Séminaire Henri Cartan

J-P. Serre

Fonctions automorphes : quelques majorations dans le cas où X/G est compact

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 2, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A2_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Seminaire E.N.S., 1953-54

FONCTIONS AUTOMORPHES: QUELQUES MAJORATIONS DANS LE CAS OÙ X/G EST COMPACT

(Exposé de J-P. Serre, 30-11-53)

§1. Préliminaires

LEMME 1. (Schwarz) *Soit* U *le polydisque de* $\mathbf{C}^n$ *défini par* $|z_i| \leq R_i$, *et soit* $V = \lambda \cdot U$ *un polydisque homothétique, avec* $0 < \lambda < 1$. *Si* f *est une fonction holomorphe sur* U *qui s'annule à l'origine ainsi que ses dérivées partielles d'ordre* $< p$, *on a:*

$$\sup_{z \in V} |f(z)| \leq \lambda^p \cdot \sup_{z \in U} |f(z)|$$

En coupant par une droite complexe issue de l'origine on est ramené au cas d'une seule variable; on peut alors écrire $f(z) = z^p \cdot g(z)$, où $g(z)$ est holomorphe sur U, et l'inégalité ci-dessus en résulte en appliquant le principe du maximum à $g(z)$.

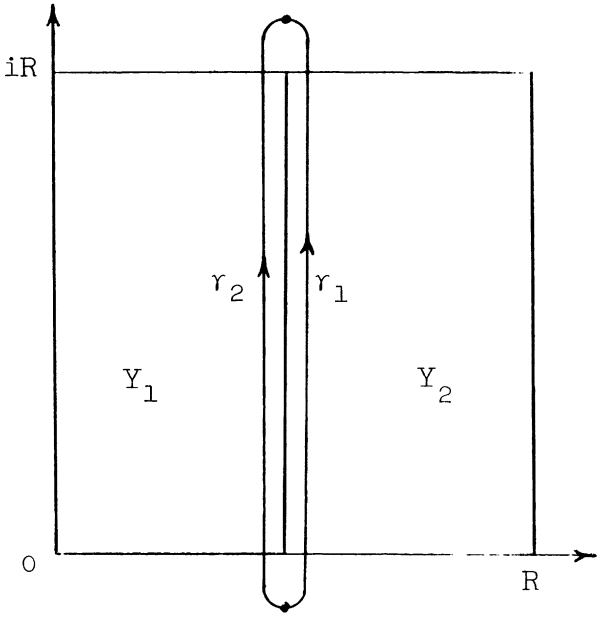
La démonstration précédente montre évidemment que le Lemme 1 est valable pour tout domaine *cerclé* U.

LEMME 2. (Cousin) *Soient* U *un polydisque de* $\mathbf{C}^n$ *et* D *un diviseur sur* U. *Il existe alors une fonction* f, *méromorphe sur* U, *telle que* $D = (f)$.

Dire que D est un diviseur sur U signifie que D est un diviseur d'un voisinage ouvert (non précisé) du compact U. Or U possède un système fondamental de voisinages isomorphes à des *cubes* (il suffit de le voir pour une variable, auquel cas on utilise la représentation conforme). Il suffit donc de démontrer le Lemme 2 en remplaçant le polydisque U par un cube X.

Par définition, D peut s'écrire localement comme diviseur d'une fonction méromorphe; on peut donc partager X en cubes assez petits pour que D soit, sur chacun d'eux, le diviseur d'une fonction méromorphe, et tout revient à "regrouper" ces cubes, ce qui se fait au moyen du Lemme suivant:

LEMME 3. Soit X un cube de $\mathbf{C}^n$, produit direct du carré Y: $0 \leq \Re z_1 \leq R$, $0 \leq \Im z_1 \leq R$, par un cube Z de $\mathbf{C}^{n-1}$. Soit Y_1 (resp. Y_2) la partie de Y formée des points z_1 tels que $\Re z_1 \leq R'$ (resp. $\Re z_1 \geq R'$). Soit D un diviseur sur X, et soient f_1 et f_2 deux fonctions méromorphes sur $Y_1 \times Z$ et $Y_2 \times Z$ respectivement, telles que $D = (f_1)$ sur $Y_1 \times Z$ et que $D = (f_2)$ sur $Y_2 \times Z$. Il existe alors une fonction f méromorphe sur X telle que $D = (f)$ sur X.



