

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

C. CHEVALLEY

Correspondances, II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 10, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A10_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCES, II.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 30.1.1956).

4.- Fin de la démonstration du théorème 1 (Exposé 9).

On se place maintenant dans le cas où S' et S'' sont des schémas affines, et où S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination. Le corps des fractions du joint S''_0 de S et S' est le corps des fractions $F(A')$ de $F[A']$; d'' est donc le degré de transcendance de $F(A')$ par rapport à K . Les localités de S'' qui dominant F sont les anneaux locaux des idéaux premiers de $F[A'']$ (cf. la démonstration de la proposition 2 (Exposé 9) tenant compte de ce que F est un corps). Soient h l'application de domination de S'' dans S''_0 et f'_0 celle de S''_0 dans S' , d'où $f' = f'_0 \circ h$. Il existe un élément $v' \neq 0$ de A' qui possède la propriété suivante : si N' est l'anneau local d'un idéal premier de A' qui ne contient pas v' , N' n'est l'image par f'_0 d'aucune localité de S''_0 de dimension $> \dim N' + d'' - d'$ (exposé 8, théorème 3). Il existe un élément $v'' \neq 0$ de A'' qui jouit de la propriété suivante : si N'' est l'anneau local d'un idéal premier de A'' qui ne contient pas v'' et si $f'(N'')$ est spécialisation d'une localité P' de S' , P' est l'image par f' d'une localité P'' de S'' qui admet N'' comme spécialisation (exposé 8, théorème 4). Il existe des éléments x'_1, \dots, x'_d de A' , algébriquement indépendants sur K , tels que A' soit entier sur $K[x'_1, \dots, x'_d]$ (exposé 4, proposition 1). Soit $e = d'' - d$ le degré de transcendance de $F(A')$ sur F ; on peut supposer que x'_1, \dots, x'_e forment une base de transcendance de $F(A')$ par rapport à F . Soit V'_1 une partie ouverte non vide quelconque de S' ; il y a un élément $v'_1 \neq 0$ de A' tel que V'_1 contienne les anneaux locaux de tous les idéaux premiers de A' ne contenant pas v'_1 . Il y a enfin un élément $w' \neq 0$ de $F[x'_1, \dots, x'_e]$ tel que tout homomorphisme de $F[x'_1, \dots, x'_e]$ dans un corps algébriquement clos qui n'applique pas w' sur 0 puisse se prolonger en un homomorphisme de $F[A'']$ qui n'applique pas $v''v'_1$ sur 0 (exposé 3, lemme, page 3-01); on peut écrire $w' = W'(x'_1, \dots, x'_e)$, où W' est un polynôme $\neq 0$ à coefficients dans F . Soit \bar{F} une clôture algébrique de F , et soit \bar{K} la fermeture algébrique de K dans \bar{F} ; comme \bar{K} est un corps

