Séminaire Henri Cartan

J. C. Moore

Homotopie des complexes monoïdaux, I

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A8_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

HOMOTOPIE DES COMPLEXES MONOÏDAUX, I.

(Exposé de J.C. MOORE, 18.4.1955)

1.- Notion de complexe monoïdal.

Définition 1 : un complexe monoïdal Γ est une suite (Γ_q) (où q parcourt l'ensemble des entiers ≥ 0) de monoïdes Γ_q avec élément neutre e_q, et, pour chaque q, d'homomorphismes

$$d_i : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q \qquad (0 \leq i \leq q+1)$$

$$s_i : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_{q+1} \qquad (0 \leq i \leq q)$$

satisfaisant aux identités usuelles (cf. Exposé 12, page 1 ; ou Exposé 14, formules (1.1) à (1.5)). Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition associative (qu'on notera multiplicativement) ; un "homomorphisme" de monoïdes avec élément neutre est une application qui respecte la loi de composition et transforme l'élément neutre dans l'élément neutre.

En d'autres termes : un complexe monoïdal est un "complexe semi-simplicial complet" (Eilenberg-Zilber [1]) dans lequel les simplexes de chaque dimension q forment un monoïde avec élément neutre, et tel que les opérations de face et de dégénérescence soient compatibles avec la structure de monoïde à élément neutre.

Soit Γ un complexe monoïdal. Pour chaque q, soit $R_q(\Gamma)$ l'algèbre du monoïde Γ_q à coefficients entiers ; alors $R(\Gamma) = \sum_{q\geq 0} R_q(\Gamma)$ est un complexe d'anneaux, au sens de l'Exposé 12 (page 2), les opérations d_i et s_i étant, bien entendu, déterminées par celles de Γ. C'est même un complexe d'anneaux augmenté, si on définit, pour chaque q, une augmentation $\varepsilon_q : R_q(\Gamma) \longrightarrow Z$ en posant

$$\varepsilon_q\Big(\sum_i \lambda_i \gamma_i\Big) = \sum_i \lambda_i \,, \quad \text{pour} \quad \lambda_i \in Z \quad \text{et} \quad \gamma_i \in \Gamma_q \,.$$

Définition 2 : on dit qu'un complexe monoïdal $\Gamma = (\Gamma_q)_{q\geq 0}$ est involutif si chaque monoïde Γ_q est muni d'un automorphisme $x \longrightarrow \bar{x}$ (appelé involution) satisfaisant aux conditions suivantes :

(1.1) $\quad \bar{\bar{x}} = x$

(1.2) $\quad \bar{e}_q = e_q \ , \qquad \overline{(xy)} = \bar{y}\,\bar{x}$

(1.3) $\quad \overline{d_i x} = d_i \bar{x} \ , \qquad \overline{s_i x} = s_i \bar{x} \ .$

Alors l'involution $x \longrightarrow \bar{x}$ se prolonge au complexe $R(\Gamma)$.

Exemple : supposons que les Γ_q soient des groupes ; on pose $\bar{x} = x^{-1}$, et on a alors un complexe involutif. Cette espèce de complexe a été considérée par A. Heller [2] .

Par exemple, soit X un groupe topologique. Soit Γ_q l'ensemble des q-simplexes singuliers de X ; la multiplication dans l'espace X définit dans chaque Γ_q une loi de composition pour laquelle Γ_q est un groupe. On obtient ainsi un complexe monoïdal involutif.

Définition 3 : on dit qu'un complexe monoïdal Γ est un complexe monoïdal avec homotopie si :

(i) Γ est involutif ;

(ii) ("condition de Kan") si $x_0,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_{q+1} \in \Gamma_q$ sont tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$, i et j étant $\neq k$, alors il existe un $x \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$;

(iii) ("axiome de remplacement") si $x \in \Gamma_{q+1}$ et y , y', $y'' \in \Gamma_q$ sont tels que

$d_k x = y' y \bar{y} y''$ et $d_j(y\bar{y}) = e_{q-1}$ pour tout j $(0 \leq j \leq q)$, alors il existe un $z \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j z = d_j x$ pour $j \neq k$, et $d_k z = y'y''$.