Démonstration du Lemme 2: La fonction f_1/f_2 est méromorphe sur $W = (Y_1 \cap Y_2) \times Z$, et $(f_1/f_2) = D - D = 0$, donc f_1/f_2 est holomorphe inversible, et, puisque W est simplement connexe, on peut écrire $f_1/f_2 = e^g$, où g est holomorphe sur W. Soit alors γ un contour entourant le segment $Y_1 \cap Y_2$, et assez voisin de ce segment pour que g soit holomorphe à l'intérieur de $\gamma \times Z$. Coupons γ en deux morceaux γ_1 et γ_2 de telle sorte que γ_1 (resp. γ_2) ne rencontre pas Y_1 (resp. Y_2), cf. figure. Posons:

$$g_1(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(t,z_2,\ldots,z_n)}{t - z_1}\, dt, \quad g_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(t,\ldots,z_n)}{t - z_1}\, dt .$$

Les fonctions g_1 et g_2 sont holomorphes dans $Y_1 \times Z$ et $Y_2 \times Z$ respectivement, et l'on a $g_1 - g_2 = g$, d'après la formule de Cauchy. On en tire $f_1/e^{g_1} = f_2/e^{g_2}$ sur W, ce qui permet de définir une fonction f sur X en posant $f = f_1/e^{g_1}$ sur $Y_1 \times Z$ et $f = f_2/e^{g_2}$ sur $Y_2 \times Z$; comme $(f) = (f_1)$ sur $Y_1 \times Z$ et $(f) = (f_2)$ sur $Y_2 \times Z$, on a bien $(f) = D$ sur X tout entier.

C.Q.F.D.

On trouvera des généralisations du Lemme 2 dans le Séminaire 51-52, Exposé 17, et Exposé 20, §4.

§2. Le théorème principal

Soit X une variété analytique complexe de dimension complexe n, et soit G un groupe d'automorphismes de X. Dans toute la suite de cet exposé nous ferons l'hypothèse suivante:

Il existe un compact K dans X qui rencontre toute classe mod G. (Autrement dit, les translatés $g \cdot K$ de K forment un recouvrement de X lorsque g parcourt G.)

Si l'espace quotient X/G est séparé, cette hypothèse équivant à dire que X/G est compact, comme on le voit immédiatement en tenant compte du fait que la relation d'équivalence définie par G est ouverte (cf. BOURBAKI, Top. Gén., Chap I, 2ème éd., §10, Exer. 17).

Puisque K est compact, K est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cartes locales de la variété X. Il existe donc un nombre fini de polydisques U_i (compacts) dont les intérieurs recouvrent K; si λ est un nombre réel < 1, et assez voisin de 1, les polydisques homothétiques $V_i = \lambda \cdot U_i$ sont tels que leurs intérieurs recouvrent encore K; nous noterons m le nombre des U_i, et nous désignerons par P_i le centre commun de V_i et de U_i (bien entendu, les notions de "polydisque homothétique," de "centre d'un polydisque," etc., sont relatives aux cartes locales choisies précédemment; elles n'ont pas de caractère intrinsèque). Soit $M = \bigcup_i U_i$; M est compact, et, puisque les intérieurs des V_i recouvrent K, un nombre fini de translatés des V_i recouvre M; il existe donc une partie finie H de G telle que $M \subset \bigcup_{i, g \in H} g \cdot V_i$. Dans toute la suite de l'exposé, K, les U_i, les V_i, les P_i, λ, m, H, seront fixés une fois pour toutes.

Soit maintenant D un diviseur de X, invariant par G, c'est-à-dire tel que $g \cdot D = D$ pour tout $g \in G$. D'après le Lemme 2 il existe des fonctions f_i, méromorphes sur U_i, telles que $D = (f_i)$ sur U_i. Pour tout

couple d'indices i, j, et tout $g \in H$, considérons la fonction $k^g_{i,j}(x) = f_i(g\cdot x)/f_j(x)$, définie sur $U_j \cap g^{-1}\cdot U_i$. On a:

$$(k^g_{i,j}(x)) = (f_i(g\cdot x)) - (f_j(x)) = g^{-1}\cdot D - D = 0 \quad \text{sur} \quad U_j \cap g^{-1}\cdot U_i ,$$

ce qui signifie que $k^g_{i,j}$ est holomorphe inversible.