infini, il y a des éléments c_1, \dots, c_e de \bar{K} tels que $W'(c_1, \dots, c_e) \neq 0$; il y a un homomorphisme $\hat{\theta}$ de $F[x'_1, \dots, x'_e]$ dans \bar{F} qui coïncide avec l'identité sur F et applique x'_i sur c_i ($1 \leq i \leq e$); $\hat{\theta}$ se prolonge en un homomorphisme, que nous désignerons encore par $\hat{\theta}$, de $F[A'']$ dans \bar{F} tel que $\hat{\theta}(v''v'_1) \neq 0$. Soit \underline{n}'' le noyau de l'intersection de $\hat{\theta}$ avec A'' ; $N'' = A''/\underline{n}''$ est alors une localité de S'' qui domine F , et $N' = f'(N'')$ correspond à F . On a $N' = A'/\underline{n}'$, où \underline{n}' est l'intersection du noyau de $\hat{\theta}$ avec A' ; puisque $\hat{\theta}(v'_1) \neq 0$, on a $N' \in V'_1$. On peut identifier A'/\underline{n}' à un sous-corps de \bar{F} , la classe modulo \underline{n}' d'un élément de A' s'identifiant à l'image de cet élément par $\hat{\theta}$. Soit $\xi_j = \hat{\theta}(x'_{d+j})$ ($1 \leq j \leq d' - e$); puisque A' est entier sur $K[x'_1, \dots, x'_{d'}]$, $\hat{\theta}(A')$ est entier sur $K[c_1, \dots, c_e, \xi_1, \dots, \xi_{d'-e}]$; comme c_1, \dots, c_e sont algébriques sur K , la dimension de N' , égale au degré de transcendance sur K du corps des fractions de $\hat{\theta}(A')$, est $\leq d' - e = d + d' - d''$. Posons $N''_0 = h(N'')$; comme $\hat{\theta}(v') \neq 0$, v' n'est pas dans \underline{n}' , et on a $\dim N''_0 \leq \dim N' + d'' - d'$; puisque N''_0 domine F , on a $\dim N' \geq d + d' - d''$, d'où $\dim N' = d + d' - d''$. Soit h un entier tel que $d + d' - d'' \leq h \leq d'$; il y a alors au moins une localité P' de dimension h de S' admettant N' comme spécialisation. Or, v'' n'appartient pas à \underline{n}'' ; il y a donc une localité P'' de S'' telle que $f'(P'') = P'$ et que P'' admette N'' comme spécialisation. Comme N'' domine F , la localité de S dominée par P'' admet F comme spécialisation, et est par suite identique à F ; P' appartient donc à Z'_h . Puisque N' est spécialisation de P' et V'_1 ouvert, P' appartient à V'_1 . Comme V'_1 était une partie ouverte non vide quelconque de S' , il en résulte bien que Z'_h est dense dans S' .

5.- Localités fondamentales par rapport à une correspondance.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser la notion de localité fondamentale, que nous avons déjà introduite dans le cas des morphismes de domination.

Définition 1. Soit Γ' une correspondance non dégénérée entre S et S' ; posons $\Gamma' = (S'', f, f')$; supposons que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination; soient S''_0 le joint de S et S' , h l'application de domination de S'' dans S''_0 et f_0 celle de S''_0 dans S .

On dit qu'une localité M de S est fondamentale (par rapport à Γ) si on est dans l'un ou l'autre des cas suivants : a) M est fondamentale par rapport à S'' , ou b) il y a dans $f_0^{-1}(M)$ une localité qui n'est spécialisation d'aucune localité appartenant à $h(S'') \cap f_0^{-1}(M)$.

Théorème 2 . Soit Γ une correspondance non dégénérée entre S et S' . Les localités de S qui sont fondamentales par rapport à Γ forment un sous-ensemble constructible non dense de S .

