ est un module libre sur l'anneau intègre $L \otimes X$, donc sans torsion et on peut appliquer la proposition 3, 1).

Soit M un sous-anneau de L contenant K et admettant L comme corps des fractions. Soit S l'ensemble des éléments de la forme $x \otimes 1$, où x est un élément $\neq 0$ de M ; tout élément de S est inversible dans $L \otimes K'$, et tout élément de $L \otimes K'$ se met sous la forme $s^{-1}z$, où $s \in S$, $z \in M \otimes K'$. Raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1, Exposé 1, on voit que $\underline{u} \longrightarrow \underline{u} \cap (M \otimes K')$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $L \otimes K'$ sur l'ensemble des idéaux premiers de $M \otimes K'$ ne rencontrant pas S . En particulier, si \underline{u} est un idéal premier minimal de 0 dans $L \otimes K'$, $\underline{u} \cap (M \otimes K')$ est un idéal premier minimal de 0 dans $M \otimes K'$. Réciproquement,

si L/K est de type fini, tout idéal premier minimal de 0 dans $M \otimes K'$ peut se mettre sous cette forme. Soient en effet $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ tous les idéaux minimaux de 0 dans $L \otimes K'$, et soit $\underline{v}_i = \underline{u}_i \wedge (M \otimes K')$; il y a des $e_i \geq 0$ tels que $\underline{u}_1^{e_1} \dots \underline{u}_m^{e_m} = 0$, d'où $\underline{v}_1^{e_1} \dots \underline{v}_m^{e_m} = 0$; tout idéal premier de $M \otimes K'$ contient donc au moins l'un des \underline{v}_i , ce qui démontre notre assertion.

4.- Extension des scalaires dans les localités.

Nous désignerons par M une localité de L , par F son corps des fractions et par K', K'' des sous-corps de L contenant K et algébriquement disjoints de F par rapport à K .

Proposition 4.- Il existe au moins une localité déduite de M par l'extension K'/K .

Il suffit de montrer que l'idéal \underline{n} de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$ ne contient pas 1 . Soit K' algébrique sur l'extension transcendante pure X de K . Alors $A = M \otimes K'$ est entier sur $B = M \otimes X$, et le noyau \underline{q} de l'homomorphisme canonique de $M \otimes K'$ sur $K'[M]$ ne rencontre pas B puisque F et K' sont algébriquement disjoints. De plus, l'idéal $\underline{p} = \underline{r}(M) \otimes X$ est premier; en effet, B/\underline{p} est isomorphe à $(M/\underline{r}(M)) \otimes X$, donc est un domaine d'intégrité puisque X/K est une extension transcendante pure. Appliquant la proposition 3, 2), et passant aux quotients modulo \underline{q} , on voit que $\underline{n} \wedge B$ est l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans B , donc ne contient pas 1 .

Soient \underline{p} un idéal premier de M , \underline{q} l'idéal qu'il engendre dans $K'[M]$ et \underline{s} un idéal premier minimal de \underline{q} dans $K'[M]$. Nous allons considérer le diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} M \otimes K' & \xrightarrow{\alpha} & (M/\underline{p}) \otimes K' \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ K'[M] & \xrightarrow{\delta} & K'[M]/\underline{s} \end{array} .$$

Le noyau de α est $\underline{p} \otimes K' = \beta^{-1}(\underline{q})$; le noyau \underline{z} de β est l'intersection avec $M \otimes K'$ du noyau \underline{z}_1 de l'application canonique $F \otimes K' \rightarrow K'[F]$; \underline{z}_1 est un idéal premier minimal de 0 dans $F \otimes K'$ (corollaire à la proposition 3), donc \underline{z} est un idéal premier minimal de 0 dans $M \otimes K'$. Le noyau de δ est \underline{s} ; celui de $\delta \circ \beta$ est $\beta^{-1}(\underline{s})$; comme β est surjective, cette application définit un isomorphisme de $(M \otimes K')/\underline{z}$ sur $K'[M]$, et $\beta^{-1}(\underline{s})$ est un idéal premier minimal de $\underline{z} + \underline{p} \otimes K' = \underline{z} + \alpha^{-1}(0)$. Si \underline{u} est