Posons:

$$b(f_i; D) = \sup_{i,j,g\in H} \sup_{x \in V_j \cap g^{-1}\cdot U_i} |k^g_{i,j}(x)| ,$$

où le premier sup ne porte que sur les triplets i, j, $g \in H$ tels que $V_j \cap g^{-1}\cdot U_i \neq \emptyset$.

Le nombre $b(f_i; D)$ dépend des f_i choisis. En conséquence, nous poserons:

$$b(D) = \inf_{f_i} b(f_i; D) ,$$

pour tous les systèmes f_i tels que $D = (f_i)$ sur U_i.

THEOREME 1. Soit D un diviseur invariant de X, et soit $L(D)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions méromorphes h sur X, telles que $h(g\cdot x) = h(x)$ pour tout $g \in G$ et que $(h) \geq -D$. Si $\ell(D)$ désigne la dimension complexe de $L(D)$, on a l'inégalité:

$$(I) \qquad \ell(D) \leq A(\log\cdot b(D) + B)^n, \qquad n = \dim X,$$

où A et B ne dépendent que de X et G, mais pas de D.

De façon précise, on peut prendre:

$$A = \frac{m}{(-\log \lambda)^n \cdot n!} \quad \text{et} \quad B = -n\cdot\log\lambda, \quad (0 < \lambda < 1) .$$

Démonstration. Choisissons des fonctions f_i telles que $D = (f_i)$ sur U_i. Il suffit évidemment de démontrer l'inégalité (I) avec $b(f_i; D)$ à la place de $b(D)$.

Soit $h \in L(D)$. Sur chaque U_i, on peut écrire $h = h_i/f_i$, et l'on a: $(h_i) = (h) + (f_i) = (h) + D \geq 0$, ce qui signifie que h_i est holomorphe sur U_i.

Posons alors:

$$s_h = \sup_i \sup_{x \in V_i} |h_i(x)| \quad \text{et} \quad S_h = \sup_i \sup_{x \in U_i} |h_i(x)| \ .$$

Nous allons maintenant démontrer que l'inégalité:

(II) $$\ell(D) > m(p + n-1)^n/n! \ ,$$

où p est un entier, entraîne l'inégalité suivante:

(III) $$p \leq \log\cdot b(f_i; D)/(-\log \lambda) \ .$$

L'inégalité (I) résultera immédiatement de là, puisqu' on aura $\ell(D) \leq m\cdot(p + n-1)^n/n!$ avec $p = [\log\cdot b(f_i; D)/(-\log \lambda)] + 1$, d'où a fortiori:

$$\ell(D) \leq m\cdot(\log\cdot b(f_i; D)/(-\log \lambda) + n)^n/n! \ ,$$

ce qui est bien équivalent à (I), avec les valeurs des constantes A et B indiquées dans le théorème 1.

Il nous reste donc à montrer que (II) entraîne (III). Si (II) est vérifiée, on a, a fortiori,

(IV) $$\ell(D) > m\cdot\binom{p+n-1}{n} \ .$$

Je dis qu'il existe alors une fonction $h \in L(D)$ telle que les fonctions h_i soient nulles aux points P_i, centres des polydisques V_i et U_i, ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre $< p$, et telle que h ne soit pas identiquement nulle. En effet, si l'on fait correspondre à $h \in L(D)$ la valeur en un point P_i d'une des dérivées partielles de h_i, on obtient ainsi une forme linéaire sur $L(D)$. Le nombre de ces formes linéaires étant égal à $m.\binom{p+n-1}{n} < \ell(D)$, il existe un élément $h \neq 0$ dans $L(D)$ sur lequel toutes ces formes linéaires sont nulles.

En appliquant aux fonctions h_i associées à cette fonction h le Lemme 1, on obtient: $s_h \leq \lambda^p\cdot S_h$.

D'autre part, soit i un indice, et $x \in U_i$ tels que $|h_i(x)| = S_h$. Puisque $x \in M$, il existe $g \in H$ et $y \in V_j$ avec $g, y = x$. D'où:

$$h_i(x) = h(x)\cdot f_i(x) = h(g\cdot y)\cdot f_i(g\cdot y) = h(y)\cdot f_i(g\cdot y)$$
$$= h_j(y)\cdot f_j(y)^{-1}\cdot f_i(g\cdot y) = h_j(y)\cdot k^g_{i,j}(y) \qquad \text{avec } y \in V_j \cap g^{-1}\cdot U_i .$$

D'où:

$$S_h = |h_i(x)| = |h_j(y)\cdot k^g_{i,j}(y)| \leq s_h\cdot b(f_i; D) ,$$

d'où, en comparant avec $s_h \leq \lambda^p\cdot S_h$ et en tenant compte de $s_h \neq 0$, l'inégalité $1 \leq \lambda^p\cdot b(f_i; D)$, visiblement équivalente à (III); la démonstration est donc achevée, compte tenu de ce qui a été dit plus haut.