Remarque : la condition (ii) ne fait pas intervenir la structure multiplicative des Γ_q . Elle est toujours vérifiée si, pour chaque q , Γ_q est l'ensemble des q-simplexes singuliers d'un espace topologique, parce que la réunion de toutes les faces d'un $(q+1)$-simplexe sauf une, est un rétracte de ce simplexe.

2.- Exemple de complexe monoïdal avec homotopie.

Un exemple important est fourni par le complexe singulier de l'"espace des lacets" d'un espace topologique X . Nous allons d'abord définir l'espace des chemins et l'espace des lacets de X , d'une manière un peu différente de la manière classique.

Soit X un espace topologique. Un chemin de X est, par définition, une paire (r,f) , où r désigne un nombre réel ≥ 0 , et f une application continue du segment [0 , r] dans X . Soient (r,f) et (s,g) deux chemins de X tels que f(r) = g(0) ; on définit le chemin composé (r,f).(s,g) = (r+s,h) , où

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq r \\ g(t-r) & \text{pour } r \leq t \leq r+s \ . \end{cases}$$

Soit alors X un espace topologique, connexe par arcs, et soit un point-base $x_o \in X$. Soit $E(X,x_o)$ l'ensemble de tous les chemins (r,f) de X tels que $f(0) = x_o$. Définissons l'application

$$p : E(X , x_o) \longrightarrow X$$

par $p(r,f) = f(r)$. Soit $L(X,x_o) = p^{-1}(x_o)$: ensemble des lacets d'origine x_o . La loi de composition de $L(X,x_o)$ est associative, et possède pour élément neutre le lacet (0,f) , où f est définie par $f(0) = x_o$.

Définissons sur l'ensemble $E(X,x_o)$ une topologie comme suit : pour chaque triplet (C,V,U) formé d'un ouvert V de la demi-droite R^+ (formée des nombres réels ≥ 0) , d'un ouvert U de X , et d'un compact C de [0,1], considérons l'ensemble W(C,V,U) des chemins $(r,f) \in E(X,x_o)$ tels que $r \in V$ et $f(rC) \subset U$, en notant rC l'ensemble des rt où t parcourt C . Les ensembles W(C,V,U) forment une base d'ouverts dans une topologie sur $E(X,x_o)$, qui devient ainsi un espace topologique. L'espace des lacets $L(X,x_o)$ est muni de la topologie induite. La loi de composition de $L(X,x_o)$ est continue.

Théorème 1 : Soit X un espace topologique, connexe par arcs, et soit $x_o \in X$ un point-base. Alors :

1) $E(X,x_o)$ est un espace contractile ;

2) le triplet $(E(X,x_o),p,X)$ est un espace fibré (au sens de Serre) ;

3) si X est séparé, $E(X,x_o)$ est aussi séparé.

(La démonstration est semblable à celle de Serre [3]).

Soit maintenant $\Omega_q(X,x_o)$ l'ensemble des q-simplexes singuliers de $L(X,x_o)$, et soit $\Omega(X,x_o)$ la collection des $\Omega_q(X,x_o)$ pour $q \geq 0$; il est évident que $\Omega(X,x_o)$ est un complexe monoïdal. Considérons dans $\Omega_q(X,x_o)$ l'involution définie par l'application

$$(r,f) \longrightarrow (r,\bar{f}) \quad \text{de} \quad L(X,x_o) \ ,$$

où $\bar{f}(t) = f(r-t)$ pour $0 \leq t \leq r$. Alors $\Omega(X,x_o)$ est un complexe monoïdal involutif.

Théorème 2 : Si X est un espace topologique, connexe par arcs, et $x_o \in X$, alors $\Omega(X,x_o)$ est un complexe monoïdal avec homotopie.