le noyau de γ , celui de $\gamma \circ \alpha$ est $\alpha^{-1}(\underline{u})$; comme $\gamma \circ \alpha = \delta \circ \beta$, on a $\alpha^{-1}(\underline{u}) = \beta^{-1}(\underline{s})$; comme α et β sont surjectives, on a

$$\underline{u} = \alpha(\beta^{-1}(\underline{s})) \quad \underline{s} = \beta(\alpha^{-1}(\underline{u})) .$$

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type d'extension composée de F et de K' (en particulier si K'/K est primaire, ou F/K primaire), $F \otimes K'$ n'a qu'un seul idéal premier minimal \underline{z}_1 de O (corollaire à la proposition 3), qui est par suite nilpotent, ce qui montre que \underline{z} est nilpotent. Donc \underline{z} est contenu dans tout idéal premier de $M \otimes K'$; comme $\beta^{-1}(\underline{s})$ est un idéal premier minimal de $\underline{z} + \alpha^{-1}(O)$, c'est aussi un idéal premier minimal de $\alpha^{-1}(O)$; comme α est surjective, $\underline{u} = \alpha(\beta^{-1}(\underline{s}))$ est un idéal premier minimal de O dans $(M/\underline{p}) \otimes K'$. Si R est le corps des fractions de M/\underline{p} , on a $\underline{u} = ((M/\underline{p}) \otimes K') \cap \underline{u}_1$, où \underline{u}_1 est un idéal premier minimal de O dans $R \otimes K'$. Il en résulte d'abord que \underline{u} n'a que O en commun avec $(M/\underline{p}) \otimes 1$, donc que $\beta^{-1}(\underline{s}) \cap (M \otimes 1) = \underline{p} \otimes 1$, et par suite que $\underline{s} \cap M = \underline{p}$. L'application canonique de $(K'[M])_{\underline{s}}$ sur le corps des fractions R' de $K'[M]/\underline{s}$ définit donc un isomorphisme de M/\underline{p} dans R' , qui se prolonge en un isomorphisme de R sur un sous-corps de R' . Comme \underline{u}_1 est un idéal premier minimal de O dans $R \otimes K'$, il est clair que l'image de R dans R' est algébriquement disjointe de K' par rapport à K .

Proposition 5.- Si M' est une localité déduite de M par l'extension K'/K , M' a même niveau, même hauteur et même dimension que M .

Comme K' et F sont algébriquement disjoints, il est clair que M et M' ont même niveau; il suffira donc de montrer que ces localités ont même dimension. La localité M' est l'anneau local d'un idéal premier minimal \underline{m} de l'idéal \underline{n} engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$; soit $R = M/\underline{r}(M)$; R et K' s'identifient à des sous-corps de $K'[M]/\underline{m}$, et $K'[M]/\underline{m} = K'[R]$; il en résulte que la dimension de M' est au plus égale à celle de M . Soit K'_0 la fermeture algébrique de K dans K' ; on a vu plus haut que M' est une localité déduite par l'extension K'/K'_0 d'une localité M_0 sur K'_0 qui domine M . Le corps $M_0/\underline{r}(M_0)$ contient une image isomorphe du corps R ; son degré de transcendance sur K est donc au moins égal à la dimension de M ; comme K'_0 est algébrique sur K , il en résulte que la dimension de M_0 est au moins égale à celle de M . Il suffira donc de montrer que M' a même dimension que M_0 ; on est donc ramené à démontrer la proposition 5 dans le cas où K'/K est

une extension primaire. Or, dans ce cas, il résulte de ce qui a été dit plus haut que R et K' sont algébriquement disjoints dans $K'[M]/\underline{m}$, ce qui démontre la proposition 5.

Corollaire : Si M'' est une localité déduite de M par l'extension K''/K , et si $K \subset K' \subset K''$, il y a une localité M' déduite de M par l'extension K'/K telle que M'' soit déduite de M' par l'extension K''/K' .