§3. Application aux fonctions automorphes.

Nous aurons besoin du Lemme suivant:

LEMME 4. *Soient D_1 et D_2 deux diviseurs invariants de X. On a l'inégalité:* $b(D_1 + D_2) \leq b(D_1)\cdot b(D_2)$.

Soient f_i^1 des fonctions méromorphes sur U_i telles que $D_1 = (f_i^1)$ sur U_i; soient f_i^2 des fonctions analogues pour D_2; les fonctions $f_i = f_i^1\cdot f_i^2$ sont alors telles que $D_1 + D_2 = (f_i)$ sur U_i, et l'on vérifie tout de suite que l'on a:

$$b(f_i; D_1 + D_2) \leq b(f_i^1; D_1)\cdot b(f_i^2; D_2) .$$

Le lemme 4 résulte immédiatement de là.

THEOREME 2. *Etant données n fonctions automorphes $h_1, \ldots, h_n$ sur X ($n = \dim X$), il existe un entier d jouissant de la propriété suivante:*

Toute fonction automorphe h sur X vérifie une relation polynomiale non triviale $P(h, h_1, \ldots, h_n) = 0$ dont le degré en h est $\leq d$.

Soit Δ un diviseur positif de X, invariant par G, et tel que $(h_i) \geq -\Delta$ pour $1 \leq i \leq n$; un tel diviseur existe; il suffit de prendre la somme des diviseurs des pôles des h_i, diviseurs qui sont invariants puisque les h_i sont automorphes. Nous prendrons pour d un entier vérifiant:

(V) $$d \geq A\cdot(n\cdot\log\cdot b(\Delta))^n .$$

Soit maintenant h une fonction automorphe arbitraire, et soit D un diviseur invariant tel que $(h) \geq -D$, $D \geq 0$. Considérons les monômes:

$$h^{\alpha} \cdot h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}, \quad \text{où} \quad \alpha \leq d, \quad \alpha_i \leq N,$$

où N est un entier ≥ 0.

Ces monômes sont en nombre égal à $(d+1)(N+1)^n$, et chacun d'eux a un diviseur $\geq -(d \cdot D + nN \cdot \Delta)$. D'après le Théorème 1 et le Lemme 4, on a:

$$\ell(d \cdot D + nN \cdot \Delta) \leq A \cdot (d \cdot \log \cdot b(D) + nN \cdot \log \cdot b(\Delta) + B)^n ,$$

quantité qui est $< (d+1)(N+1)^n$ pour N grand, vu l'inégalité (V). Les monômes $h^{\alpha} \cdot h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$, $\alpha \leq d$, $\alpha_i \leq N$, ne sont donc pas linéairement indépendants, ce qui démontre le Théorème 2.

COROLLAIRE 1. Le degré de transcendance du corps E des fonctions automorphes sur X est au plus égal à la dimension n de X.

COROLLAIRE 2. Si le degré de transcendance de E est égal à n, E est un corps de fonctions algébriques à n variables.

En effet, soient $h_1, \ldots, h_n$ des éléments algébriquement indépendants de E; ils engendrent un sous-corps F de E qui est un corps de fractions rationnelles à n indéterminées. Le Théorème 2 montre que tout élément $h \in E$ est algébrique sur F, et de degré au plus d; choisissons un élément $h_0 \in E$ dont le degré sur F soit maximum, soit d_0. Je dis que $E = F(h_0)$, ce qui démontrera le Corollaire. Or, soit $h \in E$, et considérons l'extension $F(h, h_0)/F$; d'après le théorème de l'élément primitif (applicable parce que E est de caractéristique nulle), il existe $h' \in E$ tel que $F(h') = F(h, h_0)$; comme le degré de h' est $\leq d_0$, il s'ensuit que $F(h')$ est de degré 1 sur $F(h_0)$, d'où $F(h, h_0) = F(h') = F(h_0)$, ce qui signifie bien que $h \in F(h_0)$.

C.Q.F.D.