On sait déjà que les localités de S qui sont fondamentales par rapport à S'' forment un ensemble constructible non dense (exposé 8, fin du paragraphe 2). Par ailleurs, l'ensemble $S'' - h(S'')$ est constructible (exposé 7, théorème 3) ; soient G_k ($1 \leq k \leq r$) ses composantes irréductibles. Pour chaque k , \bar{G}_k est un ensemble fermé irréductible, que nous identifierons au schéma induit sur lui par S'' ; soit f_{ok} la restriction de f_0 à \bar{G}_k . L'ensemble H_k des localités $M'' \in \bar{G}_k$ telles que $\dim M'' \geq \dim f_{ok}(M'') + d'' - d$ (où d et d'' sont les dimensions de S et S'') est fermé (exposé 8, théorème 2) ; l'ensemble $G_k \cap H_k$ est donc constructible, et il en est de même de $f_0(G_k \cap H_k)$ (exposé 7, théorème 3). Toute localité $M \in f_0(G_k \cap H_k)$ est fondamentale par rapport à Γ . C'est en effet vrai si M est fondamentale par rapport à S'' ; supposons donc que M ne soit pas fondamentale par rapport à S'' ; il y a une localité $M'' \in G_k \cap H_k$ telle que $f_0(M'') = M$. Puisque $M'' \in H_k$, on a $\dim M'' \geq \dim M + d'' - d$; puisque M n'est pas fondamentale par rapport à S'' , on a $\dim M'' = \dim M + d'' - d$, et M'' n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même appartenant à $f_0^{-1}(M)$; puisque $M'' \in G_k$, M'' n'appartient pas à $h(S'')$, ce qui montre bien que M est fondamentale par rapport à Γ . Réciproquement, toute localité M de S , fondamentale par rapport à Γ sans l'être par rapport à S'' appartient à l'un au moins des ensembles $f_0(G_k \cap H_k)$. En effet, il y a dans $f_0^{-1}(M)$ une localité qui n'est spécialisation d'aucune localité de cet ensemble appartenant à $h(S'')$; or, toute localité de $f_0^{-1}(M)$ est spécialisation d'une localité de $f_0^{-1}(M)$ de dimension $\geq \dim M + d'' - d$ (exposé 8, théorème 2) ; il y a donc un $M'' \in f_0^{-1}(M)$ tel que $\dim M'' \geq \dim M + d'' - d$ et $M'' \notin h(S'')$; la localité M'' appartient à l'un au moins des G_k , et, si elle appartient à G_k , elle appartient à H_k , d'où $M \in f_0(G_k \cap H_k)$. L'ensemble des localités de S fondamentales par rapport à Γ est donc constructible ; pour montrer qu'il est non dense, il suffit de montrer que, pour tout k , $f_0(G_k \cap H_k)$ est non dense. C'est évident si

$f_{\circ}(\bar{G}_k)$ est non dense ; si $f_{\circ}(\bar{G}_k)$ est dense, le schéma \bar{G}_k domine S , avec $f_{\circ k}$ comme application de domination ; comme $\dim \bar{G}_k < d''$, il résulte du théorème 3, exposé 8 qu'il y a une partie ouverte non vide de S qui ne rencontre pas $f_{\circ k}(H_k)$, ce qui démontre le résultat dans ce cas.

6.- Dimension des localités qui correspondent à une localité non fondamentale.

Théorème 3 . Soit Γ une correspondance non dégénérée entre S et S' ; désignons par d et d' les dimensions de S et S' , et par d'' la dimension de Γ . Soit M une localité de S non fondamentale par rapport à Γ ; il lui correspond alors au moins une localité de S' ; soit M' une localité de S' qui correspond à M mais qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui corresponde à M . On a alors

$$d'' - d \leq \dim M' \leq d'' - d + \dim M .$$

Désignons par $\gamma^{\vee}(M)$ (resp. $\gamma^{\vee}(M')$) l'ensemble des spécialisations de M (resp. M') dans S (resp. S') ; posons $h_0 = \dim M' - (d'' - d)$; si h est un entier, l'ensemble des localités de dimension h de $\gamma^{\vee}(M)$ auxquelles M' correspond est dense dans $\gamma^{\vee}(M)$ si $h_0 \leq h \leq \dim M$, mais n'y est pas dense si $h < h_0$; l'ensemble des localités de dimension h de $\gamma^{\vee}(M')$ qui correspondent à M est dense dans $\gamma^{\vee}(M')$ si $h_0 \leq h \leq \dim M'$, mais n'y est pas dense si $h < h_0$.

Nous supposerons que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination, et nous utiliserons les notations de la définition 1 .