On a vu plus haut qu'il y a une localité M' sur K' qui est une spécialisation d'une localité M'_1 déduite de M par l'extension K'/K et qui est telle que M'' soit déduite de M' par l'extension K''/K' . Les dimensions de M' , M'' sont donc égales, et par suite toutes deux égales à celle de M , d'où $\dim M' = \dim M'_1 = \dim M$, et par suite $M' = M'_1$, puisque M' est spécialisation de M'_1 .

Proposition 6.- S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de K'/K et de $(M/\underline{r}(M))/K$ (donc en particulier si l'une de ces extensions est primaire), il n'y a qu'une localité déduite de M par l'extension K'/K ; si l'une au moins des extensions K'/K , $(M/\underline{r}(M))/K$ est séparable, le radical de toute localité déduite de M par l'extension K'/K est engendré par $\underline{r}(M)$.

Soient $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_h$ tous les idéaux premiers minimaux de l'idéal \underline{n} engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$; nous utiliserons les diagrammes (1) relatifs à $\underline{p} = \underline{r}(M)$, $\underline{q} = \underline{n}$, $\underline{s} = \underline{m}_i$; les homomorphismes α et β sont les mêmes pour tous ces diagrammes; soient χ_i et δ_i les homomorphismes χ et δ du diagramme relatif à \underline{m}_i . On a ici $M/\underline{p} = M/\underline{r}(M)$; nous désignerons ce corps par R . Il résulte de la proposition 5 que le noyau \underline{u}_i de χ_i est un idéal premier minimal de 0 dans $R \otimes K'$; on a $\underline{m}_i = \beta(\alpha^{-1}(\underline{u}_i))$. S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de R et de K' , $R \otimes K'$ n'a qu'un seul idéal premier minimal de 0 ; les \underline{u}_i sont donc tous égaux, et il en est de même des \underline{m}_i , d'où $h = 1$. Dans le cas général, on voit que les \underline{u}_i sont tous distincts; soient $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h, \dots, \underline{u}_m$ tous les idéaux premiers minimaux de 0 dans $R \otimes K'$; leur intersection est un idéal nilpotent. Si l'une au moins des extensions R/K , K'/K est séparable, $R \otimes K'$ n'a aucun élément nilpotent $\neq 0$, d'où $\underline{u}_1 \cap \dots \cap \underline{u}_m = \{0\}$. Si $i \leq h$, soit u_i un élément de $R \otimes K'$ n'appartenant pas à \underline{u}_i mais appartenant aux \underline{u}_k d'indices $\neq i$ entre 1 et m : soit v_i un élément de $M \otimes K'$ tel que $\alpha(v_i) = u_i$; $\beta(v_i)$ n'est donc pas dans \underline{m}_i . Soit x un élément de \underline{m}_i ; si $y \in M \otimes K'$ est tel

que $\beta(y) = x$, on a $\alpha(y) \in \underline{u}_i$, d'où $\alpha(y)u_i = 0$ et yv_i appartient au noyau $\underline{r}(M) \otimes K'$ de α ; il en résulte que $x \beta(v_i)$ appartient à \underline{n} ; comme $\beta(v_i) \notin \underline{m}_i$, il en résulte bien que le radical de $(K'[M])_{\underline{m}_i}$ est engendré par \underline{n} , donc par $\underline{r}(M)$.

Proposition 7.- Soit P une localité dont M est une spécialisation. Si P' est une localité déduite de P par l'extension K'/K , il y a une localité M' déduite de M par l'extension K'/K qui est une spécialisation de P' .