Démonstration : la condition (i) est vérifiée ; la condition (ii) aussi, puisque $\Omega(X,x_o)$ est le complexe singulier d'un espace topologique. Il reste à prouver (iii). Notons I le segment $[0,1]$; définissons une application $S : E(X,x_o) \times I \longrightarrow E(X,x_o)$ par $S(r,f,t) = (rt,h)$, où h désigne la restriction de f au segment $[0,rt]$. Soient alors $x \in \Omega_{q+1}(X,x_o)$ et $y,y',y'' \in \Omega_q(X,x_o)$ comme dans l'axiome (iii), c'est-à-dire $d_k x = y'y\bar{y}y''$, $d_j(y\bar{y}) = e_{q-1}$ pour $0 \leq j \leq q$. Notons Δ^i_{q+1} la i-ième face du simplexe Δ_{q+1}, et définissons une application continue

$$f : (\Delta_{q+1} \times \{0\}) \cup (\bigcup_{0 \leq i \leq q} \Delta^i_{q+1} \times I) \longrightarrow L(X,x_o)$$

comme suit : on pose

$$f(u,0) = x(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta_{q+1} ,$$

$$f(u,t) = x(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta^i_{q+1} , \quad i \neq k ,$$

$$f(u,t) = y'(u).S(y(u),1-t).\bar{S}(y(u),1-t).y''(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta^k_{q+1} ,$$

les produits du second membre s'entendant au sens de la multiplication dans l'espace $E(X,x_o)$.

Alors f se prolonge en une application continue $\hat{f}$ de $\Delta_{q+1} \times I$ dans $L(X,x_o)$; soit z l'application de Δ_{q+1} dans $L(X,x_o)$ telle que $z(u) = \tilde{f}(u,1)$ pour $u \in \Delta_{q+1}$. On a

$$d_i z = d_i x \quad \text{pour} \quad i \neq k , \quad d_k z = y'y'' ,$$

ce qui achève la démonstration.

3.- Autre exemple de complexe monoïdal avec homotopie.

Théorème 3 : Si Γ est un complexe de groupes, Γ est un complexe avec homotopie.

Démonstration : les conditions (i) et (iii) de la définition 4 sont trivialement vérifiées (rappelons que l'involution de Γ est alors, par définition, donnée par $\bar{x} = x^{-1}$). Il reste à prouver (ii). Etant donné k entier tel que $0 \leq k \leq q+1$, nous supposons donnés des $x_i \in \Gamma_q$ $(0 \leq i \leq q+1 , i \neq k)$ tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$, $i \neq k$, $j \neq k$; et nous cherchons un $x \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$.

Montrons d'abord l'existence d'un $u \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i u = x_i$ pour $i < k$. C'est trivial si $k = 0$; si $k > 0$, on définit, par récurrence sur l'entier r $(0 \leq r \leq k)$, un $u^r \in \Gamma_{q+1}$ tel que

(3.1) $\quad d_i u^r = x_i$ pour $i \leq r$.

On prend d'abord $u^o = s_o x_o$; on a bien $d_o u^o = x_o$; puis, si $r < k-1$, posons

$$y^r = s_{r+1}((d_{r+1}\overline{u^r})x_{r+1}) , \quad u^{r+1} = u^r y^r ;$$

un calcul facile, compte tenu de (3.1), montre que $d_i y^r = e_q$ pour $i \leq r$, et $d_{r+1} y^r = (d_{r+1}\overline{u^r})x_{r+1}$. On en déduit que $d_i u^{r+1} = x_i$ pour $i \leq r+1$. Finalement, si on prend pour u l'élément u^{k-1}, on aura $d_i u = x_i$ pour $i < k$, comme annoncé.

On va maintenant prouver, par récurrence sur l'entier r $(0 \leq r \leq q-k+1)$: l'existence d'un $x^r \in \Gamma_{q+1}$ tel que

(3.2) $\quad d_i x^r = x_i$ pour $i < k$ et pour $i > q-r+1$.

Pour $r=0$, on prend $x^o = u$. Supposons défini x^r pour $r \leq q-k$, et posons

$$z^r = s_{q-r}((d_{q-r+1}\overline{x^r})x_{q-r+1}) , \quad x^{r+1} = x^r z^r ;$$

un calcul facile, compte tenu de (3.2), montre que $d_i z^r = e_q$ (élément neutre) pour $i < k$ et $i > q-r+1$, et $d_{q-r+1} z^r = (d_{q-r+1}\overline{x^r})x_{q-r+1}$. Il s'ensuit que $d_i x^{r+1} = x_i$ pour $i < k$ et pour $i > q-r$. Finalement, si on prend pour x l'élément x^{q-k+1}, on a $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$, ce qui achève la démonstration du théorème.

4.- Groupes d'homotopie d'un complexe monoïdal.