Remarques. 1. Par contre, si le degré de transcendance de E est $< n$, le Théorème 2 ne permet pas d'affirmer que E est un corps de fonctions algébriques, i.e. que E est engendré par un nombre fini de fonctions.

2. Le Théorème 2 et ses corollaires s'appliquent en particulier au cas où X est une variété analytique compacte et où G est réduit à l'identité. Dans ce cas le corps E n'est autre que le corps des fonctions méromorphes sur X.

3. Le Théorème 2 était connu lorsque X est un domaine d'holomorphie, cf. [2] et [4]. Dans le cas général, il a été annoncé sans démonstration par Chow.

§4. Application aux formes automorphes.

Soit maintenant $J_g(x)$ un facteur d'automorphie sur X, et posons:

$$c(J) = \sup_{g \in H} \sup_{x \in M} |J_g(x)| .$$

Soit D_m l'espace vectoriel des formes automorphes de poids m relativement à (J_g), et soit d_m la dimension de D_m. On a alors:

THEOREME 3. $d_m \leq A \cdot (m \cdot \log \cdot c(J) + B)^n$.

Il suffit de faire la démonstration lorsque $m = 1$, car $c(J^m) = c(J)^m$. Dans ce cas, ou bien $d_1 = 0$, et le Théorème 3 est démontré, ou bien il existe une forme automorphe ψ non identiquement nulle. Soit D le diviseur de ψ; on voit immédiatement que l'application $h \to h/\psi$ est un isomorphisme de D_1 sur $L(D)$, donc que $d_1 = \ell(D)$. Tout revient donc à montrer que $b(D) \leq c(J)$, à cause du Théorème 1. Or, soit $f_i = \psi$ sur tout U_i; on a bien $(f_i) = D$, et, si l'on calcule les fonctions $k^g_{i,j}$ correspondantes, on trouve:

$$k^g_{i,j}(x) = f_i(g \cdot x)/f_j(x) = J_g(x) ,$$

d'où évidemment $b(f_i; D) \leq c(J)$, et a fortiori $b(D) \leq c(J)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. $d_m = o(m^n)$ lorsque $m \to +\infty$

(Ce Corollaire est dû à Hervé [3] dans le cas particulier où X est un domaine borné et où $J_g(x)$ est le jacobien de $x \to g \cdot x$).

§5. Complément

La démonstration du th. 1 s'applique à des cas sensiblement plus généraux (cf. [1]). En voici un:

Supposons G réduit à l'identité, donc X compacte, et soit Y un espace fibré analytique, à fibres vectorielles de dimension r. Soit $L(Y)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de Y, et soit $\ell(Y)$ la dimension de $L(Y)$.

D'après un théorème de H. Cartan (cf. Sém. 51-52, Exp. 17) le fibré Y est trivial au-dessus de chaque U_i et peut donc être défini par des matrices M_{ij}, holomorphes inversibles, sur $U_i \cap U_j$. Si M est une matrice carrée d'ordre r, nous noterons M le produit par r de la borne supérieure des valeurs absolues de ses coefficients. On peut donc définir un nombre $b(M_{ij}; Y) = \sup_{i,j} \sup_{V_j \cap U_i} |M_{ij}(x)|$. Soit $b(Y)$ la borne inférieure des $b(M_{ij}; Y)$ pour tous les systèmes de M_{ij} définissant Y. On a alors:

THEOREME 4. $\ell(Y) \leq r \cdot A \cdot (\log \cdot b(Y) + B)^n$.

Nous n'expliciterons pas la démonstration de ce théorème: elle est tout à fait semblable à celle du théorème 1. On remarque que, si $\ell(Y)$ était "trop grand," il existerait une section holomorphe non nulle de Y, nulle en chaque point P_i ainsi que ses dérivées partielles d'ordre "très élevé"; le lemme de Schwarz donne alors une contradiction si l'on a majoré les changements de cartes M_{ij}.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOCHNER, Algebraic and linear dependence of automorphic functions in several variables, J. Ind. Math. Soc., 16, 1952, p. 1-6.

[2] A. BOREL, Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. Fr., 80, 1952, p. 167-182.

[3] M. HERVÉ. Sur les fonctions automorphes de n variables complexes, C-R, 226, 1948, p. 462-464.

[4] C-L. SIEGEL. Analytic Functions of Several Complex Variables, Princeton, 1948-1949. Notes polycopiées.