Puisque M n'est pas fondamentale par rapport à Γ , il est clair que $M \in f(S'') = f_{\circ}(h(S''))$, donc qu'il correspond à M au moins une localité de S' . Soit M'' une localité de S'' telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$; M'' domine alors une localité M''_0 de S''_0 dont la dimension est la dimension de la correspondance entre $\gamma^{\vee}(M)$ et $\gamma^{\vee}(M')$ induite par Γ définie par M'' (proposition 5 de l'Exposé 9) ; comme M n'est pas fondamentale par rapport à S''_0 , cette dimension est $\leq \dim M + d'' - d$. Montrons qu'il y a au moins une correspondance entre $\gamma^{\vee}(M)$ et $\gamma^{\vee}(M')$ induite par Γ qui est de dimension $\dim M + d'' - d$. La localité M''_0 est spécialisation d'une localité N''_0 de S''_0 qui domine M et qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même de S''_0 qui domine M ; on a alors $\dim N''_0 \geq \dim M + d'' - d$ (exposé 8, théorème 2). Puisque M n'est pas fondamentale par rapport à Γ , N''_0 appartient à $h(S'')$, soit $N''_0 = h(N'')$, $N'' \in S''$. On a $f(N'') = M$; par ailleurs, si f'_{\circ} est l'application de domination de S''_0 dans S' , on a $f'(N'') = f'_{\circ}(N''_0)$ comme M''_0 est spécialisation de N''_0 , $M' = f'_{\circ}(M''_0)$ est spécialisation de $f'(N'')$; comme $f'(N'')$ correspond à M , on a $f'(N'') = M'$. La localité N''

défini une correspondance entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$ induite par Γ et dont la dimension, égale à $\dim N''_0$, est $\geq \dim M + d'' - d$, et lui est même égale en vertu de ce qui a été dit plus haut. On en conclut que, dans les notations du théorème 1, on a $\delta''(M, M') = \dim M + d'' - d = \delta + d'' - d$. Comme ce nombre est manifestement $\geq \dim M'$, on a $\dim M' \leq \dim M + d'' - d$. On a $\dim M + \dim M' - (\dim M + d'' - d) = h_0$; les dernières assertions du théorème 3 résultent alors immédiatement du théorème 1 appliqué à Γ et à la correspondance (S'', f', f) entre S' et S . Puisqu'il existe dans $\mathcal{Y}(M)$ des localités de dimension h_0 , on a $h_0 \geq 0$, d'où $\dim M' \geq d'' - d$.

Remarque : Si Γ est une correspondance non dégénérée maximale entre S et S' , pour qu'une localité $M \in S$ ne soit pas fondamentale par rapport à Γ , il faut et suffit que les conditions suivantes soient satisfaites : a) il correspond au moins une localité de S' à M ; b) l'ensemble des $N \in \mathcal{Y}(M)$ auxquelles il correspond au moins une localité de S' de dimension $> \dim N + d'' - d$ est non dense dans $\mathcal{Y}(M)$.

En effet, si M n'est pas fondamentale, l'ensemble des localités de $\mathcal{Y}(M)$ qui ne sont pas fondamentales est non dense dans $\mathcal{Y}(M)$, comme il résulte immédiatement du fait que l'intersection de $\mathcal{Y}(M)$ avec l'ensemble des localités fondamentales est constructible; or, si N n'est pas fondamentale, il ne lui correspond aucune localité de dimension $> \dim N + d'' - d$ (théorème 3); les conditions a) et b) sont donc nécessaires, que Γ soit maximale ou non. Supposons maintenant que Γ soit maximale et que les conditions a) et b) soient satisfaites: utilisant les mêmes notations que plus haut, S'' est le joint de S et S' , et nous avons à montrer que S n'est pas fondamentale par rapport à S'' . Supposons le contraire; puisqu'il correspond à M au moins une localité de S' , M appartient à $f(S')$; puisque M est fondamentale, il y a une localité M'' de dimension $> \dim M + d'' - d$ de S'' qui domine M . Soit $M' = f'(M'')$; M'' définit alors une correspondance entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$ de dimension $> \dim M + d'' - d$, induite par Γ ; les notations étant celles du théorème 1, on a $\delta'' > \delta + d'' - d$. L'ensemble E des localités de dimension $\delta + \delta' - \delta''$ de $\mathcal{Y}(M)$ qui correspondent à M' est dense dans $\mathcal{Y}(M)$ (théorème 1); or, si $N \in E$, on a $\dim M' = \dim N + (\delta'' - \delta) > \dim N + d'' - d$, d'où une contradiction avec la condition b).