Soit Γ un complexe monoïdal. Définissons les monoïdes $\widetilde{\pi}_q(\Gamma)$ en posant

$$\widetilde{\pi}_o(\Gamma) = \Gamma_o , \text{ et, pour } q \geq 1 , \quad \widetilde{\pi}_q(\Gamma) = \bigcap_{0 \leq j < q} \operatorname{Ker} d_j : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_{q-1} .$$

Proposition 1 : L'application $d_{q+1} : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$ applique $\widetilde{\pi}_{q+1}(\Gamma)$ dans $\widetilde{\pi}_q(\Gamma)$, et si on considère la suite d'homomorphismes

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{\pi}_{q+1}(\Gamma) \xrightarrow{d_{q+1}} \widetilde{\pi}_q(\Gamma) \xrightarrow{d_q} \widetilde{\pi}_{q-1}(\Gamma) \longrightarrow \ldots ,$$

le composé de deux homomorphismes consécutifs est trivial (i.e. : son image est l'élément neutre).

Démonstration : soit $x \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$; alors, pour $j \leq q$, $d_j d_{q+1} x = d_q d_j x = e_{q-1}$, ce qui prouve tout.

Théorème 4 : Soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie. Dans le noyau N_q de $d_q : \widetilde{\Pi}_q(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_{q-1}(\Gamma)$, il existe une relation d'équivalence et une seule, compatible avec la loi de composition de N_q , et jouissant des propriétés suivantes : la classe d'équivalence de l'élément neutre e_q est l'image de $d_{q+1} : \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_q(\Gamma)$, le monoïde-quotient de N_q est un groupe $\pi_q(\Gamma)$, et les classes d'équivalence de x et $\bar{x}$ sont des éléments inverses de ce groupe.

Démonstration : s'il existe une relation d'équivalence jouissant des propriétés de l'énoncé, c'est forcément la relation suivante (entre éléments x et y de N_q) :

$x\bar{y}$ est dans l'image de $d_{q+1} : \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_q(\Gamma)$.

Montrons que cette relation est bien une relation d'équivalence, et qu'elle jouit des propriétés annoncées. On aura besoin de deux lemmes :

Lemme 1 : Soient x , y , $z \in N_q$ tels que $x\bar{y}yz$ soit dans l'image de $\widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ par d_{q+1} ; alors $x\bar{z}$ est aussi dans cette image.

Cela résulte de l'axiome de remplacement (axiome (iii)) : soit $u \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ tel que $d_{q+1} u = x\bar{y}yz$; on a $d_j(\bar{y}y) = e_{q-1}$ pour $j \leq q$ puisque $y \in N_q$, donc il existe $v \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j v = d_j u$ pour $j \leq q$, et $d_{q+1} v = x\bar{z}$;

on a donc $d_j v = e_q$ pour $j \leq q$, et par suite $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$. D'où le lemme.

Lemme 2 : Soient $u \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ et $z \in N_q$; alors $z(d_{q+1}u)\bar{z}$ est de la forme $d_{q+1}v$, avec $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$.

En effet, on a $d_j((s_q z)u(s_q \bar{z})) = e_q$ pour $j < q$,

$d_q((s_q z)u(s_q \bar{z})) = z\bar{z}$, et $d_{q+1}((s_q z)u(s_q \bar{z})) = z(d_{q+1}u)\bar{z}$. D'après l'axiome de remplacement , il existe $v \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j v = d_j((s_q z)u(s_q \bar{z}))$ pour $j \neq q$, et $d_q v = e_q$. On a donc $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, et $d_{q+1} v = z(d_{q+1}u)\bar{z}$, ce qui démontre le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 4 . Soit $R(x,y)$ la relation (entre éléments x , $y \in N_q$) définie par :

$x\bar{y}$ est de la forme $d_{q+1}u$, avec $u \in \widetilde{\Gamma}_{q+1}(\Gamma)$.

On a $R(x,x)$, en vertu du lemme 2 ; la relation R est symétrique, car si $x\bar{y} = d_{q+1}u$, on a $y\bar{x} = d_{q+1}\bar{u}$; enfin, R est transitive, car si on a $R(x,y)$ et $R(y,z)$, on a $R(x,z)$ en vertu du lemme 1 .