Soit λ l'application canonique $P' \rightarrow P'/\underline{r}(P')$; nous identifions K' à $\lambda(K')$. L'extension K'/K est algébriquement disjointe (dans $P'/\underline{r}(P')$) du corps des fractions de $\lambda(P)$ (proposition 5). Soit $\bar{M} = \lambda(M)$; \bar{M} est une localité de radical $\underline{r}(\bar{M}) = \lambda(\underline{r}(M))$. Soient \bar{n} l'idéal engendré par $\underline{r}(\bar{M})$ dans le sous-anneau $K'[\bar{M}]$ de $P'/\underline{r}(P')$ et \bar{m} un idéal premier minimal de \bar{n} (proposition 4). On a $K'[\bar{M}] = \lambda(K'[M])$, $\bar{n} = \lambda(\underline{n})$, si \underline{n} est l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$; l'ensemble \underline{m} des $x \in K'[M]$ tels que $\lambda(x) \in \bar{m}$ est un idéal premier minimal \underline{m} de \underline{n} . L'anneau local M' de \underline{m} est une localité déduite de M par l'extension K'/K . Par ailleurs, \underline{m} contient $\underline{r}(P') \cap K'[M]$; comme P' est l'anneau local de $K'[P] \cap \underline{r}(P')$ et comme $K'[P]$ est l'anneau des fractions de la partie multiplicativement stable $M - (\underline{r}(P) \cap M)$ de $K'[M]$, P' est l'anneau local de $\underline{r}(P') \cap K'[M]$, et M' est une spécialisation de P' .

Proposition 8.- Soit P une localité dont M est une spécialisation, et soit M' une localité déduite de M par l'extension K'/K . S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de F/K et de K'/K , il y a une localité P' déduite de P par l'extension K'/K dont M' est une spécialisation.

On a $P = M_{\underline{p}}$, où \underline{p} est un idéal premier de M ; M' est anneau local d'un idéal premier minimal \underline{m} de l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$. Cet idéal contient l'idéal \underline{q} engendré par \underline{p} dans $K'[M]$; \underline{m} contient donc un idéal premier minimal \underline{s} de \underline{q} . Or, il résulte de l'étude que nous avons faite du diagramme (1) que $\underline{s} \cap M = \underline{p}$. Soit P' l'anneau des fractions de \underline{s} ; c'est une localité qui admet M' comme spécialisation. Puisque $\underline{s} \cap M = \underline{p}$, P' domine P ; par ailleurs, P' est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(P') \cap K'[P]$ de $K'[P]$, puisque $K'[M] \subset K'[P] \subset P'$. Montrons que cet idéal premier est un idéal premier minimal de l'idéal \underline{q}' engendré par $\underline{r}(P)$ dans $K'[P]$. Comme $K'[P]$ est l'anneau de fractions d'une partie multiplicativement

stable de $K'[M]$, il suffit de montrer que $(\underline{r}(P') \cap K'[P]) \cap K'[M] = \underline{s}$ est un idéal premier minimal de $\underline{q}' \cap K'[M]$; or \underline{q}' contient $\underline{r}(P) \cap M = \underline{p}$, donc \underline{q}' contient \underline{q} , et notre assertion résulte de ce que \underline{s} est un idéal premier minimal de \underline{q} .

Remarque : La conclusion de la proposition 8 ne serait pas valable en général sans l'hypothèse qu'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de F et de K' . On s'en convaincra par l'exemple suivant. Soient K le corps des nombres réels, K' celui des complexes, $K'[x, y]$ un anneau de polynômes en deux lettres x et y et $A = K[x, iy, y]$. Soit \underline{p} l'intersection avec A du noyau de l'homomorphisme $K'[x, y] \rightarrow K'[x]$ qui applique x sur x et y sur i . On voit alors facilement que l'idéal engendré par \underline{p} dans $K'[x, y]$ est l'intersection de l'idéal \underline{p}'_1 engendré par $y - i$ et de l'idéal \underline{p}'_2 engendré par x et $y + i$. L'idéal \underline{m} engendré par x, iy et $y^2 + 1$ dans A est premier ; soient M et P les anneaux locaux de \underline{m} et \underline{p} , M' l'anneau local de l'idéal \underline{p}'_2 de $K'[x, y]$; il n'y a qu'une localité déduite de P par l'extension K'/K : c'est l'anneau local P' de \underline{p}'_1 . Par contre, M' est une localité déduite de M par l'extension K'/K ; M est une spécialisation de P , mais M' n'en est pas une de P' .