Montrons que la relation d'équivalence R est compatible avec la loi de composition de N_q : soient x , x', $y \in N_q$, avec $R(x,x')$; alors yx est équivalent à yx' , car $yx\bar{x}'\bar{y}$ est de la forme $d_{q+1}v$ (avec $v \in \widetilde{\Gamma}_{q+1}(\Gamma)$) , en vertu du lemme 2 . Montrons aussi que xy est équivalent à $x'y$, autrement dit que $xy\bar{y}\bar{x}'$ est dans l'image de $\widetilde{\Gamma}_{q+1}(\Gamma)$ par d_{q+1} : d'après le lemme 1 , il suffit de montrer que $x\bar{x}'x'y\bar{y}\bar{x}'$ est dans l'image en question ; or c'est égal à $(x\bar{x}')(x'y\bar{y}\bar{x}')$, produit de deux éléments dont chacun est dans l'image de $\widetilde{\Gamma}_{q+1}(\Gamma)$ par d_{q+1} (le premier, par hypothèse ; le second, par application répétée du lemme 2).

Soit alors $\Gamma_q(\Gamma)$ le monoïde-quotient de N_q par la relation d'équivalence R . Si $x \in N_q$, les classes d'équivalence de x et $\bar{x}$ sont des éléments de $\Gamma_q(\Gamma)$ <u>inverses</u> l'un de l'autre, en vertu du lemme 2 . Ainsi $\Gamma_q(\Gamma)$ est un <u>groupe</u>, et le théorème 4 est entièrement démontré.

<u>Définition 4</u> : si Γ est un complexe monoïdal avec homotopie, les groupes $\Gamma_q(\Gamma)$ s'appellent les <u>groupes d'homotopie</u> du complexe Γ . (Cette définition est justifiée, car on voit facilement que, dans le cas où Γ se compose des simplexes singuliers d'un espace de lacets, les groupes $\Gamma_q(\Gamma)$ sont bien les groupes d'homotopie de cet espace).

<u>Théorème 5</u> : <u>Si</u> Γ <u>est un complexe monoïdal avec homotopie, les groupes</u> $\Gamma_q(\Gamma)$ <u>sont abéliens pour</u> $q \geqslant 1$.

<u>Démonstration</u> : soient x , $y \in N_q$; on veut montrer que, si $q \geqslant 1$, l'élément $xy\bar{x}\bar{y}$ est dans l'image de $\widetilde{\Gamma}_{q+1}(\Gamma)$ par d_{q+1} . Or soit $z = s_q(xy\bar{x}\bar{y})$; on a $d_j z = e_q$ pour $j < q$, et $d_q z = d_{q+1}z = xy\bar{x}\bar{y}$. Puisque $q \geqslant 1$, on peut considérer $z' = (s_{q-1}x)(s_q y)(s_{q-1}\bar{x})(s_q\bar{y})$; on a

$d_j z' = e_q$ pour $j < q-1$, $d_{q-1}z' = x\bar{x}$, $d_q z' = xy\bar{x}\bar{y}$, $d_{q+1}z' = y\bar{y}$.

D'après l'axiome de remplacement, il existe $z'' \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j z'' = d_j z'$ pour $j \neq q-1$, $q+1$, et $d_{q-1}z'' = d_{q+1}z'' = e_q$. Soit $w = z\bar{z}''$; on a

$d_j w = e_q$ pour $j < q$, $d_q w = xy\bar{x}\bar{y}(\overline{xy\bar{x}\bar{y}})$, $d_{q+1} w = xy\bar{x}\bar{y}$.

D'après l'axiome de remplacement, il existe $w' \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j w' = d_j w$ pour $j \neq q$, et $d_q w' = e_q$.

On a donc $w' \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, et $d_{q+1} w' = xy\bar{x}\bar{y}$. Ceci prouve le théorème.

Remarque : la démonstration précédente prouve à nouveau que les groupes d'homotopie $\Pi_q(X)$ d'un espace topologique X sont abéliens pour $q \geq 2$: il suffit de considérer l'espace des lacets de X .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. EILENBERG et J. ZILBER, Semi-simplicial complexes and singular homology (Ann. of Math. 51, 1950, p.499-513).

[2] A. HELLER, Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes (à paraître aux Trans. Amer. Math. Soc.).

[3] J.P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés (Ann. of Math. 54, 1951, p.425-505).